Конспект лекций
по курсу «Гамильтонова механика»

Иван Полехин

февраль–май 2017, МИАН

Содержание

1 Динамика системы точек и идеальные связи

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек в $\mathbb{R}^3$, на которые действуют некоторые силы. Пусть $r_i \in \mathbb{R}^3$ — радиус-вектор i-ой точки. Конфигурацию системы будем обозначать r: $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ — набор радиус-векторов всех точек. Предположим также, что движение точек не свободно, а подчинено некоторым условиям, которые имеют вид

$$f_j(r, t) = 0, \quad j = 1, ..., k \tag{1}$$

Здесь и далее все функции считаются дифференцируемыми нужное число раз. Такие связи называются *голономными*. Стандартный пример — конфигурационное пространство маятника $\mathbb{S}^2$, т.е. система состоит из одной точки и уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, где ρ — длина маятника. Если ρ является функцией времени t, то получаем маятник переменной длины. В дальнейшем считаем, что при всех t уравнения связи задают гладкие многообразия M_t, причем топология этих многообразий не изменяется и они все диффеоморфны некоторому многоообразию M (как в примере с маятником переменной длины). Многообразие M — *конфигурационное пространство* системы.

Если все уравнения связей независимы, т.е.

$$rank\frac{\partial(f_1, ..., f_k)}{\partial(x_1, ..., z_n)} = k, \quad \text{в точках, где } f_1 = ... = f_k = 0$$

то $dim(M) = 3n - k$, т.е. локально $3n$ величин $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ выражаются через $3n - k$ параметров, которые мы обозначим q_j и будем называть *локальными координатами*. Например, в случае маятника $dim(M) = 2$ и можно в качестве локальных координат выбрать стандартные сферические координаты или декартовы координаты одной из плоскостей, проходящей через точку подвеса маятника.

Для каждой точки рассмотрим следующие «величины»

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\delta q_1 + ... + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\delta q_n$$

Если считать время t параметром, то δr_i — это просто дифференциал функции r_i в координатах q_j (символ δ используется по традиции вместо

d, чтобы подчеркнуть, что время не рассматривается как еще одна координата). Говорят, что δr_i — *виртуальное перемещение* точки с номером i.

От кинематики перейдем к рассмотрению динамики системы. Предположим сначала, что рассматриваемые n точек свободны, т.е. забудем про уравнения связей. Движение точек тогда подчиняются дифференциальным уравнениям

$$m_j \ddot{r}_j = F_j(r, \dot{r}, t), \quad j = 1, ..., n$$

В таком случае, конечно, r_j могут не удовлетворять уравнениям связи (1). Систему можно так видоизменить, добавив к заданным силам F_j некоторые заранее неизвестные силы R_j (которые также могут зависеть от r, $\dot{r}$ и t), что решения системы

$$m_j \ddot{r}_j = F_j(r, \dot{r}, t) + R_j(r, \dot{r}, t), \quad j = 1, ..., n$$

будут удовлетворять уравнениям связи во все моменты времени (при условии, что начальные условия также согласованы со связями). Функции R_j называются *реакциями связей*. Можно показать, что все R_j могут быть выбраны такими, чтобы выполнялось [1] условие «работа сил реакции на любых виртуальных перемещениях равна нулю»

$$\sum_{i=1}^{n} \langle R_i, \delta r_i \rangle \equiv 0$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное «скалярное произведение» (напомним, что $r_i \in \mathbb{R}^3$). В таком случае дополнительно говорят, что *связи идеальны*.

Замечание. О неидеальных связях говорят в том случае, когда помимо геометрических условий $f_j = 0$ под связью понимают еще и ее физическую реализацию. Например, точка движется по некоторой поверхности без трения — связь идеальна. Если же точка движется с трением — говорят, что связь не является идеальной, хотя формально можно силу трения отнести к заданным силам F и опять же говорить об идеальных связях, но для другой силы F.

Пример. Рассмотрим плоский математический маятник единичной длины. Уравнение связи $x^2 + y^2 = 1$. В качестве локальной координаты выберем некоторый угол: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Связь идеальна, когда для силы

[1] С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев, Теоретическая механика — Москва: 432 с., 2010.

реакции R выполнено равенство $-\sin\varphi \cdot R_x + \cos\varphi \cdot R_y \equiv 0$, т.е. сила R параллельна радиус-вектору массивной точки маятника. Если маятник движется без трения, то это условие выполнено. Если маятник движется с трением (которое мы относим к силам реакции), то это условие не выполняется.

2 Уравнения Лагранжа

Пусть, как и выше, $q_1, ..., q_l$ — функции локальных координат на конфигурационном пространстве, l здесь равно $3n-k$. Скорости точек $\dot{r}_j$ можно выразить через обобщенные скорости $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_l$:

$$\dot{r}_j = \sum_i \frac{\partial r_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial r_j}{\partial t}$$

Кинетическая энергия системы может быть выражена следующим образом

$$T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{r}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_i b_i(q,t)\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2$$

Здесь

$$a_{ij} = \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial r_k}{\partial q_i}, \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \right\rangle, \quad b_i = \sum_j m_j \left\langle \frac{\partial r_j}{\partial q_i}, \frac{\partial r_j}{\partial t} \right\rangle$$

Утверждение. Функции q удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, ..., 3n-k$$

Здесь

$$Q_i = \sum_j \left\langle F_j, \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right\rangle$$

называются *обобщенными силами.*

Доказательство. Следует сразу из определения идеальных связей, если показать, что

$$\sum_j \left\langle m_j \ddot{r}_j, \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right\rangle = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

В свою очередь, это равенство следует из того, что

$$\frac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_j}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial q_i}$$

Замечание. Q_i задают компоненты ковекторного поля (проверьте). Если записать уравнения Лагранжа как соотношения на вектора, то получим уравнение $\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = Q$, где Q — вектор обобщенных сил, полученный из ковектора с компонентами Q_i с помощью «кинетической метрики» $ds^2 = \sum\limits_{i,j} a_{ij} dq_i dq_j$. В частности, свободное движение ($Q \equiv 0$) — движение по геодезическим [2].

Если силы потенциальны, т.е. существует функция положения частиц $V(r,t)$ такая, что

$$F_j = \frac{\partial V}{\partial r_j}$$

то уравнения Лагранжа принимают еще более простой вид (здесь $L = T + V$ — функция Лагранжа или лагранжиан)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, ..., 3n-k$$

Эти же уравнения можно получить и другим способом.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^l$ — область. $L\colon TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторый лагранжиан (произвольная функция на касательном пространстве TM, которая, возможно, зависит от времени). Пусть $q_0, q_1 \in M$, $t_0 < t_1$; Ω — множество гладких кривых $\gamma\colon [t_0, t_1] \to M$, $\gamma(t_0) = q_0$, $\gamma(t_1) = q_1$. *Действием* называется следующий функционал

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt$$

Вариацией кривой γ с закрепленными концами называется гладкое (по t и по ε в окрестности нуля) семейство кривых $\gamma + \varepsilon\eta \in \Omega$ и $\eta(t_0) = 0$, $\eta(t_1) = 0$. Для заданной вариации $\gamma + \varepsilon\eta$ величина

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{L}(\gamma + \varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = \delta\mathscr{L}(\gamma)$$

[2] Про ковариантное дифференцирование можно прочитать в Дж. Милнор, Теория Морса — Москва: 184 с., 1965.

называется *вариацией функционала.* Кривая γ называется экстремалью функционала $\mathscr{L}$, если $\delta\mathscr{L}(\gamma) = 0$ для любой вариации $\gamma + \varepsilon\eta \in \Omega$.
Утверждение. Кривая γ — экстремаль $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа.
Доказательство. Упражнение — используйте дифференцирование по частям и произвольность выбора η.
Замечание. Мы рассмотрели вывод уравнений «в локальных координатах», но он переносится и на случай, когда M — конфигурационное многообразие.

3 Уравнения Гамильтона

Пусть нам дан лагранжиан L, значение которого в точке касательного пространства q, $\dot{q}$ в момент времени t есть $L(q, \dot{q}, t)$. Построим новую функцию H (на кокасательном пространстве) следующим образом

$$H(q, p, t) = (p\dot{q} - L)\big|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}$$

где p и $\dot{q}$ связаны уравнением

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Такой переход от функции L к функции H называется *преобразованием Лежандра.*
Замечание. Преобразование Лежандра можно производить и для более широкого класса функций, чем лагранжианы механических систем. В задачах механики выразить $\dot{q}$ через q, p и t всегда возможно (ввиду положительной определенности кинетической метрики).
Замечание. Пусть $f(x)$ — некоторая выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Ее преобразованием Лежандра называется другая функция $h(y)$, которая строится следующим образом: для заданного y значение $h(y)$ есть максимум по x величины $xy - f(x)$. Можно показать инволютивность преобразования Лежандра, т.е. показать, что дважды примененное преобразование Лежандра есть тождественное преобразование. Рассмотрим функцию $F(x, y) = yx - h(y)$. Для заданного y эта функция линейна по x. Если для заданного y в качестве x взять значение $x^* = x^*(y)$, при котором $xy - f(x)$ максимально (т.е. $h(y) = x^*y - f(x^*)$ по определению преобразования Лежандра), то получим $F(x^*, y) = f(x^*)$, поскольку

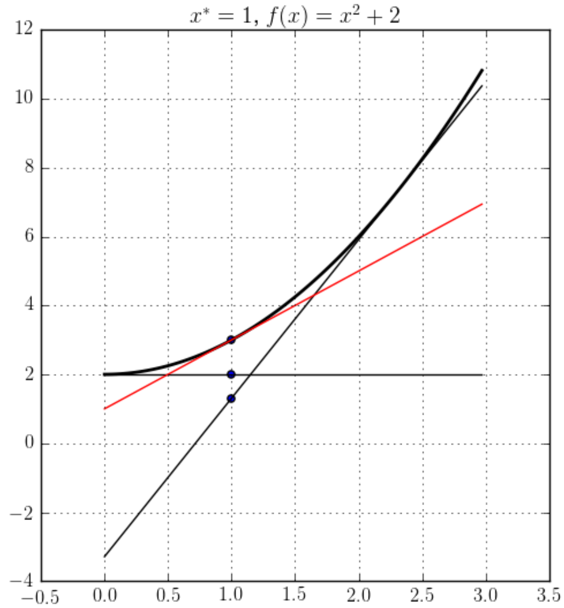


Рис. 1: Иллюстрация к доказательству инволютивности преобразования Лежандра. Красным цветом отмечена прямая, проходящая через точку $(x^*, f(x^*))$ и она доставляет максимум $f(x^*)$.

$F(x^*, y) = yx^* - h(y)$. Получаем, что для заданного y прямая $F(x, y)$ проходит через точку $(x^*, f(x^*))$. Пусть теперь точка x^* фиксирована. Найдем y, при котором $yx^* - h(y)$ максимально и найдем это максимальное значение. Из выпуклости f следует, что максимальное значение — $f(x^*)$ и достигается оно при $y = y(x^*)$. Чтобы это заметить, проведем прямую $F(x, y)$ (как функцию x, y — параметр); как мы показали, она расположена таким образом, что, во-первых, параллельна прямой yx, во-вторых, касается графика $f(x)$. Рассматривая всевозможные прямые, касающиеся графика $f(x)$, видим, что максимальное возможное значение вдоль этих прямых в точке $x = x^*$ достигается на прямой, проходящей через точку $(x^*, f(x^*))$ (и есть $f(x^*)$).

Из инволютивности следует, что

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Также из определения функции H видно (показать это), что

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}$$

Мы получили уравнения Гамильтона. При этом H — функция Гамильтона системы и T^*M — фазовое пространство.
Аналогично уравнениям Лагранжа, уравнения Гамильтона также могут быть сформулированы в вариационном виде.
Рассмотрим точки q_0 и q_1 пространства M и $t_0 < t_1$. Через Ω обозначим множество гладких кривых $\gamma\colon [t_0, t_1] \to T^*M$, $q(t_0) = q_0$ и $q(t_1) = q_1$. Определим функционал действия следующим образом

$$\mathscr{H}(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (p(t)\dot{q}(t) - H(q(t), p(t), t))\, dt$$

Для заданной кривой γ рассмотрим ее вариацию $\gamma + \varepsilon\eta$, $\eta = (q_\eta, p_\eta)$, притом считаем, что $q_\eta(t_0) = 0$ и $q_\eta(t_1) = 0$, но, вообще говоря, $p_\eta(t_0)$ и $p_\eta(t_1)$ могут быть ненулевыми, т.е. при варьировании кривой мы фиксируем только часть переменных.
Утверждение. Кривая γ является решением уравнений Гамильтона тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала $\mathscr{H}$.
Доказательство.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{H} = \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t_1} ((p(t)+\varepsilon p_\eta(t))(\dot{q}(t)+\varepsilon\dot{q}_\eta(t)) - H(q(t)+\varepsilon q_\eta(t), p(t)+\varepsilon p_\eta(t), t))\, dt$$

Если рассмотреть подынтегральное выражение с точностью до величин порядка $o(\varepsilon^2)$, то получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{H}\Big|_{\varepsilon=0} &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(p_\eta\dot{q} + \dot{q}_\eta p - \frac{\partial H}{\partial q}q_\eta - \frac{\partial H}{\partial p}p_\eta\right)\, dt \\ &= q_\eta p\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(p_\eta\dot{q} - q_\eta\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q}q_\eta - \frac{\partial H}{\partial p}p_\eta\right)\, dt\end{aligned}$$

Учитывая краевые условия и произвольность вариации, получаем, что экстремаль функционала удовлетворяет уравнениям Гамильтона. Доказательство в обратную сторону аналогично.

