4 Принцип Мопертюи

Пусть гамильтониан системы не зависит от времени. Тогда несложно показать, что он является первым интегралом, т.е. не меняется вдоль решений

$$\frac{d}{dt}H = 0.$$

Пусть M — конфигурационное пространство системы (для простоты — область в $\mathbb{R}^l$), тогда верно следующее
Утверждение (принцип Мопертюи). Пусть $q_0, q_1 \in M$ — фиксированные точки. Тогда кривая $\gamma : [a, b] \to M$ является *траекторией* решения системы с Гамильтонианом H при заданной энергии h тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала

$$\int\limits_{\gamma} pdq = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau)\dot{q}(\tau)d\tau$$

в классе все путей γ с фиксированными концами и параметризованных так, что $H(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q) = h$.
Замечание. Параметр τ — не время, т.е. γ — не решение, а только кривая решения на M.
Определение. Многообразие M называется *римановым многообразием*, если в каждой его точке x задано скалярное произведение g_x (неотрицательная функция на $T_xM \times T_xM$ со значениями в $\mathbb{R}$, равная нулю только на нулевом векторе, симметричная и линейная) и для любых двух гладких векторных полей v, w функция $g_x(v(x), w(x))$ гладкая. Пара (M, g) — риманово многообразие, g — метрика.

Пусть M — конфигурационное пространство, $H = T - V$ не зависит от времени, здесь

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad V = V(q).$$

Т.е. ds^2 — метрика, задаваемая кинетической энергией. Из принципа Мопертюи получаем
Следствие. Траектории системы с гамильтонианом $H = T - V$ для заданной полной энергии $H = h$ в области $V > -h$ есть геодезические метрики

$$d\rho^2 = (h + V)ds^2.$$

Доказательство. Вдоль кривой должен быть выбран такой параметр, чтобы выполнялось $T = h + V$, т.е. для «нового времени» τ должно быть выполнено

$$d\tau = ds/\sqrt{2(h + V)}.$$

Поскольку $L = T + V$, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T.$$

Получаем

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \dot q \, d\tau = \int\limits_{\gamma} \frac{2T}{\sqrt{2(h+V)}} \, ds = \int\limits_{\gamma} \sqrt{2(h+V)} \, ds = \sqrt{2} \int\limits_{\gamma} \, d\rho.$$

5 Перевернутый маятник

Рассмотрим маятник длины l, состоящий из невесомого стержня и массивной точки массы m, совершающий движение в поле силы тяжести. Считаем, что точка подвеса маятника движется по заданному закону, задаваемому гладкой функцией времени $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, вдоль горизонтальной прямой. Таким образом, на движение маятника оказывает влияние закон движения точки подвеса и сила тяжести.

Через Oxy обозначим неподвижную систему декартовых координат, выбранную таким образом, что точка подвеса движется вдоль оси Ox, а ось Oy вертикальна и направлена противоположно силе тяжести. Угол между осью Ox и стержнем обозначим φ (углам $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ соответствуют горизонтальные положения маятника). Координаты x и y массивной точки выражаются через φ обычным образом

$$\begin{aligned} x &= f + l\sin\varphi, \\ y &= l\cos\varphi. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot f^2 + 2\dot f l \dot\varphi \cos\varphi + l^2\dot\varphi^2\right).$$

Пусть g — ускорение свободного падения, тогда выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = mgy = mgl\cos\varphi.$$

Получаем лагранжиан системы

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot f^2 + 2\dot f l \dot\varphi \cos\varphi + l^2\dot\varphi^2\right) - mgl\cos\varphi.$$

Уравнения, описывающие динамику системы, запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= p, \\ \dot p &= \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot f}{l}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь мы считаем, что угловая переменная 2π-периодична, т.е. мы допускаем такие положения маятника, при которых он находится ниже горизонта или, используя первоначальную терминологию из **?**, можно сказать, что маятник может быть «под полом» вагона и мы не считаем, что однажды приняв горизонтальное положение, он вечно останется в нем.

Докажем следующее утверждение.

