13 Усреднение

Общая идея теории усреднения может быть изложена следующим образом. Пусть у нас есть система

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varepsilon), \quad \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi)$$

здесь $I \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \mathbb{T}^k$. Рассмотрим также «усредненную» систему

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J), \quad \bar{g}(J) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_0^{2\pi} g(J, \varphi)\, d\varphi.$$

Можно ожидать, что в некоторых случаях решения первоначальной системы $I(t)$ близки к решениям $J(t)$ (при одинаковых начальных условиях). В общем случае, конечно, это не так, что показывает следующий

Пример (Арнольд). Пусть дана система

$$\dot{I}_1 = \varepsilon, \quad \dot{I}_2 = 2\varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2$$

После усреднения имеем систему

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \quad \dot{J}_2 = 0.$$

Их решения при $I_1(0) = 1$, $I_1(0) = 1$, $\varphi_1(0) = \pi/3$, $\varphi_2(0) = 0$: $J_1 = \varepsilon t + 1$, $J_2 = 1$, $I_1 = 1 + \varepsilon t$, $I_2 = 1 + \varepsilon t$, $\varphi_1 = \pi/3 + \int I_1\, dt$, $\varphi_2 = \int I_2\, dt$. На временах порядка $1/\varepsilon$ решения будут отличаться на величину порядка единицы.

Лемма Гронуола. Пусть $a, b, c, t > 0$ и

$$|\dot{z}| \leqslant a|z| + b$$

и $|z(0)| < c$. Тогда

$$|z(t)| \leqslant (c + bt)e^{at}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\dot{y} = ay + b$ с начальным условием $y(0) = c$. Решение этого уравнения $y = (c + b/a - b/a \cdot e^{-at})e^{at}$. Поэтому $y \leqslant (c + bt)e^{at}$. В свою очередь, $|\dot{z}| \leqslant \dot{y}$ □

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon g(I, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi) \end{aligned}$$

Здесь $\varphi \in S^1$ — угловая переменная, $I \in G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Рассмотрим усредненную систему

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J)$$

$$\bar{g}(J) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(J, \varphi)\, d\varphi$$

Обозначим через $I(t)$, $\varphi(t)$ решение неустредненной системы с начальным условием $I(0)$, $\varphi(0)$ и через $J(t)$ решение усредненной системы с тем же начальным условием $J(0) = I(0)$

Теорема. Пусть

1. Функции ω, f, g определены, когда $I \in G$ и в G ограничены до производных второго порядка включительно

$$\|f\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1, \quad \|g\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1, \|\omega\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1$$

здесь

$$\|f\|_{C^2(G\times S^1)} = \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} |f| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial f}{\partial I}\right| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial I^2}\right| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial I \partial \varphi}\right|$$

2. В области G выполнено $\omega(I) > c > 0$

3. При $0 \leqslant t \leqslant 1/t$ точка $J(t)$ принадлежит G с окрестностью d

$$J(t) \in G - d$$

Тогда при достаточно малом ε для всех $0 \leqslant t \leqslant 1/t$

$$|I(t) - J(t)| < \varkappa(c, c_1, d)\varepsilon$$

Доказательство. Сделаем замену (точнее, пока что просто рассмотрим такую функцию P — нам надо будет еще доказать, что при малых ε она будет задавать замену переменных)

$$I \mapsto P = I + \varepsilon k(I, \varphi)$$

Вдоль решений имеем

$$\dot{P} = \dot{I} + \varepsilon \frac{\partial k}{\partial I}\dot{I} + \varepsilon\frac{\partial k}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \varepsilon\left[g(I,\varphi) + \frac{\partial k}{\partial \varphi}\omega(I)\right] + \varepsilon^2\frac{\partial k}{\partial I}g + \varepsilon^2\frac{\partial k}{\partial \varphi}f$$

Общая идея состоит в том, чтобы с помощью функции k сделать выражение в квадратных скобках похожим на случай усредненной системы. Тогда P будет близко к J, а также P близко к I (по построению). Придадим этим рассуждениям строгий смысл.