Замечание. Отметим, что в сравнении с вариационным выводом уравнений Лагранжа, мы использовали более широкий класс кривых (поскольку мы не предполагали, что кривые имеют закрепленные концы).

4 Принцип Мопертюи

Пусть гамильтониан системы не зависит от времени. Тогда несложно показать, что он является первым интегралом, т.е. не меняется вдоль решений
$$\frac{d}{dt}H = 0$$
Пусть M — конфигурационное пространство системы (для простоты — область в $\mathbb{R}^l$), тогда верно следующее

Утверждение (принцип Мопертюи). Пусть $q_0, q_1 \in M$ — фиксированные точки. Тогда кривая $\gamma : [a, b] \to M$ является *траекторией* решения системы с Гамильтонианом H при заданной энергии h тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала

$$\int\limits_{\gamma} pdq = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau)\dot{q}(\tau)d\tau$$

в классе путей γ с фиксированными концами и параметризованных так, что $H(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q) = h$.

Замечание. Параметр τ — не время, т.е. γ — не решение, а только кривая (траектория) решения на M.

Остановимся на одном геометрическом следствии этого принципа [3].

Определение. Многообразие M называется *римановым многообразием*, если в каждой его точке x задано скалярное произведение g_x (неотрицательная функция на $T_xM \times T_xM$ со значениями в $\mathbb{R}$, равная нулю только на нулевом векторе, симметричная и линейная по обоим аргументам) и такая, что для любых двух гладких векторных полей v, w функция $g_x(v(x), w(x))$ гладкая. Пара (M, g) — риманово многообразие, g — метрика.

[3]Доказательство принципа Мопертюи можно найти, например, в В.И. Арнольд, Математические методы классической механики — Москва: 416 с., 2003.

Пусть M — конфигурационное пространство и $H = T - V$ не зависит от времени. Здесь T и V имеют следующий вид

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad V = V(q)$$

Т.е. ds^2 — метрика, задаваемая кинетической энергией. Из принципа Мопертюи получаем

Следствие. Траектории системы с гамильтонианом $H = T - V$ для заданной полной энергии $H = h$ в области $V > -h$ есть геодезические (т.е. экстремали длины) метрики

$$d\rho^2 = (h + V)ds^2$$

Доказательство. Вдоль кривой должен быть выбран такой параметр, чтобы выполнялось $T = h + V$, т.е. для «нового времени» τ должно быть выполнено

$$d\tau = ds/\sqrt{2(h+V)}$$

Поскольку $L = T + V$, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T$$

Получаем

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\,d\tau = \int\limits_{\gamma} \frac{2T}{\sqrt{2(h+V)}}\frac{ds}{d\tau}d\tau = \int\limits_{\gamma} \sqrt{2(h+V)}\,ds = \sqrt{2}\int\limits_{\gamma} d\rho$$

Принцип Мопертюи важен тем, что позволяет сводить задачи механики к чисто геометрическим задачам римановой или финслеровой геометрии. В качестве показательного примера можно рассмотреть двойной маятник в поле силы тяжести. Его положение задается двумя углами, поэтому конфигурационное пространство — двумерный тор. Если h достаточно велико, то область $V > -h$ есть весь этот тор.

В римановой геометрии доказывается (теорема Хопфа-Ринова), что любые две точки замкнутого многообразия можно соединить кратчайшей геодезической [4]. Из этого получаем, что маятник можно перевести

[4] Дж. Милнор, Теория Морса — Москва: 184 с., 1965.

из любого положения в любое заданное, если выбрать подходящим образом его начальную скорость.

Аналогично можно показать существование периодических решений для двойного маятника. Это следует из существования гладких замкнутых геодезических на соответствующем двумерном торе (формально, чтобы использовать этот результат, надо заново доказать утверждения данного раздела для случая гладких замкнутых путей вместо путей с фиксированными концами).

5 Перевернутый маятник

Проиллюстрируем применение общих математических результатов (теперь не геометрического характера, а топологического) на еще одном примере, относящемуся к динамике маятника.

Рассмотрим маятник длины l, состоящий из невесомого стержня и массивной точки массы m, совершающий движение в поле силы тяжести. Считаем, что точка подвеса маятника движется по заданному закону, задаваемому гладкой функцией времени $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, вдоль горизонтальной прямой. Таким образом, на движение маятника оказывает влияние закон движения точки подвеса и сила тяжести.

Через Oxy обозначим неподвижную систему декартовых координат, выбранную таким образом, что точка подвеса движется вдоль оси Ox, а ось Oy вертикальна и направлена противоположно силе тяжести. Угол между осью Ox и стержнем обозначим φ (углам $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ соответствуют горизонтальные положения маятника). Координаты x и y массивной точки выражаются через φ обычным образом

$$\begin{aligned} x &= f + l\sin\varphi \\ y &= l\cos\varphi \end{aligned}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{f}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Пусть g — ускорение свободного падения, тогда выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = mgy = mgl\cos\varphi$$

Получаем лагранжиан системы

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{f}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right) - mgl\cos\varphi$$

Уравнения, описывающие динамику системы, запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= p \\ \dot{p} &= \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot{f}}{l}\cos\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь мы считаем, что угловая переменная 2π-периодична, т.е. мы допускаем такие положения маятника, при которых он находится ниже горизонта. Докажем следующее утверждение.

Теорема. Для системы (2) существует такое $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, что решение, выходящие из точки $\varphi = \varphi_0$, $p_0 = 0$ в момент времени $t = 0$, удовлетворяет условию

$$-\pi/2 < \varphi(t, \varphi_0, 0) < \pi/2 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \infty)$$

Доказательство. Обозначим через Ω следующее подмножество расширенного фазового пространства

$$\Omega = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$$

Рассмотрим отрезок L, содержащийся в Ω и определенный в координатах следующим образом

$$L = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t = 0, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, p = 0\}$$

Покажем, что L содержит хотя бы одну точку такую, что решение, выходящее из нее, не покинет подмножества $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ для всех $t \geqslant 0$.

Предположим обратное. Тогда определено отображение, которое будем обозначать σ, из L в $\partial\Omega$

$$\sigma \colon (0, \varphi_0, p_0) \in L \mapsto (t^*, \varphi(t^*, \varphi_0, p_0), p(t^*, \varphi_0, p_0)) \in \partial\Omega$$

Здесь $t^* = \sup(T)$, $T = \{s \in [0, \infty) \colon \varphi(t, \varphi_0, p_0) \in [-\pi/2, \pi/2]\,\text{для всех}\, t \in [0, s]\}$.

Покажем, что отображение σ непрерывно. Для этого будем рассматривать систему (2) в окрестности $\partial\Omega$. Для доказательства непрерывности достаточно показать, что каждое решение, начинающееся на L, либо трансверсально $\partial\Omega$ в момент своего первого достижения границы при $t > 0$, либо локально не принадлежит множеству $\Omega \setminus \partial\Omega$. Непрерывность в этих случаях следует из непрерывной зависимости решений (2) от начальных условий.

Это достаточное условие выполнено для (2). Действительно, для решений, достигающих Ω^+ и Ω^-, где

$$\begin{aligned}\Omega^- =&\{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t > 0, \varphi = \pi/2, p > 0\} \cup \\ &\{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t > 0, \varphi = -\pi/2, p < 0\} \\ \Omega^+ =&\{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t > 0, \varphi = \pi/2, p < 0\} \cup \\ &\{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t > 0, \varphi = -\pi/2, p > 0\}\end{aligned}$$

выполнено условие трансверсальности пересечения. Более того, решения начинающиеся на L, не могут покинуть Ω через Ω^+. Покажем, что при $t > 0$ они могут покинуть Ω только через Ω^-.

Для каждого решения, начинающегося или достигающего $\partial\Omega$ в точках следующего множества

$$\begin{aligned}\Omega_0^+ =&\{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t \geqslant 0, \varphi = \pi/2, p = 0\} \cup \\ &\{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon t \geqslant 0, \varphi = -\pi/2, p = 0\}\end{aligned}$$

из (2) получаем

$$\ddot{\varphi} = \begin{cases} g/l & \text{если } \varphi = \pi/2 \\ -g/l & \text{если } \varphi = -\pi/2 \end{cases}$$

Таким образом получаем, что решения, начинающееся на L, не могут впервые достигнуть Ω_0^+ в момент времени $t > 0$ и для $t = 0$ они как минимум локально покидают Ω.

Закончим доказательство следующим рассуждением. Рассмотрим множество ω граничных точек, удовлетворяющих условию $\varphi = \pm\pi/2$, т.е.

$$\omega = \partial\Omega \setminus \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \colon \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$$

и непрерывное отображение $\pi \colon \omega \to \omega \cap L$. Поскольку σ и π непрерывны, то получаем, что непрерывное отображение $\pi \circ \sigma$ переводит L в его двухточечную границу. Противоречие доказывает утверждение.

В доказательстве неявно предполагалось, что решения существуют на всем полуинтервале $[0, \infty)$. Для данной системы это может быть строго показано.

6 Дифференциальные формы

Прежде чем переходить к формальным определениям, рассмотрим ряд примеров.
Пример. Рассмотрим стандартную плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами x и y. Дифференциалы dx и dy являются *1-формами*. Это означает следующее — по определению для любого вектора v, касающегося $\mathbb{R}^2$, $dx(v) = v_x$, $dy(v) = v_y$, т.е. форма dx, примененная к вектору, «возвращает его x-координату».
Пример. Рассмотрим выражение вида $\omega^1 = f(x, y)dx + g(x, y)dy$, которое заданной точке (x, y) и касательному вектору $v \in T_{(x,y)}M$ сопоставляет число $f(x, y)v_x + g(x, y)v_y$. Видно, что при замене v на λv, получающаяся величина также умножается на λ, т.е. построенная функция $\omega^1 : TM \to \mathbb{R}$ линейна в каждом $T_{(x,y)}M$. Такая функция ω^1 — тоже 1-форма. Более того, ω^1 — 1-форма наиболее общего вида на плоскости.
Пример. Дифференциальные 1-формы можно интегрировать: пусть $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ — некоторый путь, задаваемый в координатах функциями $x(t)$ и $y(t)$. Тогда положим

$$\int\limits_{\gamma} \omega^1 = \int\limits_0^1 \left(f(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right) dt$$

Если $f(x, y) = y$, $g(x, y) \equiv 0$ и $x(t) = t$, $y(t) = t$, то

$$\int\limits_{\gamma} \omega^1 = \int\limits_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

Если проводить интегрирование вдоль того же пути γ, но в обратном направлении, т.е. положить $x(t) = 1 - t$, $y(t) = 1 - t$, получим

$$\int\limits_{-\gamma} \omega^1 = -\int\limits_0^1 (1-t)\,dt = -1 + \frac{1}{2} = -\int\limits_{\gamma} \omega^1$$

Это свойство верно для любой 1-формы — при изменении направления интегрирования вычисленный ответ меняет знак.

Пример. Пусть снова $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — точка на плоскости, $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ — произвольные вектора. Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана 1-форма ω^1. Построим такую линейную функцию ω^2 векторов v и w, что $\omega^2(v, w) = -\omega^2(w, v)$, т.е. кососимметричную по своим аргументам. Эта функция будет называться дифференциалом 1-формы ω^1 в точке (x, y) (обозначается $\omega^2 = d\omega^1$) и является примером *2-формы*.