Теорема. Для системы (1) существует такое $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, что решение, выходящие из точки $\varphi = \varphi_0$, $p_0 = 0$ в момент времени $t = 0$, удовлетворяет условию

$$-\pi/2 < \varphi(t, \varphi_0, 0) < \pi/2 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \infty).$$

Доказательство. Обозначим через Ω следующее подмножество расширенного фазового пространства

$$\Omega = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}.$$

Рассмотрим отрезок L, содержащийся в Ω и определенный в координатах следующим образом

$$L = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t = 0, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, p = 0\}.$$

Покажем, что L содержит хотя бы одну точку такую, что решение, выходящее из нее, не покинет подмножества $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ для всех $t \geqslant 0$.

Предположим обратное. Тогда определено отображение, которое будем обозначать σ, из L в $\partial\Omega$

$$\sigma\colon (0, \varphi_0, p_0) \in L \mapsto (t^*, \varphi(t^*, \varphi_0, p_0), p(t^*, \varphi_0, p_0)) \in \partial\Omega.$$

Здесь $t^* = \sup(T)$, $T = \{s \in [0, \infty)\colon \varphi(t, \varphi_0, p_0) \in [-\pi/2, \pi/2]\,\text{для всех}\, t \in [0, s]\}$.

Покажем, что отображение σ непрерывно. В соответствии с рассуждениями метода Важевского для этого будем рассматривать систему (1) в окрестности $\partial\Omega$. Для доказательства непрерывности достаточно показать, что каждое решение, начинающееся на L, либо трансверсально $\partial\Omega$ в момент своего первого достижения границы при $t > 0$, либо локально не принадлежит множеству $\Omega \setminus \partial\Omega$. Непрерывность в этих случаях следует из непрерывной зависимости решений (1) от начальных условий.

Это достаточное условие выполнено для (1). Действительно, для решений, достигающих Ω^+ и Ω^-, где

$$\begin{aligned}
\Omega^- = &\{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0, \varphi = \pi/2, p > 0\} \cup \\
&\{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0, \varphi = -\pi/2, p < 0\}, \\
\Omega^+ = &\{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0, \varphi = \pi/2, p < 0\} \cup \\
&\{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0, \varphi = -\pi/2, p > 0\},
\end{aligned}$$

выполнено условие трансверсальности пересечения. Более того, решения начинающиеся на L, не могут покинуть Ω через Ω^+. Покажем, что при $t > 0$ они могут покинуть Ω только через Ω^-.

Для каждого решения, начинающегося или достигающего $\partial\Omega$ в точках следующего множества

$$\begin{aligned}
\Omega_0^+ = &\{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t \geqslant 0, \varphi = \pi/2, p = 0\} \cup \\
&\{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t \geqslant 0, \varphi = -\pi/2, p = 0\},
\end{aligned}$$

из (1) получаем

$$\ddot{\varphi} = \begin{cases} g/l & \text{if } \varphi = \pi/2 \\ -g/l & \text{if } \varphi = -\pi/2. \end{cases}$$

Таким образом получаем, что решения, начинающееся на L, не могут впервые достигнуть Ω_0^+ в момент времени $t > 0$ и для $t = 0$ они как минимум локально покидают Ω.

Закончим доказательство следующим рассуждением, типичным для метода Важевского. Рассмотрим множество ω граничных точек, удовлетворяющих условию $\varphi = \pm\pi/2$, т.е.

$$\omega = \partial\Omega \setminus \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\},$$

и непрерывное отображение $\pi \colon \omega \to \omega \cap L$. Поскольку σ и π непрерывны, то получаем, что непрерывное отображение $\pi \circ \sigma$ переводит L в его двухточечную границу. Противоречие доказывает утверждение.

В доказательстве неявно предполагалось, что решения существуют на всем полуинтервале $[0, \infty)$. Для данной системы это может быть строго показано. Если в каком-либо случае бесконечная продолжаемость показана быть не может, то при использовании рассуждений метода Важевского стоит говорить о том, что решение не покинет какой-либо исследуемой области расширенного фазового пространства на всем интервале существования.