

14 Классическая схема теории возмущений

Рассмотрим близкую к интегрируемой систему с гамильтонианом $H(I, \varphi)$

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Будем искать каноническую замену переменных

$$(I, \varphi) \mapsto (J, \psi)$$

которая бы приводила гамильтониан к виду $\mathcal{H}(J, \varepsilon)$, т.е. в новые координаты должны быть координатами «действие-угол» для возмущенной системы. Для этого будем искать соответствующую производящую функцию канонической замены

$$S(J, \varphi) = S_0(J, \varphi) + \varepsilon S_1(J, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Замену будем искать такую, чтобы при $\varepsilon = 0$ она была тождественной. В этом случае надо положить $S_0 = J\varphi$. Если производящая функция $S(J, \varphi)$ задана, то переход к новым переменным осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + O(\varepsilon^2) \\ I &= \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Чтобы получить выражение функции Гамильтона через новые координаты, достаточно подставить в него выражения $I(J, \psi)$ и $\varphi(J, \psi)$, полученные из уравнений, записанных выше. Поскольку мы хотим, чтобы новый гамильтониан зависел только от переменных J , то ограничимся тем, что подставим в $H(I, \varphi, \varepsilon)$ выражение $I(J, \varphi)$ (второе уравнение выше). Получим

$$\mathcal{H}_0(J) + \varepsilon \mathcal{H}_1(J) + O(\varepsilon^2) = H_0\left(J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)\right) + \varepsilon H_1\left(J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \varphi\right) + O(\varepsilon^2)$$

В нулевом приближении по малому параметру получаем

$$\mathcal{H}_0 = H_0(J)$$

В первом порядке по ε получаем уравнение

$$\mathcal{H}_1(J) = \sum_j \frac{\partial H_0(J)}{\partial J_j} \frac{\partial S_1(J, \varphi)}{\partial \varphi_j} + H_1(J, \varphi)$$

Если ввести обозначение для набора частот ω

$$\omega(J) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}$$

то это уравнение можно записать в следующем виде

$$\mathcal{H}_1(J) = \left\langle \omega(J), \frac{\partial S_1(J, \varphi)}{\partial \varphi} \right\rangle + H_1(J, \varphi)$$

Здесь и далее с помощью $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы обозначаем суммирование соответствующих компонент от 1 до n (мы рассматриваем систему с n степенями свободы).

Чтобы решить это уравнение, воспользуемся следующим методом. Разложим функции $H_1(J, \varphi)$ и $S_1(J, \varphi)$ в ряды Фурье

$$H_1(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_1^k(J) e^{i\langle k, \varphi \rangle}, \quad S_1(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} s_1^k(J) e^{i\langle k, \varphi \rangle}$$

Тогда

$$\left\langle \omega(J), \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} i\langle \omega(J), k \rangle s_1^k e^{i\langle k, \varphi \rangle}$$

Для $k = 0$ получаем, что

$$\mathcal{H}_1(J) = h_1^0(J)$$

Для $k \neq 0$ получаем

$$s_1^k = -\frac{h_1^k(J)}{i\langle \omega(J), k \rangle}$$

Аналогичным образом (формально) можно найти функции $S_2(J)$, $S_3(J)$ и т.д. К сожалению, полученный ряд $S_0(J) + \varepsilon S_1(J) + \dots$ не только может не быть сходящимся (а это условие нам необходимо, если мы действительно ищем некоторую производящую функцию, а не просто оперируем формальными выражениями, которые могут не иметь смысла), но может быть даже не определен на всюду плотном множестве в $\mathbb{R}^n$. Например, проблемы, связанные с неопределенностью функции S_1 могут возникнуть на резонансных поверхностях

$$\Gamma_k = \{J \in \mathbb{R}^n : \langle \omega(J), k \rangle = 0, h_1^k(J) \neq 0\}$$

Аналогичные трудности возникают и при рассмотрении следующих приближений S_i , $i > 1$. Тем не менее, в конкретных задачах может быть полезно провести только лишь конечное число (N) шагов классической схемы теории возмущений и перейти к гамильтониану вида $\mathcal{H}(J, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})$, т.е. возможно повысить порядок малости возмущения (при этом все же замена может быть не определена на конечном числе резонансных поверхностей Γ_k).