Строить функцию ω^2 мы будем следующим образом. Рассмотрим параллелограмм, натянутый на рассматриваемые вектора v и w, одна из вершин которого находится в точке (x, y). Выше мы видели, как можно интегрировать 1-формы вдоль кривых. В частности, мы можем проинтегрировать форму ω^1 по построенному выше параллелограмму: сначала считаем интеграл (с учетом ориентации, т.е. направления прохода) вдоль вектора v, выходящего из точки (x, y), потом считаем интеграл вдоль вектора w, выходящего из точки $(x, y) + v$ и т.д. Предложенная конструкция обладает одним серьезным недостатком: вообще говоря, нельзя отождествлять точки касательного пространства и многообразия, которого оно касается (в данном случае многообразие $\mathbb{R}^2$ и касательная плоскость также $\mathbb{R}^2$, но даже в этом случае это разные пространства). Тем не менее, в нашем случае такое отождествление корректно (т.е. ответ — число $\omega^2(v, w)$ — не зависит от выбора координат в окрестности рассматриваемой точки), если рассматривать интегрирование по «бесконечно малому параллелограмму», т.е. по параллелограмму со сторонами εv и εw, где ε мы будем устремлять к нулю. Для сокращения записи будем рассматривать только интеграл формы $f dx$, который мы обозначим

I_f (интеграл формы gdy рассматривается аналогично)

$$
\begin{aligned}
I_f(\varepsilon) = &\int\limits_0^1 f(x+\varepsilon v_x t, y+\varepsilon v_y t)\varepsilon v_x\,dt \\
&+ \int\limits_0^1 f(x+\varepsilon v_x+\varepsilon w_x t, y+\varepsilon v_y+\varepsilon w_y t)\varepsilon w_x\,dt \\
&- \int\limits_0^1 f(x+\varepsilon v_x+\varepsilon w_x-\varepsilon v_x t, y+\varepsilon v_y+\varepsilon w_y-\varepsilon v_y t)\varepsilon v_x\,dt \\
&- \int\limits_0^1 f(x+\varepsilon w_x-\varepsilon w_x t, y+\varepsilon w_y-\varepsilon w_y t)\varepsilon w_x\,dt.
\end{aligned}
$$

Величина $I_f(\varepsilon)$ — интеграл 1-формы fdx по параллелограмму, образованному векторами εv и εw. Очевидно, что $I_f(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Видно, что $I_f(0) = 0$ и $dI_f/d\varepsilon = 0$ при $\varepsilon = 0$. Поэтому основной вклад в значение интеграла при $\varepsilon \to 0$ будут давать слагаемые выше первого порядка малости по ε. Вычислим $I_f(\varepsilon)$ с точностью $o(\varepsilon^2)$.

$$
\begin{aligned}
&f(x+\varepsilon v_x t, y+\varepsilon v_y t) = f(x,y) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}v_x t + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}v_y t + o(\varepsilon) \\
&f(x+\varepsilon v_x+\varepsilon w_x t, y+\varepsilon v_y+\varepsilon w_y t) = \\
&= f(x,y) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(v_x+w_x t) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}(v_y+w_y t) + o(\varepsilon) \\
&f(x+\varepsilon v_x+\varepsilon w_x-\varepsilon v_x t, y+\varepsilon v_y+\varepsilon w_y-\varepsilon v_y t) = \\
&= f(x,y) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(v_x+w_x-v_x t) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}(v_y+w_y-v_y t) + o(\varepsilon) \\
&f(x+\varepsilon w_x-\varepsilon w_x t, y+\varepsilon w_y-\varepsilon w_y t) = \\
&= f(x,y) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(w_x-w_x t) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}(w_y-w_y t) + o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Тогда

$$I_f(\varepsilon) = \varepsilon^2\frac{\partial f}{\partial y}(v_y w_x - v_x w_y) + o(\varepsilon^2)$$

Аналогично можно получить

$$I_g(\varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{\partial g}{\partial x}(v_y w_x - v_x w_y) + o(\varepsilon^2)$$

Таким образом, значение интеграла $I(\varepsilon) = I_f(\varepsilon) + I_g(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ содержит слагаемое (оно может быть как нулевым, так и ненулевым) порядка ε^2. Положим

$$\omega^2(v, x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(v_x w_y - v_y w_x) = d\omega^1(v, w)$$

2-форму ω^2 в координатах записывают в следующем виде

$$\omega^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Пример. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — точка на плоскости. Рассмотрим следующую функцию $\omega^2\colon TM_{(x,y)} \times TM_{(x,y)} \to \mathbb{R}$:

$$\omega^2 = f(x, y)\, dx \wedge dy, \quad dx \wedge dy(v, w) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Видно, что а данной точке ω^2 линейна и кососимметрична, т.е. $\omega^2(v, w) = -\omega^2(w, v)$. ω^2 — дифференциальная 2-форма на плоскости наиболее общего вида.

Пример. 2-формы также можно интегрировать. Пусть $\omega^2 = dx \wedge dy$. Рассмотрим отображение $\tau\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\tau\colon (t_1, t_2) \mapsto (x, y)$, $x = t_1$, $y = t_2$ (в данном случае отображение тождественно). Проинтегрируем форму по единичному квадрату. Положим

$$\iint\limits_{\square} dx \wedge dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 dx \wedge dy(e_1, e_2)\, dt_1 dt_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 1\, dt_1 dt_2 = 1$$

Здесь

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть теперь $x = t_2$, $y = t_1$, тогда получим, что

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Соответственно,

$$\iint\limits_{\square} dx\wedge dy = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 dx\wedge dy(e_1,e_2)\,dt_1dt_2 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (-1)\,dt_1dt_2 = -1$$

В обоих случаях мы сводим интегрирование формы к обычному интегралу Римана. Для этого мы параметризуем нашу область интегрирования и, выражаясь неформально, разбиваем область параметров на элементарные элементы, площадь каждого из которых входит в ответ с учетом того как она изменяется формой $dx\wedge dy$ в данной точке (т.е. она может изменяться не только по величине, но и сменить знак).

Итак, интегрирование дифференциальной 2-формы полностью аналогично интегрированию 1-формы, только параметризация области интегрирования включает два параметра и, соответственно, дифференциал отображения параметризации переводит плоскость в плоскость, а не прямую в прямую.

Пример (частный случай теоремы Стокса на плоскости). Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область, параметризованная отображением $\tau\colon\square=[0,1]\times[0,1]\to\Omega$. Через $\partial\Omega=\tau(\partial\square)$ обозначим ее границу. Если ω^1 — 1-форма на плоскости $\mathbb{R}^2$, то

$$\int\limits_{\Omega} d\omega^1 = \int\limits_{\partial\Omega}\omega^1$$

Интегрирования определяются аналогично примерам выше. Важно отметить, что ориентации при интегрировании по Ω и $\partial\Omega$ здесь предполагаются согласованными. В данном случае согласованность означает следующее. Пусть $\tau\colon\square=[0,1]\times[0,1]\to\Omega$ — параметризация Ω, тогда интеграл по одномерному множеству $\tau(\partial\square)\subset\mathbb{R}^2$ вычисляется таким образом, чтобы при этом граница $\partial\square$ (в пространстве параметров) обходилась в положительном направлении.

Перейдем к формальным определениям. Везде ниже, как обычно, считаем, что M — многообразие.

Определение. Пусть в каждой точке $x\in M$ задана функция $\omega\colon T_xM\times\ldots\times T_xM\to\mathbb{R}$ от k аргументов такая, что выполнены условия

1. Линейность: $\omega(\lambda_1v_1,\ldots,\lambda_kv_k)=\lambda_1\ldots\lambda_k\cdot\omega(v_1,\ldots,v_k)$ и
$\omega(v_1,\ldots,v_d+w_d,\ldots,v_k)=\omega(v_1,\ldots,v_d,\ldots,v_k)+\omega(v_1,\ldots,w_d,\ldots,v_k)$.

2. Кососимметричность: $\omega(v_1, ..., v_d, ..., v_r, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_r, ..., v_d, ..., v_k)$.

3. Дифференцируемость: для любых гладких векторных полей $v_1, ..., v_k$, функция $\omega(v_1, ..., v_k)$ тоже гладкая.

Тогда говорят, что на M задана *дифференциальная k-форма* (для краткости — k-форма). Пусть $x_1, ..., x_n$ — локальные координатные функции на M. Можно показать, что любая k-форма в локальных координатах записывается следующим образом

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} f_{i_1...i_k}(x_1, ..., x_n)\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \tag{3}$$

Здесь по определению мы считаем, что

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}(v_1, ..., v_k) = \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{vmatrix}$$

В общем случае, пусть ω^k — k-форма, ω^l — l-форма, которые в локальных координатах записываются следующим образом

$$\omega^k = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} f^k_{i_1...i_k}(x_1, ..., x_n)\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$
$$\omega^l = \sum_{1\leqslant j_1<...<j_l\leqslant n} f^l_{j_1...j_l}(x_1, ..., x_n)\, dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_l}$$

Тогда их *внешним произведением* называется $k+l$-форма

$$\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_1<...<j_l\leqslant n} f^k_{i_1...i_k} f^l_{j_1...j_l}\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_l}$$

Замечание. Можно показать, что такое определение корректно, т.е. не зависит от выбора локальных координат.
Определение. *Внешним дифференциалом* k-формы ω называется $(k+1)$-форма, задаваемая в локальных координатах следующим образом

$$d\omega = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} df_{i_1...i_k}(x_1, ..., x_n) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

Здесь $df_{i_1...i_k}$ — обычный дифференциал функции.

Дифференциальные формы «переносятся» дифференцируемыми функциями. Точнее, пусть M и N — многообразия (возможно, разной размерности). Пусть $\varphi\colon N \to M$ — дифференцируемое отображение, т.е. $d\varphi\colon TN \to TM$. Пусть на M задана k-форма, тогда на N можно тоже задать k-форму (которая обычно обозначается $\varphi^*\omega$) следующим образом

$$\varphi^*\omega(v_1, ..., v_k) = \omega(d\varphi(v_1), ..., d\varphi(v_k))$$

С вычислительной точки зрения то, что написано выше означает следующее. Если в локальных координатах $(x_1, ..., x_m)$ на M форма ω имела вид $\omega = f(x_1, ...x_m)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ (для краткости записи мы рассматриваем только лишь одно слагаемое в (3)) и локально отображение φ задается набором функций $x_i(y_1, ..., y_n)$, $i = 1, ..., m$ (здесь $(y_1, ..., y_n)$ — локальные координаты в окрестности соответствующей точки на N), то форма $\varphi^*\omega$ на N в координатах записывается так:

$$\varphi^*\omega = f(x_1(y_1, ..., y_n), ...x_m(y_1, ..., y_n))dx_{i_1}(y_1, ..., y_n) \wedge ... \wedge dx_{i_k}(y_1, ..., y_n)$$

здесь

$$dx_{i_l}(y_1, ..., y_n) = \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_n}dy_n$$

Подобно тому как мы интегрировали 1- и 2-формы на плоскости, можно интегрировать и k-формы на многообразиях. Пусть $T = [0,1] \times ... \times [0,1] \subset \mathbb{R}^k$ — стандартный k-мерный куб в $\mathbb{R}^k$. Пусть M — некоторое многообразие на котором задана k-форма ω, $\varphi\colon T \to M$. Тогда на T определена k-форма $\varphi^*\omega$. Пусть $\tau = f(t)\, dt_1 \wedge ... \wedge dt_k$ — произвольная k-форма на T. Тогда положим

$$\int\limits_T \tau = \int\limits_T f(t)\, dt_1 ... dt_k$$

Тогда положим по определению

$$\int\limits_{\varphi(T)} \omega = \int\limits_T \varphi^*\omega$$

Теорема Стокса. [5] Пусть ω — $k-1$-форма на M, $\varphi\colon T \to M$. Тогда

$$\int\limits_{\partial(\varphi(T))} \omega = \int\limits_{\varphi(T)} d\omega$$

[5] В.А. Зорич Математический анализ (том 2) — Москва: 640 с., 1984. Книга содержит доказательство несколько более общей версии теоремы Стокса.

Здесь также считаем, что интегрирование по области и ее границе происходит согласованным образом, т.е. если $e_1, ..., e_k$ — базис, задающий ориентацию $T \subset \mathbb{R}^k$, а $e'_1, ..., e'_{k-1}$ — базис, задающий ориентацию некоторой грани $T' \subset T$, и ν — внешняя нормаль к T на грани T', то ориентация базисов $e_1, ..., e_k$ и $\nu, e'_1, ..., e'_{k-1}$ должна быть одинакова.

С помощью дифференциальных форм экстремальный принцип для уравнений Гамильтона может быть сформулирован в следующем виде
Утверждение. Интеграл $\int p\,dq - H\,dt$ имеет γ экстремалью относительно вариаций γ, при которых концы кривой остаются на n-мерных подпространствах $(t = t_0, q = q_0)$ и $(t = t_1, q = q_1)$.

Доказательство полностью аналогично данному ранее, но, в отличие от первой формулировки, тут на кривой γ не фиксирована параметризация (которая восстанавливается, поскольку мы знаем, что у решения параметр t).

7 Симплектические и пуассоновы многообразия

Определение. Говорят, что на многообразии M задана *симплектическая структура*, если на нем задана замкнутая невырожденная 2-форма ω. Говорят, что *форма замкнута*, если $d\omega = 0$. Форма называется *невырожденной*, если для любой точки q и любого ненулевого $v \in T_qM$, форма $\omega(v, \cdot)$ не равна тождественно нулю, т.е. существует $w \in T_qM$ и $\omega(v, w) \neq 0$.

Любое симплектическое многобразие всегда имеет четную размерность (показать — можно использовать $det(-M) = (-1)^n det(M)$ для матрицы $n \times n$).

