18 Расщепление сепаратрис

Сначала напомним, что такое отображение Пуанкаре. Пусть рассматривается произвольная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M$$

Пусть $\gamma(t)$ — некоторое периодическое решение. Рассмотрим некоторую гиперповерхность $\Sigma \subset M$ такую, что γ пересекает ее трансверсально (т.е. не касается ее)

Для некоторой точки $x \in \Sigma$ рассмотрим решение, выходящее из нее. Предположим, что это решение возвращается на Σ. Тогда положим $P(x) = y$, где $y \in \Sigma$ — точка, в которую возвращается это решение в первый раз. Отображение P называется *отображением Пуанкаре*. Здесь $x_0 \in \Sigma$ — неподвижная точка отображения Пуанкаре, соответствующая первоначальному периодическому решению: $P(x_0) = x_0$.

Ясно, что P корректно определено в достаточно малой окрестности точки x_0: $P\colon O(x_0) \to \Sigma$. Переход от непрерывной динамической системы к дискретной иногда может быть удобен (например, для исследования устойчивости). Однако могут возникнуть трудности — $P^k(x)$ может не принадлежать $O(x_0)$, $x \in O(x_0)$ при некотором достаточно большом k.

В некоторых системах этой трудности можно избежать. Пусть система T-периодична по t:

$$\dot{x} = v(x,t), \quad x \in M$$

В таком случае корректно определено отображение за период (наличие какого-либо периодического решения, вообще говоря, не требуется):

$$P(x_0) = x(x_0, T)$$

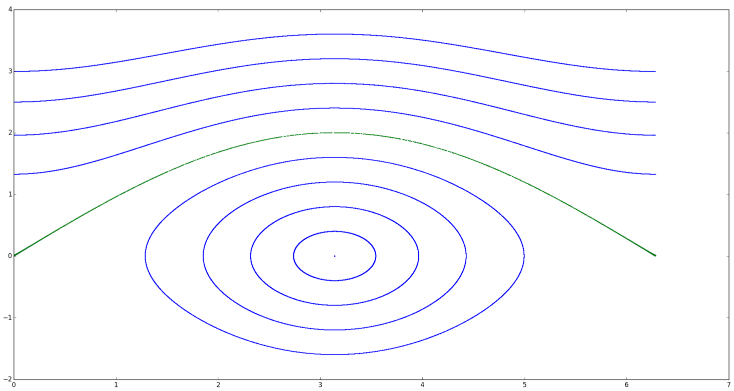
т.е. рассмотрим момент времени $t = 0$ и выберем произвольную точку $x_0 \in M$; $x(x_0,t)$ — решение, выходящее из этой точки; за период мы фактически вернемся на ту же самую гиперповерхность M в расширенном фазовом пространстве (с учетом периодичности системы по времени). Если $P(x_0) = x(x_0, T) = x_0$, то из точки x_0 выходит T-периодическое решение.

Рассмотрим конкретную систему с полутора степенями свободы (т.е. одна степень свободы + периодический по времени гамильтониан)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (p,q) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Считаем, что $H = H_0(p,q) + \varepsilon H_1(p,q,t) = \frac{1}{2}p^2 + \Omega \cos q + \varepsilon\theta(t)\cos q$ (2π-периодический по t).

Эта система описывает динамику маятника с колеблющейся точкой подвеса. Если $\varepsilon = 0$, то мы имеем обычную систему — маятник. Известно, что ее фазовый портрет имеет следующий вид (сепаратриса выделена цветом):



Множество, образуемое сепаратрисами в расширенном фазовом пространстве образует некоторую поверхность. Пусть W_0^s — поверхность, образованная сепаратрисами в расширенном фазовом пространстве. Пусть p_0, q_0, t_0 принадлежит W_0^s, тогда решение, выходящее из этой точки, стремится к $p = q = 0$ при $t \to +\infty$. Т.е. W_0^s является асимптотической поверхностью нашего периодического решения. Индекс «s» означает, что это «устойчивая» асимптотическая поверхность (stable). Здесь слово «устойчивость» понимается не в смысле Ляпунова, а означает, что решения, начинающиеся на W_0^s стремятся к $p = q = 0$ при $t \to +\infty$. Асимптотическая поверхность W_0^u называется «неустойчивой», когда любое решение, начинающееся на ней, стремится к $p = q = 0$ при $t \to -\infty$ (т.е. при обращении времени).

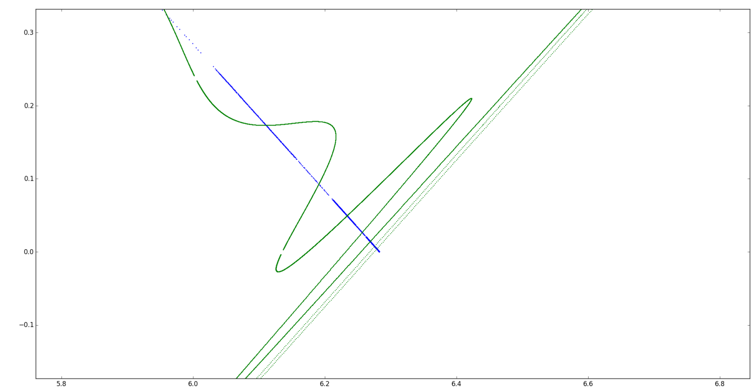
Пусть $x_0 = (p_0 = 0, q_0 = 0)$, тогда $P(x_0) = 0$. Если мы рассмотрим отображение Пуанкаре в окрестности точки x_0, то можно записать