15 Теорема Пуанкаре о неинтегрируемости

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Считаем, что $I \in D$, D — область в $\mathbb{R}^n$. Также считаем, что в D система невырождена

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right) \neq 0, \quad I \in D$$

Будем искать первый интеграл возмущенной ($\varepsilon \neq 0$) системы $F(I, \varphi, \varepsilon)$, предполагая, что он гладко зависит от параметра ε . В частности, он может быть разложен в ряд Тейлора

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I, \varphi) + \varepsilon F_1(I, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Поскольку функция F должна быть первым интегралом, то $\{H, F\} = 0$, т.е.

$$\{H, F\} = \{H_0, F_0\} + \varepsilon(\{H_0, F_1\} + \{H_1, F_0\}) + O(\varepsilon^2) = 0$$

Сначала покажем, что F_0 не зависит от φ . Действительно, если

$$F_0 = \sum_{k \in \mathbb{R}^n} f_0^k(I) e^{i\langle k, \varphi \rangle}$$

тогда из условия $\{H_0, F_0\} = 0$ получаем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} i\langle \omega(I), k \rangle f_0^k(I) e^{i\langle k, \varphi \rangle} = 0$$

Следовательно, $\langle \omega(I), k \rangle f_0^k(I) = 0$. Из невырожденности невозмущенного гамильтониана получаем, что при $k \neq 0$, $\langle \omega(I), k \rangle \neq 0$ для почти всех $I \in D$, поэтому $f_0^k(I) = 0$ при $k \neq 0$.

Рассмотрим теперь слагаемое порядка ε в равенстве $\{H, F\} = 0$. Если

$$H_1(I, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_1^k(I) e^{i\langle k, \varphi \rangle}$$

Получаем

$$\left\langle \frac{\partial H_0}{\partial I}, k \right\rangle f_0^k - \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial I}, k \right\rangle h_0^k = 0$$

Рассмотрим множества ($k \neq 0$)

$$\Gamma_k = \{I \in D: \langle \omega(I), k \rangle = 0, h_1^k(I) \neq 0\}$$

Назовем множество $B = \cup_k \Gamma_k$ вековым множеством нашей системы. В точках B градиенты функций H_0 и F_0 лежат в плоскости, которая перпендикулярна k (для некоторого k , зависящего от I).

Назовем систему интегрируемой по Пуанкаре, если она имеет полный набор гладких первых интегралов $F^j(I, \varphi, \varepsilon)$, причем градиенты функций $F_0^j = F^j(I, \varphi, 0)$ независимы хотя бы в одной точке области D .

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что верна

Теорема (Пуанкаре). Предположим, что B всюду плотно в D . Тогда система неинтегрируема по Пуанкаре.

16 Критерий формальной интегрируемости для случая возмущения тригонометрическим полиномом

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(\varphi)$$

Здесь

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum a_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} (AI, I), \quad \det A \neq 0$$

Функция H_1 есть тригонометрический полином, т.е.

$$H_1 = \sum_k h_k e^{ik\varphi}$$

притом только конечное число $h_k \in \mathbb{C}$ не равны нулю. Если в новых координатах функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(J, \varepsilon) = \mathcal{H}_0(J) + \varepsilon \mathcal{H}_1(J) + \dots$$

то производящая функция находится из системы

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_k} + H_1(\varphi) &= \mathcal{H}_1(J) \\ \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_i} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_j} &= \mathcal{H}_2(J) \\ \dots \\ \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k} \frac{\partial S_m}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(a_{ij} \sum_{p+q=m} \frac{\partial S_p}{\partial \varphi_i} \frac{\partial S_q}{\partial \varphi_j} \right) &= \mathcal{H}_m(J) \\ \dots \end{aligned}$$

Если искать функции S_m в виде разложения

$$S_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} S_m^k(J) e^{ik\varphi}$$

то

$$S_1^k = ih_k / (\omega, k)$$

и

$$S_m^k = \frac{1}{2i(\omega, k)} \sum_{u+v=m, \sigma+\delta=k} \langle \sigma, \delta \rangle S_u^\sigma S_v^\delta$$

Рассмотрим вопрос о существовании полного набора формальных первых интегралов вида

$$F(I, \varphi) = F_0 + \varepsilon F_1 + \dots$$

где F_i — аналитические функции. Отметим, что ряд формальный, т.е. мы не интересуемся его сходимостью.

Теорема (Козлов, Грещев) Пусть квадратичная форма H_0 положительно определена. Тогда система имеет полный набор формально аналитических по ε первых интегралов, независимых при ε , тогда и только тогда, когда все $h_k \neq 0$ расположены на попарно ортогональных в метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle$ прямых.