Пусть M — многообразие, T^*M — его кокасательное расслоение. Тогда на T^*M определена следующая 1-форма: пусть $v \in T(T^*M)$ — вектор, выходящий из точки $(q, p) \in T^*M$, $\pi\colon T(T^*M) \to TM$ — естественная проекция («забываем про кокасательные слои»), $\pi(v)$ есть точка $q \in M$ и некоторый вектор $w \in T_qM$, положим $\omega^1(v) = p(\pi(v)) = p(w)$. Пусть $dq_1, ..., dq_n$ — базисные 1-формы, соответствующие локальным координатам $q_1, ..., q_n$. Каждый ковектор может быть представлен в виде $p_1 dq_1 + ... + p_n dq_n$, поэтому $q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n$ — локальные координаты на T^*M. В этих координатах построенная выше форма записывается как

$\omega^1 = pdq$. Ее дифференциал $d\omega^1 = dp \wedge dq$ — симплектическая форма (поскольку всегда $dd\omega = 0$).

Теорема (Дарбу). В окрестности любой точки симплектического многообразия (M, ω) всегда можно ввести такие координаты (p, q), что $\omega = dp \wedge dq$.

Определение. Подмногообразие симплектического многообразия M, на котором $\omega = 0$ называется *лагранжевым.*

Пример лагранжева многообразия — нулевое сечение кокасательного расслоения.

Определение. *Скобкой Пуассона* на многообразии M называется отображение $\{\cdot, \cdot\} \colon C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ такое, что

1. $\{\lambda F_1 + \mu F_2, G\} = \lambda\{F_1, G\} + \mu\{F_2, G\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $\{F, G\} = -\{G, F\}$
3. $\{F_1 F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$
4. $\{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{F, G\}, H\} = 0$

В определении скобки мы не требуем, чтобы она была невырождена, т.е. для любой F такой, что $dF \neq 0$ в некоторой точке, найдется G такая, что в данной точке $\{F, G\} \neq 0$. Вырожденные скобки Пуассона возникают, например, в динамике твердого тела, если мы рассматриваем систему уравнений в «алгебраической форме». Этот пример мы рассмотрим ниже.

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении симплектических многообразий. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Если на M дополнительно задана некоторая функция (будем называть ее гамильтонианом автономной системы) $H \colon M \to \mathbb{R}$, то с помощью симплектической структуры можем сопоставить ей некоторое векторное поле: dH — 1-форма на M, поскольку ω невырождена, то существует векторное поле v_H такое, что $\omega(\cdot, v_H) = dH$. Назовем v_H — гамильтоновым векторным полем.

Тогда будем говорить, что динамика гамильтоновой системы (M, ω, H) задается уравнением

$$\dot{x} = v_H(x)$$

Замечание. Так же можно определить и векторное поле неавтономной гамильтоновой системы. В таком случае значение гамильтониана зависит не только от точки на многообразии, но и от некоторого параметра, который никак не связан с симплектической структурой (время). Для каждого значения этого параметра мы получаем свое векторное поле на M.

В координатах Дарбу (когда $\omega = dp \wedge dq$) уравнение $\dot{x} = v_H(x)$ принимает стандартный вид уравнений Гамильтона.

Если многообразие симплектическое, то на нем можно ввести скобку Пуассона (невырожденную). Обратно, каждой невырожденной скобке можно сопоставить симплектическую структуру. Положим по определению

$$\{H, F\} = \partial_{v_H} F = dF(v_H) = \omega(v_H, v_F)$$

Следовательно, $\{\cdot, \cdot\}$ — действительно скобка Пуассона. Обратно, пусть задана невырожденная скобка Пуассона. Построим по этой скобке симплектическую структуру. Для доказательства нам потребуется следующая техническая лемма

Лемма (Адамар). Пусть функция $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая окрестность нуля. Тогда существуют функции $g_i\colon U \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x_1, ..., x_n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, ..., x_n), \quad g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

Покажем теперь, что каждому кососимметричному тензорному полю $A^{ij} = -A^{ij}$ типа $(2, 0)$, компоненты которого всюду на многообразии удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha} \left(A^{j\alpha} \frac{\partial A^{ki}}{\partial x_\alpha} + A^{k\alpha} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x_\alpha} + A^{i\alpha} \frac{\partial A^{jk}}{\partial x_\alpha} \right) = 0$$

можно сопоставить скобку Пуассона

$$\{F, G\} = \sum A^{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

И, наоборот, каждой скобке Пуассона можно сопоставить такое тензорное поле. Проверка того, что рассматриваемое поле задает скобку проводится прямым вычислением, поэтому мы рассмотрим только второй случай — покажем, что скобке, заданной аксиоматически, можно сопоставить тензорное поле.

Положим $A^{ij} = \{x_i, x_j\}$. Используя лемму Адамара, покажем, что эти соотношения полностью определяют скобку, т.е., зная $\{x_i, x_j\}$, можно вычислить $\{F, G\}$ для произвольных функций. Для этого в окрестности любой точки (считаем, что всегда это ноль) представим $F = F(0) + x\bar{F}$, $G = G(0) + x\bar{G}$. Тогда, используя то, что мы считаем скобку Пуассона при $x = 0$, получаем

$$\{F, G\} = \sum \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

Окончательно, если скобка невырождена, то матрица, составленная из элементов A^{ij} обратима в каждой точке. Тогда симплектическая структура задается формулой $\omega = \sum A_{ij} dx_i \wedge dx_j$.

В координатах Дарбу скобка Пуассона имеет следующий вид

$$\{H, F\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Изменение любой функции F вдоль решений уравнений Гамильтона есть

$$\dot{F} = \{H, F\}$$

Получаем, что функция F — первый интеграл системы, если $\{H, F\} = 0$. Отсюда сразу получаем, что если F_1 и F_2 — два первых интеграла системы, то и $\{F_1, F_2\}$ — тоже первый интеграл.

Пример. В заключение приведем пример системы с вырожденной скобкой Пуассона. Динамика твердого тела с неподвижной точкой описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{K}_i = \{H, K_i\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{H, \gamma_i\} \\
&H = 1/2 \cdot \langle K, AK \rangle + mg\langle r, \gamma \rangle \\
&\{K_i, K_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} K_k, \quad \{K_i, \gamma_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0
\end{aligned}$$

Если $K_1, K_2, K_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — координаты в $\mathbb{R}^6$, то для произвольных функций $F(K, \gamma) = F(x)$ и $G(K, \gamma) = G(x)$ положим

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

Для любой функции F получаем $\{F, \langle \gamma, \gamma \rangle\} = 0$ и $\{F, \langle K, \gamma \rangle\} = 0$. Скобка вырождена.

8 Интегральные инварианты и теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть $T^*M \times \mathbb{R}$ — расширенное фазовое пространство. На нем корректно определена форма $\omega = pdq - Hdt$ (форма Пуанкаре-Картана).
Определение. Пусть γ_0 — некоторая гладкая кривая без самопересечений в T^*M. Трубкой траекторий гамильтоновой системы назовем объединение траекторий (в расширенном фазовом пространстве) всех решений, проходящих в момент $t = t_0$ через точки γ_0 (разные t_0 — вообще говоря, разные и трубки траекторий).
Гамильтоново векторное поле v_H (в расширенном фазовом пространстве) — аннулятор формы $d\omega$, т.е. для любого вектора v получаем

$$d\omega(v, v_H) = 0$$

Следствие. Для любых замкнутых кривых γ_1 и γ_2 в расширенном фазовом пространстве, охватывающих одну трубку траекторий имеем

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Доказательство. Теорема Стокса.
Следствие. Для любой кривой γ в фазовом пространстве имеем

$$\int_{\gamma} pdq = \int_{g^t\gamma} pdq$$

Здесь g^t — поток гамильтоновой системы, т.е. для любой точки (p_0, q_0, t_0), $g^t(p_0, q_0, t_0)$ есть точка расширенного фазового пространства, в которую переходит (p_0, q_0, t_0) за время t.
Следствие. Пусть D — двумерная область в фазовом пространстве с гладкой границей ∂D, которая топологически есть окружность, тогда

$$\int_D dp \wedge dq = \int_{g^t D} dp \wedge dq$$

Следствие.

$$(g^t)^*(dp \wedge dq) = dp \wedge dq$$

То есть фазовый поток сохраняет форму $dp \wedge dq$.
Следствие (теорема Лиувилля). Фазовый поток g^t сохраняет фазовый объем.
Доказательство.

$$(dp \wedge dq)^n = c \cdot dq_1 \wedge ... \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge ... \wedge dp_n, \quad c \neq 0$$

Поскольку $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$ (показать), то получаем утверждение теоремы.
Отметим, что $(dp \wedge dq)^n$ — невырожденная форма и задает форму объема на симплектическом многообразии (на фазовом пространстве). В частности, любое симплектическое многообразие ориентируемо.
Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть g — непрерывное взаимнооднозначное отображение ограниченной области D евклидова пространства в себя ($gD = D$), сохраняющее объем. Тогда в любой окрестности U любой точки $x \in D$ найдется $y \in U$ такая, что $g^n y \in U$, для некоторого $n > 0$.
Упражнение. Доказать теорему.

9 Отображение Чирикова (стандартное отображение)

Рассмотрим отображение двумерного тора в себя, задаваемое следующими формулами

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \varepsilon \sin x_n \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon \sin x_n \end{aligned}$$

Здесь x и y — 2π-периодические координаты на торе и точка с координатами (x_n, y_n) переходит в точку (x_{n+1}, y_{n+1}); ε — параметр.
Замечание. Система, представленная выше, может быть получена из гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} + \varepsilon \cdot \delta \cdot \cos q$$

где δ — периодическая (с периодом 1) по времени дельта-функция. Другими словами, при $t \in (0, 1)$ этот гамильтониан есть просто кинетическая энергия и точка движется свободно по окружности. В момент $t = 0$ переменная p скачком изменяется на $\varepsilon \sin q(0)$ и остается такой до момента

$t=1$, т.е., если ввести обозначение $q_n = q(n)$, $p_n = p(n)$, получим

$$q_{n+1} = q_n + 1 \cdot (p_n + \varepsilon \sin q_n) = q_n + p_n + \varepsilon \sin q_n$$
$$p_{n+1} = p_n + \varepsilon \sin q_n$$

Эта система, в отличие от исходной, задает отображение цилиндра. Чтобы перейти к отображению тора необходимо факторизовать цилиндр, т.е. отождествить все точки вида $(q+2\pi l, p+2\pi k)$ с точкой (q,p). При этом, конечно, мы получим другую систему, но с точки зрения динамики переменной q (в других обозначениях — x), система будет полностью эквивалента. Действительно, предположим, что мы начали движение из некоторой точки (q_0, p_0) и на некотором шаге n точка p_{n+1} покинула полуинтервал $[0, 2\pi)$. В случае, если мы не факторизуем наше пространство по переменной p, значение q_{n+2} после факторизации будет таким же, как если бы мы факторизовали p. Несложно понять, что такая же картина сохранится и на следующих шагах.

Ввиду относительной простоты отображение Чирикова является удобной модельной системой для изучения различных аспектов гамильтоновой динамики. Например, если посмотреть численно на траектории стандартного отображения, то при ненулевых ε можно заметить появление нерегулярных траекторий и такое поведение некоторых решений действительно можно строго доказать, что и будет являться основным содержанием лекции.

Сначала перепишем нашу систему в следующем виде (исключим переменные y)

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \varepsilon \sin x_k$$

Динамика такой системы определяется парой (x_0, x_1). Каждая пара вида (x_{n-1}, x_n) переводится за один шаг в пару (x_n, x_{n+1}). Если какое-то значение x_n покинет полуинтервал $[0, 2\pi)$, то, как и выше, мы будем брать его по модулю 2π. Из первого уравнения системы также можно выразить y_n через x_{n+1} и x_n (при необходимости также надо взять значение по модулю).

В качестве мотивирующих соображений рассмотрим это отображение при $\varepsilon = \infty$. Поскольку можно записать

$$\frac{1}{\varepsilon}(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = \sin x_n$$

то неформально можно считать, что нашему предельному случаю удовлетворяет система $\sin x_n = 0$. У такой системы решениями являются все последовательности вида $x_n = l_n\pi$, где $l_n \in \mathbb{Z}$. Можно ожидать, что при больших ε у нашей системы также будут существовать решения, траектории которых близки к последовательностям вида $l_n\pi$.

Определение. Пространством кодов C_λ назовем набор всевозможных последовательностей

$$a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad a_n = l_n\pi,\ l_n \in \mathbb{Z}, \quad |a_{n+1} - a_n| < \lambda$$

Определение. Пусть $a \in C_\lambda$, тогда определим метрическое пространство Π_a как пространство последовательностей

$$x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n - a_n|$$

С метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n - y_n|$$

Теорема (Обри/Aubry). Для любых $\lambda > 0$ и $\sigma > 0$ существует ε_0 такое, что для любого кода $a \in C_\lambda$ и любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ существует траектория отображения Чирикова $x \in \Pi_a$ и $\rho(x, a) < \sigma$.