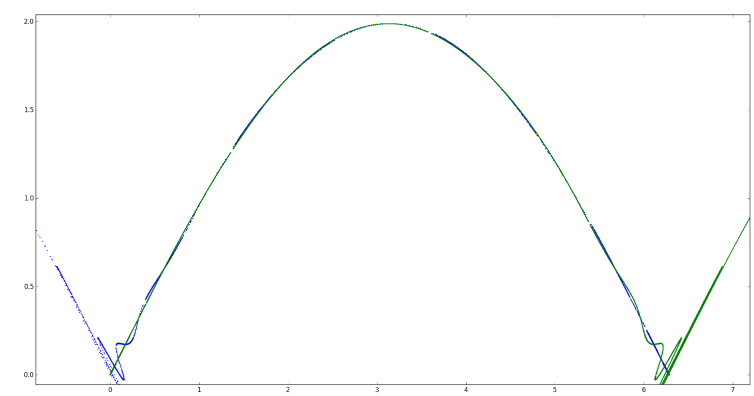
$$P(x) = 0 + Mx + o(|x|)$$

здесь M — матрица 2×2. Ее собственные значения (мультипликаторы) характеризуют динамику в окрестности париодичекой траектории (в линейном приближении). Периодическое решение называется гиперболическим, если оба его мультипликатора лежат вне едининчного круга и действительны.

У возмущенной системы ($\varepsilon \neq 0$) также будет существовать гиперболическое периодическое решение (это верно и в общем случае при малых ε). Можно показать (теорема Адамара-Перрона), что в окрестности периодического решения будут существовать устойчивое и неустойчивое асимптотическое многообразия $W_\varepsilon^{s,u}$, близкие к невозмущенным $W_0^{s,u}$. Их можно продожить до поверхностей, которые определены не только в окрестности решения, которые мы также обозначим $W_\varepsilon^{s,u}$. Если $W_0^s = W_0^u$, то, вообще говоря, может быть, что $W_\varepsilon^s \neq W_\varepsilon^u$.

Изобразим сечение $W_\varepsilon^{s,u}$ плоскостью $t = 0$. Достаточно сложный вид асимптотических поверхностей в окрестности периодического решения обусловлен тем, что отображение Пуанкаре сохраняет площади (сохраняет форму $dp \wedge dq$).





В частности, видно, что W^s_ε и W^u_ε могут не совпадать при $\varepsilon \neq 0$. Количественная оценка «расщепления» дается следующим утверждением

Утверждение. Пусть $\gamma(t) = (p(t), q(t))$ — решение уравнения при $\varepsilon = 0$ (сепаратриса). Можно считать, что $H_1(0,0,t) = 0$, поэтому следующий интеграл сходится

$$\mathscr{P}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_1(\gamma(t+\tau), t)\, dt$$

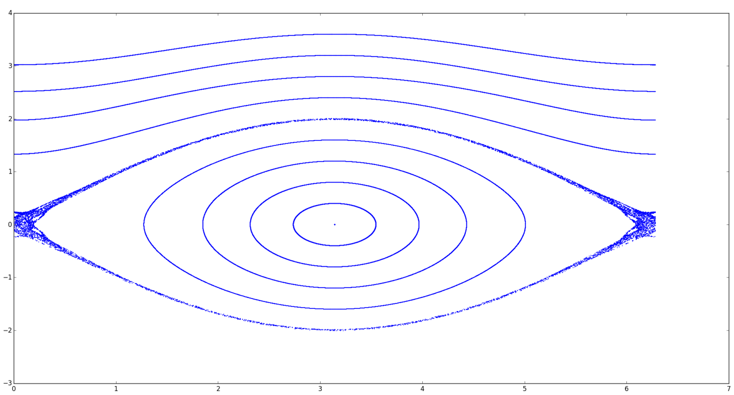
Несложно показать, что

$$\frac{d\mathscr{P}}{d\tau} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}(\gamma(t+\tau), t)\, dt$$

Пусть τ_1, τ_2 — две последовательные невырожденные критические точки $\mathscr{P}$ (два простых последовательных нуля $\mathscr{P}'$), тогда площадь соответсвующей лунки

$$\mathscr{A}(\varepsilon) = |\varepsilon||\mathscr{P}(\tau_1) - \mathscr{P}(\tau_2)| + O(\varepsilon^2)$$

Расщепление сепаратрис является причиной зарождения хаотических траекторий в окрестности сепаратрисы:



Утвержедние. Пусть M^3 — трехмерное аналитическое многообразие, v — аналитическое векторное поле на M без положений равновесия. Пусть γ — гиперболическое периодическое решение $\dot{x} = v(x)$, W^s и W^u — устойчивая и неустойчивая асимптотическая поверхность к γ. Если W^s и W^u не совпадают и пересекаются, то система не допускает аналитического первого интеграла на M.

В частнсоти, задача о движении маятника в переменном поле — неинтегрируемая. Также неинтегрируема задача о движении спутника по орбите

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu$$

Динамика вихрей на плоскости описывается гамльтоновой системой

$$\Gamma_s\dot{x}_s = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \Gamma_s\dot{y}_s = \frac{\partial H}{\partial x_s}$$

где

$$H = \frac{1}{2\pi}\sum_{s\neq k}\Gamma_s\Gamma_k \ln\sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$

Методом расщепления сепаратрис можно доказать неинтегрируемость задачи о движении 4 вихрей. Метод расщепления асимптотических поверхностей также применим к задаче о плоских течениях однородной идеальной жидкости в потенциальном поле. Также может быть применим в задачах о движении точки в ограничееной выпуклой области (бильярд Биркгофа).