7 Симплектические многообразия. Пуассоновы многообразия.

Определение. Говорят, что на многообразии M задана *симплектическая структура*, если на нем задана замкнутая невырожденная 2-форма ω. Говорят, что форма замкнута, если $d\omega = 0$. Форма называется невырожденной, если для любой точки q и любого ненулевого $v \in T_qM$, форма $\omega(v, \cdot)$ не равна тождественно нулю, т.е. существует $w \in T_qM$ и $\omega(v, w) \neq 0$.

Любое симплектическое многобразие всегда имеет четную размерность (показать — можно использовать $det(M) = (-1)^n det(M)$ для матрицы $n \times n$).

Пусть M — многообразие, T^*M — его кокасательное расслоение. Тогда на T^*M определена следующая 1-форма: пусть $v \in T(T^*M)$ — вектор, выходящий из точки $(q, p) \in T^*M$, $\pi\colon T(T^*M) \to TM$ — естественная проекция («забываем про кокасательные слои»), $\pi(v)$ есть точка $q \in M$ и некоторый вектор $w \in T_qM$, положим $\omega^1(v) = p(\pi(v)) = p(w)$. В локальных координатах эта форма записывается как $\omega^1 = pdq$. Ее дифференциал $d\omega^1 = dp \wedge dq$ — симплектическая форма (поскольку всегда $dd\omega = 0$).

Теорема (Дарбу). В окрестности любой точки симплектического многообразия (M, ω) всегда можно ввести такие координаты (p, q), что $\omega = dp \wedge dq$.

Определение. Подмногообразие симплектического многообразия M, на котором $\omega = 0$ называется *лагранжевым*.

Пример лагранжева многообразия — нулевое сечение кокасательного расслоения.

Определение. *Скобкой Пуассона* на многообразии M называется отображение $\{\cdot, \cdot\}\colon C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ такое, что

1. $\{\lambda F_1 + \mu F_2, G\} = \lambda\{F_1, G\} + \mu\{F_2, G\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $\{F, G\} = -\{G, F\}$
3. $\{F_1F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$
4. $\{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{F, G\}, H\} = 0$

Вырожденные скобки Пуассона возникают, например, в динамике твердого тела, если мы рассматриваем систему уравнений в «алгебраической форме». Этот пример мы рассмотрим ниже.

Остановимся несколько подробнее на рассмотринии симплектических многообразий. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Если на M дополнительно задана некоторая функция (будем называть ее гамильтонианом автономной системы) $H\colon M \to \mathbb{R}$, то с помощью симплектической структуры можем сопоставить ей некоторое векторное поле: dH — 1-форма на M, поскольку ω невырождена, то существует векторное поле v_H такое, что $\omega(\cdot, v_H) = dH$. Назовем v_H — гамильтоновым векторным полем.

Тогда будем говорить, что динамика гамильтоновой системы (M, ω, H) задается уравнением

$$\dot{x} = v_H(x).$$

В координатах Дарбу (когда $\omega = dp \wedge dq$) это уравнение принимает стандартный вид уравнений Гамильтона.

Если многообразие симплектическое, то на нем можно ввести скобку Пуассона (невырожденную). Обратно, каждой невырожденной скобке можно сопоставить симплектическую структуру. Положим по определению

$$\{H, F\} = \partial_{v_H} F = dF(v_H) = \omega(v_H, v_F).$$

Следовательно, $\{\cdot, \cdot\}$ — действительно скобка Пуассона. Обратно, если задана невырожденная скобка Пуассона (т.е. для любой F такой, что $dF \neq 0$ в некоторой точке, найдется G такая, что в данной точке $\{F, G\} \neq 0$). Из определения скобки Пуассона имеем, что $\{F, \cdot\}$ — касательный вектор к многообразию в заданной точке («дифференцирование функций по направлению»). Поскольку скобка невырождена, то любой касательный вектор может быть представлен в таком виде. Тогда пусть v_F и v_G — два (произвольных) касательных вектора в некоторой точке таких, что $\{F, \cdot\} = v_F$ и $\{G, \cdot\} = v_G$. Положим

$$\omega(v_G, v_F) = \{G, F\}.$$

В координатах Дарбу скобка Пуассона имеет следующий вид

$$\{H, F\} = \sum_i^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right).$$

Изменение любой функции F вдоль решений уравнений Гамильтона есть

$$\dot{F} = \{H, F\}.$$

Получаем, что функция F — первый интеграл системы, если $\{H, F\} = 0$. Отсюда сразу получаем, что если F_1 и F_2 — два первых интеграла системы, то и $\{F_1, F_2\}$ — тоже первый интеграл.

Пример системы с вырожденной скобкой Пуассона. Динамика твердого тела с неподвижной точкой описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{K}_i = \{H, K_i\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{H, \gamma_i\}, \\
&H = 1/2 \cdot \langle K, AK \rangle + mg\langle r, \gamma \rangle, \\
&\{K_i, K_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} K_k, \quad \{K_i, \gamma_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.
\end{aligned}$$

Если $K_1, K_2, K_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — координаты в $\mathbb{R}^6$, то для произвольных функций $F(K, \gamma) = F(x)$ и $G(K, \gamma) = G(x)$ положим

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

Для любой функции F получаем $\{F, \langle \gamma, \gamma \rangle\} = 0$ и $\{F, \langle K, \gamma \rangle\} = 0$. Скобка вырождена.

8 Интегральные инварианты. Теорема Пуанкаре о возвращении.

Пусть $T^*M \times \mathbb{R}$ — расширенное фазовое пространство. На нем корректно определена форма $\omega = pdq - Hdt$ (форма Пуанкаре-Картана).

Гамильтоново векторное поле v_H (в расширенном фазовом пространстве) — аннулятор формы $d\omega$, т.е. для любого вектора v получаем $d\omega(v, v_H) = 0$.

Следствие. Для любых замкнутых кривых γ_1 и γ_2 в расширенном фазовом пространстве, охватывающих одну трубку траекторий имеем

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Доказательство. Теорема Стокса.

Следствие. Для любой кривой γ в фазовом пространстве имеем

$$\int_{\gamma} pdq = \int_{g^t\gamma} pdq.$$

Здесь g^t — поток гамильтоновой системы.

Следствие. Пусть D — двумерный диск (топологически) в фазовом пространстве, тогда

$$\int_D dp \wedge dq = \int_{g^t D} dp \wedge dq.$$

Следствие.

$$(g^t)^*(dp \wedge dq) = dp \wedge dq.$$

То есть фазовый поток сохраняет форму $dp \wedge dq$.

Следствие (теорема Лиувилля). Фазовый поток g^t сохраняет фазовый объем.

Доказательство.

$$(dp \wedge dq)^n = c \cdot dq_1 \wedge ... \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge ... \wedge dp_n, \quad c \neq 0.$$

Поскольку $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$, то получаем утверждение теоремы. Отметим, что $(dp \wedge dq)^n$ — невырожденная форма и задает форму объема на симплектическом многообразии (на фазовом пространстве). В частности, любое симплектическое многообразие ориентируемо.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть g — непрерывное взаимнооднозначное отображение ограниченной области D евклидова пространтсва в себя ($gD = D$), сохраняющее объем. Тогда в любой окрестности U любой точки $x \in D$ найдется $y \in U$ такая, что $g^n y \in U$, для некоторого $n > 0$.