Доказательство. Будем рассматривать метрическое пространство (Π_a, ρ). Перепишем наше уравнение в виде

$$x_n = \mathrm{arcsin}_n\left(\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\varepsilon}\right)$$

где arcsin_n — такая ветвь арксинуса, что $\mathrm{arcsin}_n(0) = a_n$. Рассмотрим отображение метрического пространства в себя $x \mapsto y = W(x)$, которое задается следующим образом

$$y_n = \mathrm{arcsin}_n\left(\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\varepsilon}\right)$$

Если мы покажем, что у этого отображения (при некоторых значениях параметров) существует неподвижная точка, т.е. $x = W(x)$, то x будет траекторией отображения Чирикова. Покажем, что неподвижная точка действительно существует при достаточно больших ε. Точнее, покажем, что существует $\varepsilon_0(\lambda, \sigma)$ такое, что для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ выполнены следующие условия

1. W определено на шаре $B_{a,\sigma} \subset \Pi_a$ с центром a и радиуса σ

2. $W(B_{a,\sigma}) \subset B_{a,\sigma}$

3. W — сжимающее отображение

Без потери общности считаем, что $\sigma < \pi/2$. Так как для любого $x \in B_{a,\sigma}$ выполнено $\rho(x,a) < \sigma$, $a \in C_\lambda$, то

$$|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| \leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| \leqslant 2(\lambda + 2\sigma)$$

поэтому, если

$$\varepsilon_0 > \frac{2(\lambda + 2\sigma)}{\sin\sigma}$$

то

$$\left|\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\varepsilon}\right| < \sin\sigma$$

из чего следуют первые два утверждения.

Докажем утверждение три. Заметим, что для любой пары чисел $u, v \in (-\sin\sigma, \sin\sigma)$ выполнено (показать это)

$$|\arcsin_n u - \arcsin_n v| \leqslant \frac{1}{\cos\sigma}|u - v|$$

Положим $\tilde{x} = W(x)$ и $\tilde{y} = W(y)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ получаем

$$|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n| \leqslant \frac{|x_{n+1} - y_{n+1}| + 2|x_n - y_n| + |x_{n+1} - y_{n+1}|}{\varepsilon\cos\sigma}$$

Поэтому отображение будет сжимающим, если

$$\varepsilon_0 > \frac{8}{\cos\sigma}$$

10 Канонические преобразования

Пусть (M, ω, H) — гамильтонова система, т.е. симплектическое многообразие и функция Гамильтона.

Утверждение. Пусть p, q, t — локальные канонические координаты в расширенном фазовом пространстве. Пусть P, Q, T — другие локальные координаты в этой же области и $K(P,Q,T)$ и $S(P,Q,T)$ — такие функции, что

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT + dS$$

Тогда интегральные кривые уравнения Гамильтона в новых координатах задаются уравнениями

$$\frac{d}{dT}Q = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{d}{dT}P = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

Доказательство. Пусть некоторое векторное поле v является аннулятором формы $d(pdq - Hdt)$. Покажем сначала, что тогда $v = \lambda(p,q,t) \cdot v_H$, где $v_H = (-H_q, H_p, 1)$ и λ — некоторая функция. Пусть $v = (v_p, v_q, v_t)$. Поскольку мы предполагаем, что это аннулятор, то для любого векторного поля $w = (w_p, w_q, w_t)$ должно быть выполнено

$$\begin{vmatrix} v_p & w_p \\ v_q & w_q \end{vmatrix} - \frac{\partial H}{\partial p}\begin{vmatrix} v_p & w_p \\ v_t & w_t \end{vmatrix} - \frac{\partial H}{\partial q}\begin{vmatrix} v_q & w_q \\ v_t & w_t \end{vmatrix} = 0$$

Получаем, что v_p, v_q и v_t связаны уравнениями

$$\begin{aligned} -v_q + H_p v_t &= 0 \\ v_p + H_q v_t &= 0 \end{aligned}$$

Пусть $v_t = \lambda(p,q,t)$ — произвольно. Получаем $v = \lambda(p,q,t) \cdot v_H$.
Поскольку аннуляторы форм $d(pdq - Hdt)$ и $d(PdQ - KdT)$ совпадают, то в новых координатах гамильтоново векторное поле имеет вид $v_K = \mu(P,Q,T) \cdot (-K_Q, K_P, 1)$, где $\mu(P,Q,T)$ — некоторая функция. Если в качестве параметра выбрать T, то получим систему

$$\frac{d}{dT}Q = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{d}{dT}P = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

Определение. Отображение $f\colon M \to M$ симплектического многообразия называется каноническим, если оно сохраняет форму ω, т.е. $f^*\omega = \omega$. В координатах Дарбу $\omega = dp \wedge dq$. Если рассматривать отображение f как перевод точек с локальными координатами (p,q) в точки с локальными координатами (P,Q) (возможно, в другой карте), то отображение каноническое, если

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ = dP(p,q) \wedge dQ(p,q)$$

Если

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}$$

то отображение f каноническое, если во всех точках (p, q), где оно определено, выполнено

$$I = J^T I J$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Пример. Сдвиг вдоль фазовых траекторий гамильтоновой системы — каноническое преобразование (следует из теоремы Стокса и того, что гамильтоново векторное поле в расширенном фазовом пространстве — аннулятор формы $d(pdq - Hdt)$).

Пример. Отображение Чирикова является симплектическим отображением тора, т.е. сохраняет форму $dp \wedge dq$ (или $dy \wedge dx$ в других обозначениях).

Утверждение. Пусть $f\colon M \to M$ — каноническое отображение, и оно переводит точку x с координатами (p^*, q^*) в точку X с координатами (P^*, Q^*), т.е. $f\colon (p^*, q^*) \mapsto (P^*, Q^*)$. Пусть (p, q) — канонические координаты в окрестности точки x и (P, Q) — канонические координаты в окрестности точки X. Тогда локально в новых координатах $(P(p, q), Q(p, q))$ в некоторой окрестности точки x уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

Здесь $K(P, Q, t) = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.

Доказательство. Рассмотрим форму $pdq - PdQ$. Пусть γ — замкнутый путь в малой окрестности точки (p^*, q^*). Поскольку отображение $(p, q) \mapsto (P, Q)$ каноническое, то

$$\int\limits_{\gamma} pdq - PdQ = 0$$

Поэтому при фиксированной точке (p^*, q^*) и для любой другой близкой точки (p', q')

$$\int\limits_{p^*, q^*}^{p', q'} pdq - PdQ = S(p', q')$$

Окончательно

$$dS = pdq - PdQ$$

Можем применить предыдущее утверждение при $t = T$ и $K(P, Q, t) = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.
Замечание. При переходе от одних локальных координат к другим доказанное утверждение используется следующим образом. Пусть $(p, q) \in D \subset \mathbb{R}^{2n}$ — некоторые канонические локальные координаты. Мы хотим ввести новые канонические координаты в D. Пусть $P(p, q)$ и $Q(p, q)$ — некоторые функции, задающие диффеоморфизм области D. Поскольку мы рассматриваем систему локально, то можно считать, что $M = \mathbb{R}^{2n}$, но рассматриваем мы только его подмножество D. Тогда, если функции P и Q задают диффеоморфизм между D и некоторым подмножеством в $\mathbb{R}^{2n}$, то это отображение каноническое, когда $dP(p, q) \wedge dQ(p, q) = dp \wedge dq$ и P, Q — есть новые канонические координаты.
Утверждение. Пусть $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — линейное преобразование, задаваемое матрицей A. Тогда оно задает новые канонические координаты на $\mathbb{R}^{2n}$, если

$$I = A^T I A$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

то $P = p/\lambda$ и $Q = \lambda q$ — канонические координаты и в них уравнения Гамильтона имеют обычный вид с гамильтонианом $K = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.
Замечание. Не любое преобразование, сохраняющее гамильтоновость уравнений, является каноническим. Например, если $P = 2p$ и $Q = q$, то уравнения могут быть записаны в гамильтоновой форме, но такое преобразование не каноническое (тем не менее, достаточно часто каноническими преобразованиями называют любые, сохраняющие гамильтоновость уравнений).
Ниже считаем, что $M = \mathbb{R}^{2n}$ и $\omega = dp \wedge dq$.
Утверждение. Пусть $S(Q, q)$ — функция, заданная в окрестности точки $(Q^*, q^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Если

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q}(Q^*, q^*) \neq 0$$

то функция S задает каноническое отображение окрестности точки $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ в окрестность точки $(P^*, Q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$, где

$$p^* = \frac{\partial S}{\partial q}(Q^*, q^*), \quad P^* = -\frac{\partial S}{\partial Q}(Q^*, q^*)$$

Утверждение. Пусть $S(P,q)$ — функция, заданная в окрестности точки $(P^*,q^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Если

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q}(P^*,q^*) \neq 0$$

то функция S задает каноническое отображение окрестности точки $(p^*,q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ в окрестность точки $(P^*,Q^*) \in \mathbb{R}^{2n}$, где

$$p^* = \frac{\partial S}{\partial q}(P^*,q^*), \quad Q^* = \frac{\partial S}{\partial P}(P^*,q^*)$$

Если $S(Q,q)$ — производящая функция канонического преобразования и $H = H(p,q)$, то новый гамильтониан имеет вид

$$K(P,Q) = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right)\bigg|_{q=q(P,Q)}$$

Если удается найти производящую функцию такую, что

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right)\bigg|_{q=q(P,Q)} = K(Q)$$

то полученные уравнения легко интегрируются в новых координатах. Последнее уравнение называется уравнением Гамильтона-Якоби (укороченным). В более общем случае уравнением Гамильтона-Якоби называется любое уравнение на производящую функцию канонической замены, приводящей рассматриваемый гамильтониан к некоторому требуемому виду.

Пример. Пусть $H(p,q) = p^2/2 + \mu \sin q$. Найдем каноническую замену такую, что в новых координатах $K(P,Q) = P^2/2 + \mu^2 K_1(P,Q)$, т.е. в новых координатах малое возмущение будет иметь второй порядок малости вместо первого. Будем искать замену, которая бы при $\mu = 0$ была тождественной. Пусть

$$S(P,q) = Pq + \mu S_1(P,q)$$

Тогда

$$p = P + \mu \frac{\partial S_1}{\partial q}, \quad Q = q + \mu \frac{\partial S_1}{\partial P}$$

В новых координатах гамильтониан записывается следующим образом

$$K = \frac{1}{2}\left(P + \mu\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 + \mu \sin q$$

Чтобы получить K в виде функции от P и Q надо выразить $q = q(P, Q)$ (мы не будем этого делать). Видно, что если $S_1 = 1/P \cdot \cos q$, то в K не будут входить слагаемые порядка μ.

Отметим, что замена определена не всюду. Тем не менее, для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно малое $\mu > 0$, что близкая к тождественной замена $(p, q) \mapsto (P, Q)$ определена и взаимнооднозначна при всех Q и $|P| > \varepsilon$.

11 Вполне интегрируемые системы

Пусть (M, ω, H) — гамильтонова система с n степенями свободы, т.е. $\dim(M) = 2n$. Пусть $F_1, \dots F_n \colon M \to \mathbb{R}$ — первые интегралы этой системы, причем скобка Пуассона любых двух первых интегралов равна нулю $\{F_i, F_j\} = 0$. Пусть

$$M_c = \{(p, q) \in M \colon F_i(p, q) = c_i, i = 1, \dots n\}$$

Теорема (Лиувилль-Арнольд)[6]. Пусть формы dF_i линейно независимы в каждой точке M_c, тогда

1. M_c — гладкое многообразие инвариантное относительно фазового потока гамильтоновой системы

2. Каждая компактная компонента связности M_c диффеоморфна n-мерному тору

3. В некоторых угловых координатах $\varphi_1, \dots \varphi_n$ уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{\varphi} = \nu(c)$, где $\nu(c)$ — постоянный вектор.

Системы, удовлетворяющие условиям этой теоремы, называются вполне интегрируемыми системами (для краткости часто говорят просто «интегрируемые системы»).

[6] Доказательство можно найти в В.И. Арнольд, Математические методы классической механики — Москва: 416 с., 2003.

Примеры интегрируемых систем. Рассмотрим движение твердого тела в поле силы тяжести. Считаем, что одна из точек твердого тела неподвижна. Пусть r_1, r_2, r_3 — координаты центра масс в главных осях инерции твердого тела (относительно неподвижной точки), а I_1, I_2, I_3 — моменты инерции относительно этих осей. Тогда при следующих значениях параметров r_1, r_2, r_3 и I_1, I_2, I_3 система будет интегрируемой

1. Случай Эйлера: $r_1 = r_2 = r_3 = 0$
2. Случай Лагранжа: $I_1 = I_2$, $r_1 = r_2 = 0$
3. Случай Ковалевской: $I_1 = I_2 = 2I_3$, $r_3 = 0$

Далеко не все системы являются интегрируемыми. Пусть $H(p,q) = T(p,q) + V(q)$ — гамильтониан системы с двумя степенями свободы, т.е. $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$, где M — замкнутое ориентируемое аналитическое двумерное многообразие (сфера с $\varkappa$ ручками). Пусть при каждом q функция $T(p,q)$ является квадратичной формой на T_q^*M и функции T и V аналитичны на T^*M и M
Теорема (Козлов)[7]**.** Если род $\varkappa$ поверхности M не равен 0 или 1, то гамильтонова система не имеет на T^*M аналитического первого интеграла, который был бы независим от интеграла энергии H.

