10 Канонические преобразования

Пусть (M, ω, H) — гамильтонова система, т.е. симплектическое многообразие и функция Гамильтона.

Утверждение. Пусть p, q, t — локальные канонические координаты в расширенном фазовом пространстве. Пусть P, Q, T — другие локальные координаты в этой же области и $K(P, Q, T)$ и $S(P, Q, T)$ — такие функции, что

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT + dS.$$

Тогда интегральные кривые уравнения Гамильтона в новых координатах задаются уравнениями

$$\frac{d}{dT}Q = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{d}{dT}P = -\frac{\partial K}{\partial Q}.$$

Доказательство. Пусть некоторое векторное поле v является аннулятором формы $d(pdq - Hdt)$. Покажем сначала, что тогда $v = \lambda(p, q, t) \cdot v_H$, где $v_H = (-H_q, H_p, 1)$ и λ — некоторая функция. Пусть $v = (v_p, v_q, v_t)$. Поскольку мы предполагаем, что это аннулятор, то для любого векторного поля $w = (w_p, w_q, w_t)$ должно быть выполнено

$$\begin{vmatrix} v_p & w_p \\ v_q & w_q \end{vmatrix} - \frac{\partial H}{\partial p}\begin{vmatrix} v_p & w_p \\ v_t & w_t \end{vmatrix} - \frac{\partial H}{\partial q}\begin{vmatrix} v_q & w_q \\ v_t & w_t \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем, что v_p, v_q и v_t связаны уравнениями

$$\begin{aligned} -v_q + H_p v_t = 0 \\ v_p + H_q v_t = 0 \end{aligned}$$

Пусть $v_t = \lambda(p, q, t)$ — произвольно. Получаем $v = \lambda(p, q, t) \cdot v_H$.
Поскольку аннуляторы форм $d(pdq - Hdt)$ и $d(PdQ - KdT)$ совпадают, то в новых координатах гамильтоново векторное поле имеет вид $v_K = \mu(P, Q, T) \cdot (-K_Q, K_P, 1)$, где $\mu(P, Q, T)$ — некоторая функция. Если в качестве параметра выбрать T, то получим систему

$$\frac{d}{dT}Q = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{d}{dT}P = -\frac{\partial K}{\partial Q}.$$

Определение. Отображение $f\colon M \to M$ симплектического многообразия называется каноническим, если оно сохраняет форму ω, т.е. $f^*\omega = \omega$.
В координатах Дарбу $\omega = dp \wedge dq$. Если рассматривать отображение f как $f\colon (p, q) \mapsto (P, Q)$, то отображение каноническое, если

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ = dP(p, q) \wedge dQ(p, q).$$

Если

$$J = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)},$$

то отображение f каноническое, если во всех точках (p, q), где оно определено, выполнено

$$I = J^T I J,$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Сдвиг вдоль фазовых траекторий гамильтоновой системы — каноническое преобразование (следует из теоремы Стокса и того, что гамильтоново векторное поле в расширенном фазовом пространстве — аннулятор формы $d(pdq - Hdt)$).

Утверждение. Пусть $f\colon M \to M$ — каноническое отображение, и оно переводит точку x с координатами (p^*, q^*) в точку y с координатами (P^*, Q^*), т.е. $f\colon (p^*, q^*) \mapsto (P^*, Q^*)$. Пусть (p, q) и (P, Q) — координаты в окрестностях соответствующих точек. Тогда локально в новых координатах (P, Q) в некоторой окрестности точки x уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}.$$

Здесь $K(P, Q, t) = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.

Доказательство. Рассмотрим форму $pdq - PdQ$. Пусть γ — замкнутый путь в малой окрестности точки (p^*, q^*). Поскольку отображение $(p, q) \mapsto (P, Q)$ каноническое, то

$$\int\limits_{\gamma} pdq - PdQ = 0.$$

Поэтому при фиксированной точке (p^*, q^*) и для любой другой близкой точки (p', q')

$$\int\limits_{p^*, q^*}^{p', q'} pdq - PdQ = S(p', q').$$

Окончательно

$$dS = pdq - PdQ.$$

Можем применить предыдущее утверждение при $t = T$ и $K = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.

Утверждение. Пусть $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — линейное преобразование, задаваемое матрицей A. Тогда оно задает новые канонические координаты на $\mathbb{R}^{2n}$, если

$$I = A^T I A.$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

то $P = p/\lambda$ и $Q = \lambda q$ — канонические координаты и в них уравнения Гамильтона имеют обычный вид с гамильтонианом $K = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.

Замечание. Не любое преобразование, сохраняющее гамильтоновость уравнений, является каноническим. Например, если $P = 2p$ и $Q = q$, то уравнения могут быть записаны в гамильтоновой форме, но такое преобразование не каноническое (тем не менее, достаточно часто каноническими преобразованиями называют любые, сохраняющие гамильтоновость уравнений).
Ниже считаем, что $M = \mathbb{R}^{2n}$ и $\omega = dp \wedge dq$.
Утверждение. Пусть $S(Q, q)$ — функция, заданная в окрестности точки $(Q^*, q^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Если

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q}(Q^*, q^*) \neq 0$$

то функция S задает каноническое отображение окрестности точки $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ в окрестность точки $(P^*, Q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$, где

$$p^* = \frac{\partial S}{\partial q}(Q^*, q^*), \quad P^* = -\frac{\partial S}{\partial Q}(Q^*, q^*)$$

Утверждение. Пусть $S(P, q)$ — функция, заданная в окрестности точки $(P^*, q^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Если

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q}(P^*, q^*) \neq 0$$

то функция S задает каноническое отображение окрестности точки $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ в окрестность точки $(P^*, Q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$, где

$$p^* = \frac{\partial S}{\partial q}(P^*, q^*), \quad Q^* = \frac{\partial S}{\partial P}(P^*, q^*)$$

Если $S(Q, q)$ — производящая функция канонического преобразования и $H = H(p, q)$, то новый гамильтониан имеет вид

$$K(P, Q) = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right)\bigg|_{q = q(P,Q)}$$

Если удается найти производящую функцию такую, что

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right)\bigg|_{q = q(P,Q)} = K(Q)$$

то полученные уравнения легко интегрируются в новых координатах. Последнее уравнение называется уравнением Гамильтона-Якоби. В более общем случае уравнением Гамильтона-Якоби называется любое уравнение на производящую функцию канонической замены, приводящей рассматриваемый гамильтониан к некоторому требуемому виду.
Пример. Пусть $H(p, q) = p^2/2 + \mu \sin q$. Найдем каноническую замену такую, что в новых координатах $K(P, Q) = P^2/2 + \mu^2 K_1(P, Q)$, т.е. в новых

координатах малое возмущение будет иметь второй порядок малости вместо первого. Будем искать замену, которая бы при $\mu = 0$ была тождественной. Пусть

$$S(P, q) = Pq + \mu S_1(P, q)$$

Тогда

$$p = P + \mu \frac{\partial S_1}{\partial q}, \quad Q = q + \mu \frac{\partial S_1}{\partial P}$$

В новых координатах гамильтониан записывается следующим образом

$$K = \frac{1}{2}\left(P + \mu \frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 + \mu \sin q$$

Чтобы получить K в виде функции от P и Q надо выразить $q = q(P, Q)$. Видно, что если $S_1 = 1/P \cdot \cos q$, то в K не будут входить слагаемые порядка μ.

Отметим, что замена определена не всюду. Тем не менее, для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно малое $\mu > 0$, что близкая к тождественной замена $(p, q) \mapsto (P, Q)$ определена и взаимнооднозначна при всех Q и $|P| > \varepsilon$.