11 Вполне интегрируемые системы

Пусть (M, ω, H) — гамильтонова система с n степенями свободы, т.е. $\dim(M) = 2n$. Пусть $F_1, \dots F_n\colon M \to \mathbb{R}$ — первые интегралы этой системы, причем скобка Пуассона любых двух первых интегралов равна нулю $\{F_i, F_j\} = 0$. Пусть

$$M_c = \{(p, q) \in M\colon F_i(p, q) = c_i, i = 1, \dots n\}$$

Теорема (Лиувилль-Арнольд). Пусть формы dF_i линейно независимы в каждой точке M_c, тогда

1. M_c — гладкое многообразие инвариантное относительно фазового потока гамильтоновой системы
2. Каждая компактная компонента связности M_c диффеоморфна n-мерному тору
3. В некоторых угловых координатах $\varphi_1, \dots \varphi_n$ уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{\varphi} = \nu(c)$, где $\nu(c)$ — постоянный вектор.

Системы, удовлетворяющие условиям этой теоремы называются вполне интегрируемыми системами (для краткости часто говорят просто «интегрируемые системы»).
Примеры интегрируемых систем. Рассмотрим движение твердого тела в поле силы тяжести. Считаем, что одна из точек твердого тела неподвижна. Пусть r_1, r_2, r_3 — координаты центра масс в главных осях инерции твердого тела (относительно неподвижной точки), а I_1, I_2, I_3 — моменты инерции относительно этих осей. Тогда при следующих значениях параметров r_1, r_2, r_3 и I_1, I_2, I_3 система будет интегрируемой

1. Случай Эйлера: $r_1 = r_2 = r_3 = 0$
2. Случай Лагранжа: $I_1 = I_2$, $r_1 = r_2 = 0$
3. Случай Ковалевской: $I_1 = I_2 = 2I_3$, $r_3 = 0$

Далеко не все системы являются интегрируемыми. Пусть $H(p, q) = T(p, q) + V(q)$ — гамильтониан системы с двумя степенями свободы, т.е. $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$, где M — замкнутое ориентируемое аналитическое двумерное многообразие (сфера с $\varkappa$ ручками). Пусть при каждом q функция $T(p, q)$ является квадратичной формой на $T^*_q M$ и функции T и V аналитичны на T^*M и M
Теорема (В.В. Козлов) Если род $\varkappa$ поверхности M не равен 0 или 1, то гамильтонова система не имеет на T^*M аналитического первого интеграла, который был бы независим от интеграла энергии H.

12 Переменные «действие-угол»

Во вполне интегрируемых можно ввести специальные координаты I, φ, называемые переменными «действие-угол», обладающие следующими свойствами

1. $dp \wedge dq = dI \wedge d\varphi$
2. $H = H(I)$
3. φ — угловые координаты

Опишем процесс построения переменных «действие-угол» в случае системы с одной степенью свободы. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой определена функция $H\colon D \to \mathbb{R}$ (гамильтониан). Будем рассматривать автономную гамильтонову систему $(D, dp \wedge dq, H)$. Предположим, что уравнение $H(p,q) = h$ задает при $h \in (a,b)$ замкнутые кривые в D, которые мы обозначим γ_h

$$\gamma_h = \{p, q\colon H(p,q) = h\}$$

Определим функцию $I\colon (a,b) \to \mathbb{R}$

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_h} p dq$$

По формуле Стокса получаем, что $I(h)$ это площадь, ограниченная кривой γ_h, деленная на 2π.

Будем считать, что функция Гамильтона достаточно регулярна в точках, в которых $H(p,q) = h$ и $h \in (a,b)$. Под этим мы будем подразумевать, что

1. $\frac{\partial I}{\partial h} \neq 0$ при $h \in (a,b)$
2. Все решения уравнения $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ в области $a < H(p,q) < b$ располагаются на конечном числе непересекающихся кривых, каждая из которых пересекает γ_h ровно в одной точке при всех $h \in (a,b)$.