Положим во всех точках $I \in G - \alpha$, для некоторого $\alpha > 0$

$$k(I, \varphi) = -\frac{1}{\omega(I)} \int\limits_0^{\varphi} (g(I,\varphi) - \bar{g}(I))\, d\varphi$$

Из условий 1) и 2) получаем, что $\|k\|_{C^2((G-\alpha)\times S^1)} < c_2(c, c_1)$ (c_2 можно выбрать так, что она не зависит от α — достаточно выбрать c_2 для $\alpha = 0$). Покажем, что при достаточно малых ε отображение $I \mapsto P = I + \varepsilon k(I, \varphi)$ является диффеоморфизмом области $G - \alpha$ и ее образа $P(G - \alpha)$ (переменную φ здесь считаем параметром).

Функция k в области $G - \alpha$ липшецева с некоторой константой L, зависящей от α и c_2. Пусть I_1 и I_2 — две точки в $G - \alpha$.

$$|P(I_1) - P(I_2)| = |I_1 - I_2 + \varepsilon(k(I_1) - k(I_2))| \neq 0$$

при достаточно малых ε (следует из липшецевости k). Считаем также, что ε настолько мало, что никакая точка из $G - \alpha$ не сдвигается отображением $P(I)$ более, чем на α и в $G - 2\alpha$ определено обратное отображение $I(P)$, т.е. можно записать

$$I = P + \varepsilon h(P, \varphi, \varepsilon).$$

Притом при всех достаточно малых ε выполнена оценка $\|h\|_{C^2((G-2\alpha)\times S^1)} < c_3(c_2, \alpha) = c_3(c, c_1, \alpha)$.

Таким образом, в области $G - 2\alpha$ имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{P} = \varepsilon\bar{g}(P) + R(P, \varphi).$$

Притом при малых ε

$$\|R\|_{C^2((G-2\alpha)\times S^1)} < c_5(c_1, c_2, c_3)\varepsilon^2 = c_5(c, c_1, \alpha)\varepsilon^2.$$

Пусть теперь $\alpha = d/3$. Рассмотрим уравнение $\dot{J} = \varepsilon\bar{g}(J)$ в $G - d$. Пусть $J(0)$ — его начальное условие. Тогда $P(J(0)) = P(0) \in G - 2\alpha$. Пусть $z(t) = P(t) - J(t)$, где $P(t)$ и $\varphi(t)$ — решение соответствующего уравнения с начальными условиями $P(0)$ и $\varphi(0)$. Можно записать

$$\dot{z} = \varepsilon(\bar{g}(P) - \bar{g}(J)) + R(P, \varphi).$$

Если отрезок $[P, J]$ лежит в $G - 2\alpha$, то

$$|\bar{g}(P) - \bar{g}(J)| \leqslant \sup_{I \in G - 2\alpha} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial I} \right\| |z|$$

В таком случае можем записать

$$|\dot{z}| \leqslant \varepsilon c_6(c_1)|z| + c_5\varepsilon^2$$

Из леммы Гронуола

$$|z(t)| < (\varepsilon c_2(c, c_1) + c_5(c, c_1, d)\varepsilon^2 t)e^{c_6(c_1)\varepsilon t}$$

Получаем, что при $t \leqslant 1/\varepsilon$ выполнено $|z(t)| < c_7(c, c_1, d)$. Поскольку $|P(t) - I(t)| < \varepsilon c_2(c, c_1)$, то

$$|I(t) - J(t)| < \varepsilon\varkappa(c, c_1, d)$$

Что завершает доказательство $\square$

Эта теорема дает лучшую возможную оценку. Рассмотрим систему

$$\dot{I} = \varepsilon \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = 1$$

После усреднения получим

$$\dot{J} = 0$$

Решение точной системы: $I(t) = I(0) - \varepsilon \cos(\varphi(0) + t)$. Решение усредненной системы: $J(t) = I(0)$.