17 Различные версии КАМ теоремы

Определение. Вектор частот $\omega \in \mathbb{R}^n$ называется диофантовым, если существуют $c, \gamma > 0$ такие, что для всех $k \neq 0$

$$|\langle k, \omega\rangle| > c/|k|^\gamma$$

Будем говорить, что $\omega \in \mathscr{D}(c,\gamma)$, если ω диофантов с параметрами c, γ. Видно, что резонанстный вектор обязательно является недиофантовым.
Утверждение. Почти все векторы частот — диофантовы.
Доказательство. Рассмотрим случай $n = 2$. Положим $c \in (0,1)$ и $\gamma > 1$. Будем обозначать $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Заметим, что если вектор ω является диофантовым, то и $\lambda\omega$, $\lambda \neq 0$ — тоже (с другой константой c), поэтому достаточно рассмотреть вектора, лежащие на прямой $\omega_2 = 1$. Тогда ω_1 не является диофантовым вектором, если для некоторого ненулевого k выполнено неравенство

$$|k_1\omega_1 + k_2| < c/|k|^\gamma$$

Если k фиксировано, то обозначим через $L(k)$ меру тех ω_1, для которых выполняется неравенство выше. Элементарно рассматриваются следующие случаи:

- Если $k_1 > 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 > 0$, т.е. $\omega_1 > -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 < (c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.
- Если $k_1 > 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 < 0$, т.е. $\omega_1 < -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 > (-c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.
- Если $k_1 < 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 > 0$, т.е. $\omega_1 < -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 > (c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.
- Если $k_1 < 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 < 0$, т.е. $\omega_1 > -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 < (-c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.

Во всех случаях, когда $k_1 \neq 0$, мы получаем $L(k) = 2c/|k_1||k|^\gamma$. Поскольку при $k_1 = 0$ имеем $L(k) = 0$ (мы так выбрали c и γ), то

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^2} L(k) \leqslant \sum_{k_1\neq 0,\, k_2} 2c/|k_1||k|^\gamma$$

Можно показать, что этот ряд сходится, поэтому

$$\operatorname{meas}\left(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{c>0} \mathscr{D}(c,\gamma)\right) = 0$$

Чтобы показать, что ряд сходится, покажем, что для некоторой постоянной $C = C(\gamma)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} < C\frac{1}{|k_1|^{\gamma-1}}$$

Покажем, что это действительно так.

$$\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} = \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2\sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} \leqslant \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2\int\limits_0^\infty \frac{dk_2}{(k_1^2+k_2^2)^{\gamma/2}}$$
$$\leqslant \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2^{1+\gamma/2}\int\limits_0^\infty \frac{dk_2}{(|k_1|+k_2)^\gamma} = \frac{1}{|k_1|^\gamma} + \frac{2^{1+\gamma/2}}{\gamma-1}\frac{1}{|k_1|^{\gamma-1}}$$

Утверждение о том, что почти все вектора являются диофантовыми остается верным и в случае произвольного n.

Теорема (Колмогоров, Арнольд). Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varepsilon, \varepsilon)$$

здесь $\varphi \in \mathbb{T}^n$, $I \in D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $I_0 \in D$ и

1. Вектор $\omega(I_0)$ диофантов
2. Невозмущенная система невырождена на I_0, т.е.
$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right)\Big|_{I=I_0} \neq 0$$
3. Функция H вещественно-аналитична в окрестности тора I_0.

Тогда инвариантный тор I_0 невозмущенной системы при достаточно малом возмущении не разрушится, а лишь слегка деформируется и движение на нем по-прежнему будет условно периодическим с частотами $\omega(I_0)$.

Неавтономный вариант теоремы. Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t, \varepsilon)$$

(I, φ) — канонические переменные, $I \in D \subset \mathbb{R}^n$, φ — угловая переменная. H зависит 2π-периодическим образом от t. Пусть $I_0 \in D$ таково, что

1. Вектор $\bar{\omega} = \begin{pmatrix}\omega(I_0)\\ 1\end{pmatrix}$ диофантов
2. Невозмущенная система невырождена на I_0
3. Функция H вещественно-аналитична в окрестности тора I_0.

Тогда инвариантный тор I_0 невозмущенной системы при достаточно малом возмущении не разрушится, а лишь слегка деформируется и движение на нем по-прежнему будет условно периодическим с частотами $\bar{\omega}(I_0)$.

Доказательство. Рассмотрим новую гмильтонову систему с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = H + E$$

здесь E — новая переменная «действие», канонически сопряженная углу t. Без потери общности будем считать, что $I_0 = 0$. Система с гамильтонианом $\mathscr{H}$ вырождена при $I_0 = 0$ и $E = 0$. Рассмотрим систему с гамильтонианом $e^{\mathscr{H}}$. Траектории ее решений совпадают с траекториями решений системы с гамильтонианом $\mathscr{H}$, но проходятся с другой скоростью (показать). При этом система с гамильтонианом $e^{\mathscr{H}}$ уже будет невырожденной. Действительно,

$$
\begin{aligned}
e^{H_0+E} &= \exp\left(H_0(I_0) + \langle\omega, I\rangle + \frac{1}{2}\langle\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0)I, I\rangle + E + O(|I|^3)\right) \\
&= e^h\left(1 + \langle\omega, I\rangle + E + \frac{1}{2}\langle\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0)I, I\rangle + \frac{1}{2}(E + \langle\omega, I\rangle)^2 + O((|I| + |E|)^3)\right)
\end{aligned}
$$

Получаем

$$\det\frac{\partial^2 e^{H_0+E}}{\partial(I,E)^2}(I_0, E) = \det\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0) \neq 0$$

Таким образом, можно применить предыдущую теорему.

Изоэнергетический вариант теоремы. Пусть инвариантный тор I_0 невозмущенной системы лежит на уровне энергии $H_0 = h$ и выполнены следующие условия

1. Частоты $\omega(I_0)$ диофантовы

2. Невозмущенная система на этом торе изоэнергетически невырождена, т.е.
$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0) & \omega(I_0) \\ \omega^T(I_0) & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

3. Функция H вещественно-аналитическая

Тогда при достаточно малых ε на уровне энергии $H = h$ возмущенноц системы имеется ивариантный тор, который близок к невозмущенному, а частоты движения по нему задаются формулой $\bar{\omega} = (1 + O(\varepsilon))\omega$.

Если размерность фазового пространства больше 4, то инвариантные торы не разделяют его и даже при сохранении большинства инвариантных торов возможна «диффузия» переменных действия, т.е. траектория решения может покинуть окрестность инвариантного тора при сколь угодно малом возмущении.

Пример (Арнольд). Рассмотрим систему с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$

$$H_0 = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2), \quad \varepsilon H_1 = \varepsilon(\cos\varphi_1 - 1)(1 + \mu\beta), \quad \beta = \sin\varphi_2 + \cos t$$

Теорема. Пусть $0 < A < B$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\mu_0 > 0$ такое, что при $0 < \mu < \mu_0$ система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ неустойчива: существует траектория, соединяющая область $I_2 < A$ с областью $I_2 > B$.