12 Переменные «действие-угол»

На инвариантных торах вполне интегрируемых систем можно ввести специальные координаты I, φ, называемые переменными «действие-угол», обладающие следующими свойствами

1. $dp \wedge dq = dI \wedge d\varphi$
2. $H = H(I)$
3. φ — угловые координаты

[7]Доказательство можно найти в В.В. Козлов, Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем, Докл. АН СССР, 249:6 (1979), 1299–1302

Опишем процесс построения переменных «действие-угол» в случае системы с одной степенью свободы. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой определена функция $H\colon D \to \mathbb{R}$ (гамильтониан). Будем рассматривать автономную гамильтонову систему $(D, dp \wedge dq, H)$. Предположим, что уравнение $H(p,q) = h$ задает при $h \in (a,b)$ замкнутые кривые в D, которые мы обозначим γ_h

$$\gamma_h = \{p, q\colon H(p,q) = h\}$$

Определим функцию $I\colon (a,b) \to \mathbb{R}$

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_h} p dq$$

По формуле Стокса получаем, что $I(h)$ это площадь, ограниченная кривой γ_h, деленная на 2π.

Будем считать, что функция Гамильтона достаточно регулярна в точках, в которых $H(p,q) = h$ и $h \in (a,b)$. Под этим мы будем подразумевать, что

1. $\frac{\partial I}{\partial h} \neq 0$ при $h \in (a,b)$
2. Все решения уравнения $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ в области $a < H(p,q) < b$ располагаются на конечном числе непересекающихся кривых, каждая из которых пересекает γ_h ровно в одной точке при всех $h \in (a,b)$.

Итак, в области $a < H(p,q) < b$ у нас есть координаты p, q и некоторая функция $I(p,q)$. Найдем такую функцию $\varphi(p,q)$ в этой области, что I, φ будут каноническими координатами, т.е. $dp \wedge dq = dI \wedge d\varphi$.

Найдем производящую функцию $S(q,I)$ канонической замены

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$$

Поскольку I есть функция от h, и $H(p,q) = h$, то I — функция от p и q

$$I = I(h) = I(H(p,q))$$

Выразим из этого уравнения p через q и I. Для этого достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{\partial I}{\partial h} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$$

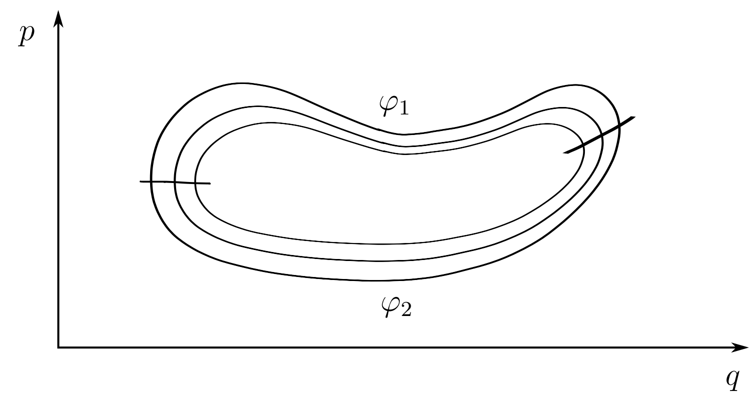


Рис. 2: Построение переменных «действие-угол» в простейшем случае.

Это условие выполнено всюду, кроме точек, в которых $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$. Рассмотрим область между двумя такими кривыми. В ней можно выразить $p = p(q, I)$. Положим

$$S(q, I) = \int p(q, I)\, dq + C(I)$$

Тогда

$$\varphi(p, q) = \frac{\partial S}{\partial I}\Big|_{I=I(p,q)} + c(I)\big|_{I=I(p,q)}, \qquad c(I) = \frac{\partial C(I)}{\partial I}$$

Покажем, что I и φ действительно являются координатами в рассматриваемой области. Для этого надо показать, что различным точкам в области соответсвуют различные I и φ. Пусть точки лежат на одной кривой γ_h, т.е. I фиксировано (если они лежат на разных кривых — нечего доказывать).

$$\varphi(p_2, q_2) - \varphi(p_1, q_1) = \frac{\partial}{\partial I} \int\limits_{q_1}^{q_2} p(q, I)\, dq = \int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{\partial p(q, I)}{\partial I}\, dq \neq 0$$

Выполнение последнего «неравенства» следует из того, что $\frac{\partial I}{\partial p}(p, q) \neq 0$ при всех $q \in (q_1, q_2)$.

Аналогичные построения можно произвести во всех областях, разделенных соответствующими кривыми. В каждой области получим

$$\varphi_j(p, q) = \frac{\partial S_j}{\partial I}\Big|_{I=I(p,q)} + c_j(I)\big|_{I=I(p,q)}$$

где $1 \leqslant j \leqslant N$ и N — число рассматриваемых областей. Положим $c_1 = 0$, а остальные функции c_j выберем таким образом, чтобы переход от φ_j к φ_{j+1} был непрерывным при $N-1 \geqslant j \geqslant 1$. Посмотрим, какое приращение получит переменная φ при обходе кривой γ_h

$$\Delta\varphi = \int\limits_{\gamma_h} d\varphi = \frac{\partial}{\partial I}\int\limits_{\gamma_h} pdq = 2\pi$$

Т.е. φ — угловая переменная с периодом 2π.

Пример. Переменные «действие-угол» для гармонического осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

Можно проверить, что формулы

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}}\cos\varphi, \quad p = \sqrt{2I\omega}\sin\varphi$$

задают требуемую каноническую замену.

Действительно, из выражения для площади эллипса получаем, что $I = h/\omega = H(p,q)/\omega$. Пусть $q^*(I) > 0$ такое значение, что $h(I) = \omega^2(q^*(I))^2/2$. Поскольку $p = \sqrt{2h - \omega^2 q^2} = \sqrt{2\omega I(p,q) - \omega^2 q^2}$, то $\varphi(p,q)$ (в области $p > 0$) при $q \in [-q^*, q^*]$ вычисляется с помощью несобственного интеграла

$$\varphi(p,q) = \int\limits_{q^*}^{q} \frac{\omega\, dq}{\sqrt{2\omega I(p,q) - \omega^2 q^2}}$$

Здесь, конечно, $I(p,q) = I$ — постоянная величина вдоль пути интегрирования. Мы считаем, что $\varphi(0, q^*) = 0$ (т.е. угол отсчитывается от нуля). Этот интеграл можно взять

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2I/\omega - q^2}}{q} = \frac{p}{\omega q}$$

Учитывая равенство $\omega I = (p^2 + \omega^2 q^2)/2$, получаем требуемые выражения для q и p в рассматриваемой области. Аналогично можно рассмотреть нижнюю полуплоскость $p < 0$.

13 Усреднение

Общая идея теории усреднения может быть изложена следующим образом. Пусть у нас есть система

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varepsilon), \quad \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi)$$

здесь $I \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \mathbb{T}^k$. Рассмотрим также усредненную систему

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J), \quad \bar{g}(J) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_0^{2\pi} g(J, \varphi)\, d\varphi$$

Можно ожидать, что в некоторых случаях решения первоначальной системы $I(t)$ близки к решениям $J(t)$ (при одинаковых начальных условиях). В общем случае, конечно, это не так, что показывает следующий
Пример (Арнольд). Пусть дана система

$$\dot{I}_1 = \varepsilon, \quad \dot{I}_2 = 2\varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2$$

После усреднения имеем систему

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \quad \dot{J}_2 = 0$$

Их решения при $I_1(0) = 1$, $I_1(0) = 1$, $\varphi_1(0) = \pi/3$, $\varphi_2(0) = 0$: $J_1 = \varepsilon t + 1$, $J_2 = 1$, $I_1 = 1 + \varepsilon t$, $I_2 = 1 + \varepsilon t$, $\varphi_1 = \pi/3 + \int I_1\, dt$, $\varphi_2 = \int I_2\, dt$. На временах порядка $1/\varepsilon$ решения будут отличаться на величину порядка единицы, а хотелось бы получить величину порядка ε.
Лемма Гронуола. Пусть $a, b, c, t > 0$ и

$$|\dot{z}| \leqslant a|z| + b$$

и $|z(0)| < c$. Тогда

$$|z(t)| \leqslant (c + bt)e^{at}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\dot{y} = ay + b$ с начальным условием $y(0) = c$. Решение этого уравнения $y = (c + b/a - b/a \cdot e^{-at})e^{at}$. Поэтому $y \leqslant (c + bt)e^{at}$. В свою очередь, $|\dot{z}| \leqslant \dot{y}$ $\square$

Рассмотрим систему

$$\dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi)$$
$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi)$$

Здесь $\varphi \in S^1$ — угловая переменная, $I \in G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Рассмотрим усредненную систему

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J)$$
$$\bar{g}(J) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(J,\varphi)\,d\varphi$$

Обозначим через $I(t)$, $\varphi(t)$ решение неусредненной системы с начальным условием $I(0)$, $\varphi(0)$ и через $J(t)$ решение усредненной системы с тем же начальным условием $J(0) = I(0)$

Теорема. Пусть

1. Функции ω, f, g определены, когда $I \in G$ и в G ограничены до производных второго порядка включительно

   $$\|f\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1, \quad \|g\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1, \|\omega\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1$$

   здесь

   $$\|f\|_{C^2(G\times S^1)} = \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} |f| + \sum_{i=1}^{n} \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial f}{\partial I_i}\right| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right| +$$
   $$+ \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial I_i \partial I_j}\right| + \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right| + \sum_{i=1}^{n} \sup_{(I,\varphi)\in G\times S^1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial I_i \partial \varphi}\right|$$

2. В области G выполнено $\omega(I) > c > 0$

3. При $0 \leqslant t \leqslant 1/t$ точка $J(t)$ принадлежит G с окрестностью d

   $$J(t) \in G - d$$

Тогда при достаточно малом ε для всех $0 \leqslant t \leqslant 1/t$

$$|I(t) - J(t)| < \varkappa(c, c_1, d)\varepsilon$$

Доказательство. Сделаем замену (точнее, пока что просто рассмотрим такую функцию P — нам надо будет еще доказать, что при малых ε она будет задавать замену переменных)

$$I \mapsto P = I + \varepsilon k(I,\varphi)$$

Вдоль решений имеем

$$\dot{P} = \dot{I} + \varepsilon\frac{\partial k}{\partial I}\dot{I} + \varepsilon\frac{\partial k}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \varepsilon\left[g(I,\varphi) + \frac{\partial k}{\partial\varphi}\omega(I)\right] + \varepsilon^2\frac{\partial k}{\partial I}g + \varepsilon^2\frac{\partial k}{\partial\varphi}f$$

Общая идея состоит в том, чтобы с помощью функции k сделать выражение в квадратных скобках похожим на случай усредненной системы. Тогда P будет близко к J, а также P близко к I (по построению). Придадим этим рассуждениям строгий смысл.

Положим во всех точках $I \in G - \alpha$, для некоторого $\alpha > 0$

$$k(I,\varphi) = -\frac{1}{\omega(I)}\int\limits_0^{\varphi}(g(I,\varphi) - \bar{g}(I))\,d\varphi$$

Из условий 1) и 2) получаем, что $\|k\|_{C^2((G-\alpha)\times S^1)} < c_2(c, c_1)$ (c_2 можно выбрать так, что она не зависит от α — достаточно выбрать c_2 для $\alpha = 0$). Покажем, что при достаточно малых ε отображение $I \mapsto P = I + \varepsilon k(I,\varphi)$ является диффеоморфизмом области $G-\alpha$ и ее образа $P(G-\alpha)$ (переменную φ здесь считаем параметром).

Функция k в области $G - \alpha$ липшецева с некоторой константой L, зависящей от α и c_2. Пусть I_1 и I_2 — две точки в $G - \alpha$.

$$|P(I_1) - P(I_2)| = |I_1 - I_2 + \varepsilon(k(I_1) - k(I_2))| \neq 0$$

при достаточно малых ε (следует из липшецевости k). Считаем также, что ε настолько мало, что никакая точка из $G - \alpha$ не сдвигается отображением $P(I)$ более, чем на α и в $G-2\alpha$ определено обратное отображение $I(P)$, т.е. можно записать

$$I = P + \varepsilon h(P,\varphi,\varepsilon)$$

Притом при всех достаточно малых ε выполнена оценка $\|h\|_{C^2((G-2\alpha)\times S^1)} < c_3(c_2,\alpha) = c_3(c, c_1, \alpha)$.