Итак, в области $a < H(p,q) < b$ у нас есть координаты p, q и некоторая функция $I(p,q)$. Найдем такую функцию $\varphi(p,q)$ в этой области, что I, φ будут каноническими координатами, т.е. $dp \wedge dq = dI \wedge d\varphi$.

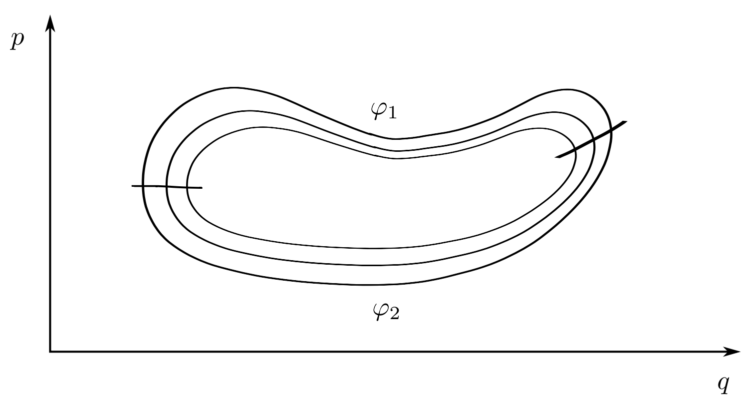

Рис. 1: Построение переменных «действие-угол» в простейшем случае.

Найдем производящую функцию $S(q, I)$ канонической замены

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}.$$

Поскольку I есть функция от h, и $H(p, q) = h$, то I — функция от p и q

$$I = I(h) = I(H(p, q))$$

Выразим из этого уравнения p через q и I. Для этого достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{\partial I}{\partial h} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$$

Это условие выполнено всюду, кроме точек, в которых $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$. Рассмотрим область между двумя такими кривыми. В ней можно выразить $p = p(q, I)$. Положим

$$S(q, I) = \int p(q, I)\, dq + C(I)$$

Тогда

$$\varphi(p, q) = \frac{\partial S}{\partial I}\Big|_{I = I(p,q)} + c(I)\big|_{I = I(p,q)}, \qquad c(I) = \frac{\partial C(I)}{\partial I}$$

Покажем, что I и φ действительно являются координатами в рассматриваемой области. Для этого надо показать, что различным точкам в области соответсвуют различные I и φ. Пусть точки лежат на одной кривой γ_h, т.е. I фиксировано (если они лежат на разных кривых — нечего доказывать).

$$\varphi(p_2, q_2) - \varphi(p_1, q_1) = \frac{\partial}{\partial I} \int\limits_{q_1}^{q_2} p(q, I)\, dq = \int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{\partial p(q, I)}{\partial I}\, dq \neq 0.$$

Выполнение последнего «неравенства» следует из того, что $\frac{\partial I}{\partial p}(p, q) \neq 0$ при всех $q \in (q_1, q_2)$.

Аналогичные построения можно произвести во всех областях, разделенных соответствующими кривыми. В каждой области получим

$$\varphi_j(p, q) = \frac{\partial S_j}{\partial I}\Big|_{I = I(p,q)} + c_j(I)\big|_{I = I(p,q)}$$

где $1 \leqslant j \leqslant N$ и N — число рассматриваемых областей. Положим $c_1 = 0$, а остальные функции c_j выберем таким образом, чтобы переход от φ_j к φ_{j+1} был непрерывным при $N - 1 \geqslant j \geqslant 1$. Посмотрим, какое приращение получит переменная φ при обходе кривой γ_h

$$\Delta\varphi = \int\limits_{\gamma_h} d\varphi = \frac{\partial}{\partial I} \int\limits_{\gamma_h} p dq = 2\pi$$

Т.е. φ — угловая переменная с периодом 2π.
Пример. Переменные «действие-угол» для гармонического осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

Можно проверить, что формулы

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \cos\varphi, \quad p = \sqrt{2I\omega} \sin\varphi$$

задают требуемую каноническую замену.