Таким образом, в области $G-2\alpha$ имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{P} = \varepsilon\bar{g}(P) + R(P,\varphi)$$

Притом при малых ε

$$\|R\|_{C^2((G-2\alpha)\times S^1)} < c_5(c_1, c_2, c_3)\varepsilon^2 = c_5(c, c_1, \alpha)\varepsilon^2$$

Пусть теперь $\alpha = d/3$. Рассмотрим уравнение $\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J)$ в $G - d$. Пусть $J(0)$ — его начальное условие. Тогда $P(J(0)) = P(0) \in G - 2\alpha$. Пусть $z(t) = P(t) - J(t)$, где $P(t)$ и $\varphi(t)$ — решение соответствующего уравнения с начальными условиями $P(0)$ и $\varphi(0)$. Можно записать

$$\dot{z} = \varepsilon(\bar{g}(P) - \bar{g}(J)) + R(P, \varphi)$$

Если отрезок $[P, J]$ лежит в $G - 2\alpha$, то

$$|\bar{g}(P) - \bar{g}(J)| \leqslant \sup_{I \in G - 2\alpha} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial I} \right\| |z|$$

В таком случае можем записать

$$|\dot{z}| \leqslant \varepsilon c_6(c_1)|z| + c_5 \varepsilon^2$$

Из леммы Гроноула

$$|z(t)| < (\varepsilon c_2(c, c_1) + c_5(c, c_1, d)\varepsilon^2 t)e^{c_6(c_1)\varepsilon t}$$

Получаем, что при $t \leqslant 1/\varepsilon$ выполнено $|z(t)| < c_7(c, c_1, d)$. Поскольку $|P(t) - I(t)| < \varepsilon c_2(c, c_1)$, то

$$|I(t) - J(t)| < \varepsilon \varkappa(c, c_1, d)$$

Что завершает доказательство □

Эта теорема дает лучшую возможную оценку. Рассмотрим систему

$$\dot{I} = \varepsilon \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = 1$$

После усреднения получим

$$\dot{J} = 0$$

Решение точной системы: $I(t) = I(0) - \varepsilon \cos(\varphi(0) + t)$. Решение усредненной системы: $J(t) = I(0)$.

14 Классическая схема теории возмущений

Рассмотрим близкую к интегрируемой систему с гамильтонианом $H(I, \varphi)$

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Постараемся найти каноническую замену переменных

$$(I, \varphi) \mapsto (J, \psi)$$

которая бы приводила гамильтониан к виду $\mathscr{H}(J, \varepsilon)$, т.е. новые координаты должны быть координатами «действие-угол» для возмущенной системы. Для этого будем искать соответствующую производящую функцию канонической замены

$$S(J, \varphi) = S_0(J, \varphi) + \varepsilon S_1(J, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Замену будем искать такую, чтобы при $\varepsilon = 0$ она была тождественной. В этом случае надо положить $S_0 = J\varphi$. Если производящая функция $S(J, \varphi)$ задана, то переход к новым переменным осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + O(\varepsilon^2) \\ I &= \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Чтобы получить выражение функции Гамильтона через новые координаты, достаточно подставить в него выражения $I(J, \psi)$ и $\varphi(J, \psi)$, полученные из уравнений, записанных выше. Поскольку мы хотим, чтобы новый гамильтониан зависел только от переменных J, то ограничимся тем, что подставим в $H(I, \varphi, \varepsilon)$ выражение $I(J, \varphi)$ (второе уравнение выше). Получим

$$\mathscr{H}_0(J) + \varepsilon \mathscr{H}_1(J) + O(\varepsilon^2) = H_0(J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon H_1(J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

В нулевом приближении по малому параметру получаем

$$\mathscr{H}_0 = H_0(J)$$

В первом порядке по ε получаем уравнение

$$\mathscr{H}_1(J) = \sum_j \frac{\partial H_0(J)}{\partial J_j} \frac{\partial S_1(J, \varphi)}{\partial \varphi_j} + H_1(J, \varphi)$$

Если ввести обозначение для набора частот ω

$$\omega(J) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}$$

то это уравнение можно записать в следующем виде

$$\mathscr{H}_1(J) = \left\langle \omega(J), \frac{\partial S_1(J,\varphi)}{\partial \varphi} \right\rangle + H_1(J,\varphi)$$

Здесь и далее с помощью $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы обозначаем суммирование соответствующих компонент от 1 до n (мы рассматриваем систему с n степенями свободы).

Чтобы решить это уравнение, воспользуемся следующим методом. Разложим функции $H_1(J,\varphi)$ и $S_1(J,\varphi)$ в ряды Фурье

$$H_1(J,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_1^k(J) e^{i\langle k,\varphi\rangle}, \quad S_1(J,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} s_1^k(J) e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

Тогда

$$\left\langle \omega(J), \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} i\langle \omega(J), k\rangle s_1^k e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

Для $k = 0$ получаем, что

$$\mathscr{H}_1(J) = h_1^0(J)$$

Для $k \neq 0$ получаем

$$s_1^k = -\frac{h_1^k(J)}{i\langle \omega(J), k\rangle}$$

Аналогичным образом (формально) можно найти функции $S_2(J)$, $S_3(J)$ и т.д. К сожалению, полученный ряд $S_0(J) + \varepsilon S_1(J) + ...$ не только может не быть сходящимся (а это условие нам необходимо, если мы действительно ищем некоторую производящую функцию, а не просто оперируем формальными выражениями, которые могут не иметь смысла), но может быть даже не определен на всюду плотном множестве в $\mathbb{R}^n$. В частности, проблемы, связынные с неопределенностью функции S_1 могут возникнуть на резонансных поверхностях

$$\Gamma_k = \{J \in \mathbb{R}^n \colon \langle \omega(J), k\rangle = 0,\, h_1^k(J) \neq 0\}$$

Аналогичные трудности возникают и при рассмотрении следующих приближений S_i, $i > 1$. Тем не менее, в конкретных задачах может быть полезно провести только лишь конечное число (N) шагов классической схемы теории возмущений и перейти к гамильтониану вида $\mathscr{H}(J,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})$, т.е. возможно повысить порядок малости возмущения (при этом все же замена может быть не определена на конечном числе резонансных поверхностей Γ_k).

15 Теорема Пуанкаре о неинтегрируемости

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H(I,\varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Считаем, что $I \in D$, D — область в $\mathbb{R}^n$. Также считаем, что в D система невырождена в следующем смысле

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0, \quad I \in D$$

Будем искать первый интеграл возмущенной ($\varepsilon \neq 0$) системы $F(I,\varphi,\varepsilon)$, предполагая, что он гладко зависит от параметра ε. В частности, он может быть разложен в ряд Тейлора

$$F(I,\varphi,\varepsilon) = F_0(I,\varphi) + \varepsilon F_1(I,\varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Поскольку функция F должна быть первым интегралом, то $\{H,F\} = 0$, т.е.

$$\{H,F\} = \{H_0,F_0\} + \varepsilon(\{H_0,F_1\} + \{H_1,F_0\}) + O(\varepsilon^2) = 0$$

Сначала покажем, что F_0 не зависит от φ. Действительно, если

$$F_0 = \sum_{k\in\mathbb{R}^n} f_0^k(I) e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

тогда из условия $\{H_0,F_0\} = 0$ получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} i\langle \omega(I),k\rangle f_0^k(I) e^{i\langle k,\varphi\rangle} = 0$$

Следовательно, $\langle \omega(I),k\rangle f_0^k(I) = 0$. Из невырожденнности невозмущенного гамильтониана получаем, что при $k \neq 0$, $\langle \omega(I),k\rangle \neq 0$ для почти всех $I \in D$, поэтому $f_0^k(I) = 0$ при $k \neq 0$.

Рассмотрим теперь слагаемое порядка ε в равенстве $\{H,F\} = 0$. Если

$$H_1(I,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_1^k(I) e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

Получаем

$$\left\langle \frac{\partial H_0}{\partial I}, k\right\rangle f_0^k - \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial I}, k\right\rangle h_0^k = 0$$

Рассмотрим множества ($k \neq 0$)

$$\Gamma_k = \{I \in D \colon \langle \omega(I), k \rangle = 0,\, h_1^k(I) \neq 0\}$$

Назовем множество $B = \cup_k \Gamma_k$ вековым множеством нашей системы. В точках B градиенты функций H_0 и F_0 лежат в плоскости, которая перпендикулярна k (для некоторого k, зависящего от I).

Назовем систему интегрируемой по Пуанкаре, если она имеет полный набор гладких первых интегралов $F^j(I, \varphi, \varepsilon)$, причем градиенты функций $F_0^j = F^j(I, \varphi, 0)$ независимы хотя бы в одной точке области D.

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что верна

Теорема (Пуанкаре). Предположим, что B всюду плотно в D. Тогда система неинтегрируема по Пуанкаре.

16 Критерий формальной интегрируемости для случая возмущения тригонометрическим полиномом

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(\varphi)$$

Здесь

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum a_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2}(AI, I), \quad \det A \neq 0$$

Функция H_1 есть тригонометрический полином, т.е.

$$H_1 = \sum_k h_k e^{ik\varphi}$$

притом только конечное число $h_k \in \mathbb{C}$ не равны нулю. Если в новых координатах функция Гамильтона имеет вид

$$\mathscr{H}(J, \varepsilon) = \mathscr{H}_0(J) + \varepsilon \mathscr{H}_1(J) + \ldots$$

то производящая функция находится из системы

$$\begin{aligned}
&\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_k} + H_1(\varphi) = \mathscr{H}_1(J)\\
&\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial S_2}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_i}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_j} = \mathscr{H}_2(J)\\
&\dots\\
&\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial S_m}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(a_{ij}\sum_{p+q=m}\frac{\partial S_p}{\partial \varphi_i}\frac{\partial S_q}{\partial \varphi_j}\right) = \mathscr{H}_m(J)\\
&\dots
\end{aligned}$$

Если искать функции S_m в виде разложения

$$S_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} S_m^k(J)e^{ik\varphi}$$

то

$$S_1^k = ih_k/(\omega, k)$$

и

$$S_m^k = \frac{1}{2i(\omega,k)}\sum_{u+v=m,\sigma+\delta=k}\langle\sigma,\delta\rangle S_u^\sigma S_v^\delta$$

Рассмотрим вопрос о существовании полного набора формальных первых интегралов вида

$$F(I,\varphi) = F_0 + \varepsilon F_1 + ...$$

где F_i — аналитические функции. Отметим, что ряд формальный, т.е. мы не интересуемся его сходимостью.

Теорема (Козлов, Трещев)[8]**.** Пусть квадратичная форма H_0 положительно определена. Тогда система имеет полный набор формально аналитических по ε первых интегралов независимых при $\varepsilon = 0$, тогда и только тогда, когда все $h_k \neq 0$ расположены на попарно ортогональных в метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$ прямых.

[8]Доказательство в В. В. Козлов, Д. В. Трещев, Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений, Матем. сб., 135(177):1 (1988), 119–138

17 Различные версии КАМ теоремы

Определение. Вектор частот $\omega \in \mathbb{R}^n$ называется диофантовым, если существуют $c, \gamma > 0$ такие, что для всех $k \neq 0$

$$|\langle k, \omega \rangle| > c/|k|^\gamma$$

Будем говорить, что $\omega \in \mathscr{D}(c, \gamma)$, если ω диофантов с параметрами c, γ. Видно, что резонанстный вектор обязательно является недиофантовым.
Утверждение. Почти все векторы частот — диофантовы.
Доказательство. Рассмотрим случай $n = 2$. Положим $c \in (0, 1)$ и $\gamma > 1$. Будем обозначать $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Заметим, что если вектор ω является диофантовым, то и $\lambda\omega$, $\lambda \neq 0$ — тоже (с другой константой c), поэтому достаточно рассмотреть вектора, лежащие на прямой $\omega_2 = 1$. Тогда ω_1 не является диофантовым вектором, если для некоторого ненулевого k выполнено неравенство

$$|k_1\omega_1 + k_2| < c/|k|^\gamma$$

Если k фиксировано, то обозначим через $L(k)$ меру тех ω_1, для которых выполняется неравенство выше. Элементарно рассматриваются следующие случаи:

- Если $k_1 > 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 > 0$, т.е. $\omega_1 > -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 < (c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.
- Если $k_1 > 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 < 0$, т.е. $\omega_1 < -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 > (-c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.
- Если $k_1 < 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 > 0$, т.е. $\omega_1 < -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 > (c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.
- Если $k_1 < 0$ и $k_1\omega_1 + k_2 < 0$, т.е. $\omega_1 > -k_2/k_1$, тогда получаем, что должно быть выполнено $\omega_1 < (-c/|k|^\gamma - k_2)/k_1$.

Во всех случаях, когда $k_1 \neq 0$, мы получаем $L(k) = 2c/|k_1||k|^\gamma$. Поскольку при $k_1 = 0$ имеем $L(k) = 0$ (мы так выбрали c и γ), то

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} L(k) \leqslant \sum_{k_1 \neq 0,\, k_2} 2c/|k_1||k|^\gamma$$

Можно показать, что этот ряд сходится, поэтому

$$\operatorname{meas}\left(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{c>0} \mathscr{D}(c,\gamma)\right) = 0$$

Чтобы показать, что ряд сходится, покажем, что для некоторой постоянной $C = C(\gamma)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} < C \frac{1}{|k_1|^{\gamma-1}}$$

Покажем, что это действительно так.

$$\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} = \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2\sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} \leqslant \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2\int_0^\infty \frac{dk_2}{(k_1^2+k_2^2)^{\gamma/2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2^{1+\gamma/2}\int_0^\infty \frac{dk_2}{(|k_1|+k_2)^\gamma} = \frac{1}{|k_1|^\gamma} + \frac{2^{1+\gamma/2}}{\gamma-1}\frac{1}{|k_1|^{\gamma-1}}$$

Утверждение о том, что почти все вектора являются диофантовыми остается верным и в случае произвольного n.

Теорема (Колмогоров, Арнольд)[9]. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varepsilon, \varepsilon)$$

здесь $\varphi \in \mathbb{T}^n$, $I \in D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $I_0 \in D$ и

1. Вектор $\omega(I_0)$ диофантов

2. Невозмущенная система невырождена на I_0, т.е.

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right)\Bigg|_{I=I_0} \neq 0$$

3. Функция H вещественно-аналитична в окрестности тора I_0.

[9]Доказательство можно найти в В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 18:6(114) (1963), 91–192

Тогда инвариантный тор I_0 невозмущенной системы при достаточно малом возмущении не разрушится, а лишь слегка деформируется и движение на нем по-прежнему будет условно периодическим с частотами $\omega(I_0)$.
Неавтономный вариант теоремы. Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t, \varepsilon)$$

(I, φ) — канонические переменные, $I \in D \subset \mathbb{R}^n$, φ — угловая переменная. H зависит 2π-периодическим образом от t. Пусть $I_0 \in D$ таково, что

1. Вектор $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega(I_0) \\ 1 \end{pmatrix}$ диофантов
2. Невозмущенная система невырождена на I_0
3. Функция H вещественно-аналитична в окрестности тора I_0.

Тогда инвариантный тор I_0 невозмущенной системы при достаточно малом возмущении не разрушится, а лишь слегка деформируется и движение на нем по-прежнему будет условно периодическим с частотами $\bar{\omega}(I_0)$.
Доказательство. Рассмотрим новую гмильтонову систему с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = H + E$$

здесь E — новая переменная «действие», канонически сопряженная углу t. Без потери общности будем считать, что $I_0 = 0$. Система с гамильтонианом $\mathscr{H}$ вырождена при $I_0 = 0$ и $E = 0$. Рассмотрим систему с гамильтонианом $e^{\mathscr{H}}$. Траектории ее решений совпадают с траекториями решений системы с гамильтонианом $\mathscr{H}$, но проходятся с другой скоростью (показать). При этом система с гамильтонианом $e^{\mathscr{H}}$ уже будет невырожденной. Действительно,

$$\begin{aligned} e^{H_0+E} &= \exp\left(H_0(I_0) + \langle\omega, I\rangle + \frac{1}{2}\langle\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0)I, I\rangle + E + O(|I|^3)\right) \\ &= e^h\left(1 + \langle\omega, I\rangle + E + \frac{1}{2}\langle\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0)I, I\rangle + \frac{1}{2}(E + \langle\omega, I\rangle)^2 + O((|I| + |E|)^3)\right) \end{aligned}$$

Получаем

$$\det \frac{\partial^2 e^{H_0+E}}{\partial(I, E)^2}(I_0, E) = \det \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0) \neq 0$$

Таким образом, можно применить предыдущую теорему.
Изоэнергетический вариант теоремы. Пусть инвариантный тор I_0 невозмущенной системы лежит на уровне энергии $H_0 = h$ и выполнены следующие условия

1. Частоты $\omega(I_0)$ диофантовы

2. Невозмущенная система на этом торе изоэнергетически невырождена, т.е.
$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0) & \omega(I_0) \\ \omega^T(I_0) & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

3. Функция H вещественно-аналитическая

Тогда при достаточно малых ε на уровне энергии $H = h$ возмущенноц системы имеется ивариантный тор, который близок к невозмущенному, а частоты движения по нему задаются формулой $\bar{\omega} = (1 + O(\varepsilon))\omega$.

Если размерность фазового пространства больше 4, то инвариантные торы не разделяют его и даже при сохранении большинства инвариантных торов возможна «диффузия» переменных действия, т.е. траектория решения может покинуть окрестность инвариантного тора при сколь угодно малом возмущении.
Пример (Арнольд)[10]**.** Рассмотрим систему с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$
$$H_0 = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2), \quad \varepsilon H_1 = \varepsilon(\cos\varphi_1 - 1)(1 + \mu\beta), \quad \beta = \sin\varphi_2 + \cos t$$

Теорема. Пусть $0 < A < B$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\mu_0 > 0$ такое, что при $0 < \mu < \mu_0$ система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ неустойчива: существует траектория, соединяющая область $I_2 < A$ с областью $I_2 > B$.

18 Расщепление сепаратрис

Сначала напомним, что такое отображение Пуанкаре. Пусть рассматривается произвольная система дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M$$

[10] В. И. Арнольд, О неустойчивости динамической системы со многими степенями свободы, Докл. АН СССР, 156:1 (1964), 9–12

Пусть $\gamma(t)$ — некоторое периодическое решение. Рассмотрим некоторую гиперповерхность $\Sigma \subset M$ такую, что γ пересекает ее трансверсально (т.е. не касается ее)

Для некоторой точки $x \in \Sigma$ рассмотрим решение, выходящее из нее. Предположим, что это решение возвращается на Σ. Тогда положим $P(x) = y$, где $y \in \Sigma$ — точка, в которую возвращается это решение в первый раз. Отображение P называется *отображением Пуанкаре*. Здесь $x_0 \in \Sigma$ — неподвижная точка отображения Пуанкаре, соответствующая первоначальному периодическому решению: $P(x_0) = x_0$.

Ясно, что P корректно определено в достаточно малой окрестности точки x_0: $P\colon O(x_0) \to \Sigma$. Переход от непрерывной динамической системы к дискретной иногда может быть удобен (например, для исследования устойчивости). Однако могут возникнуть трудности — $P^k(x)$ может не принадлежать $O(x_0)$, $x \in O(x_0)$ при некотором достаточно большом k.

В некоторых системах этой трудности можно избежать. Пусть система T-периодична по t:

$$\dot{x} = v(x,t), \quad x \in M$$

В таком случае корректно определено отображение за период (наличие какого-либо периодического решения, вообще говоря, не требуется):

$$P(x_0) = x(x_0, T)$$

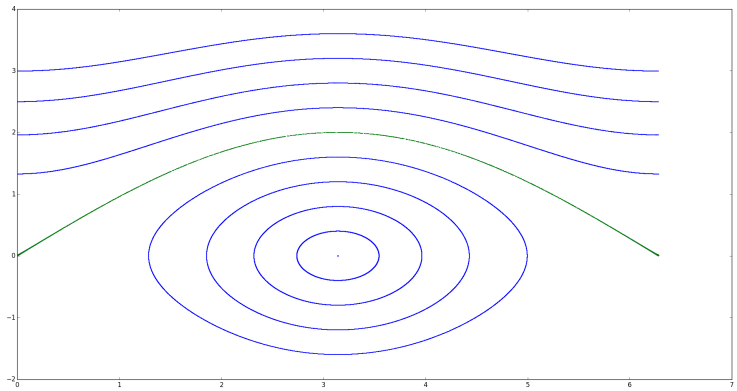
т.е. рассмотрим момент времени $t = 0$ и выберем произвольную точку $x_0 \in M$; $x(x_0, t)$ — решение, выходящее из этой точки; за период мы фактически вернемся на ту же самую гиперповерхность M в расширенном фазовом пространстве (с учетом периодичности системы по времени). Если $P(x_0) = x(x_0, T) = x_0$, то из точки x_0 выходит T-периодическое решение.

Рассмотрим конкретную систему с полутора степенями свободы (т.е. одна степень свободы + периодический по времени гамильтониан)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (p,q) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Считаем, что $H = H_0(p,q) + \varepsilon H_1(p,q,t) = \frac{1}{2}p^2 + \Omega \cos q + \varepsilon \theta(t) \cos q$ (2π-периодический по t).

Эта система описывает динамику маятника с колеблющейся точкой подвеса. Если $\varepsilon = 0$, то мы имеем обычную систему — маятник. Известно, что ее фазовый портрет имеет следующий вид (сепаратриса выделена цветом):



Множество, образуемое сепаратрисами в расширенном фазовом пространстве, образует некоторую поверхность. Обозначим ее W_0^s. Пусть p_0, q_0, t_0 принадлежит W_0^s, тогда решение, выходящее из этой точки, стремится к $p = q = 0$ при $t \to +\infty$. Т.е. W_0^s является асимптотической поверхностью нашего периодического решения. Индекс «s» означает, что это «устойчивая» асимптотическая поверхность (stable). Здесь слово «устойчивость» понимается не в смысле Ляпунова, а означает, что решения, начинающиеся на W_0^s, стремятся к $p = q = 0$ при $t \to +\infty$. Асимптотическая поверхность W_0^u называется «неустойчивой», когда любое решение, начинающееся на ней, стремится к $p = q = 0$ при $t \to -\infty$ (т.е. при обращении времени).

Пусть $x_0 = (p_0 = 0, q_0 = 0)$, тогда $P(x_0) = 0$. Если мы рассмотрим отображение Пуанкаре в окрестности точки x_0, то можно записать

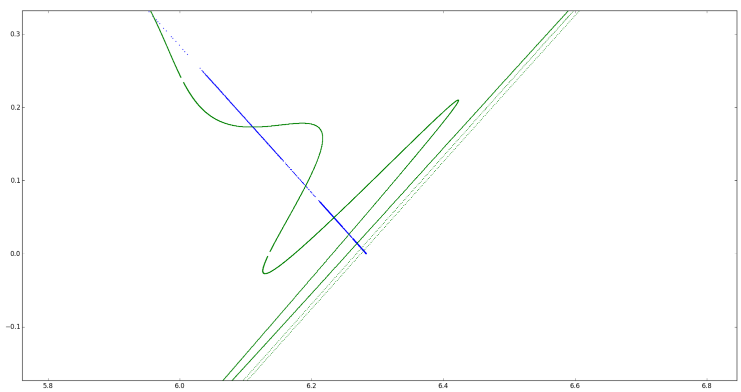
$$P(x) = 0 + Mx + o(|x|)$$

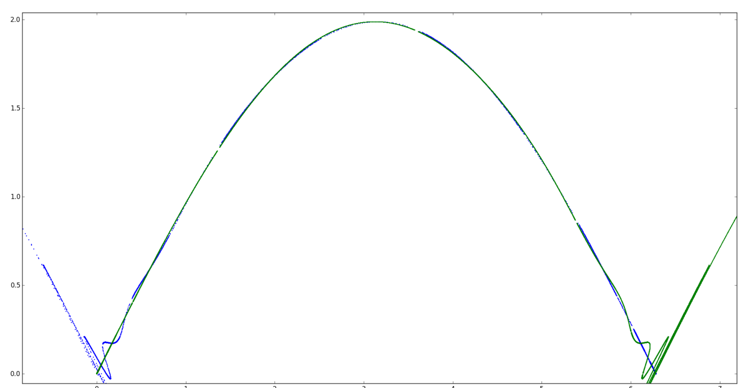
здесь M — матрица 2×2. Ее собственные значения (мультипликаторы) характеризуют динамику в окрестности париодичекой траектории (в линейном приближении). Периодическое решение называется гиперболическим, если оба его мультипликатора лежат вне едининчного круга и действительны.

У возмущенной системы ($\varepsilon \neq 0$) также будет существовать гиперболическое периодическое решение (это верно и в общем случае при малых

ε). Можно показать (теорема Адамара-Перрона), что в окрестности периодического решения будут существовать устойчивое и неустойчивое асимптотические многообразия $W_\varepsilon^{s,u}$, близкие к невозмущенным $W_0^{s,u}$. Их можно продожить до поверхностей, которые определены не только в окрестности решения, которые мы также обозначим $W_\varepsilon^{s,u}$. Несмотря на то, что $W_0^s = W_0^u$, вообще говоря, может быть, что $W_\varepsilon^s \neq W_\varepsilon^u$.

Изобразим сечение $W_\varepsilon^{s,u}$ плоскостью $t = 0$. Достаточно сложный вид асимптотических поверхностей в окрестности периодического решения обусловлен тем, что отображение Пуанкаре сохраняет площади (сохраняет форму $dp \wedge dq$).





В частности, видно, что W_ε^s и W_ε^u могут не совпадать при $\varepsilon \neq 0$. Количественная оценка «расщепления» дается следующим утверждением

Утверждние[11]**.** Пусть $\gamma(t) = (p(t), q(t))$ — решение уравнения при $\varepsilon = 0$ (сепаратриса). Можно считать, что $H_1(0,0,t) = 0$, поэтому следующий интеграл сходится

$$\mathscr{P}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\gamma(t+\tau), t)\, dt$$

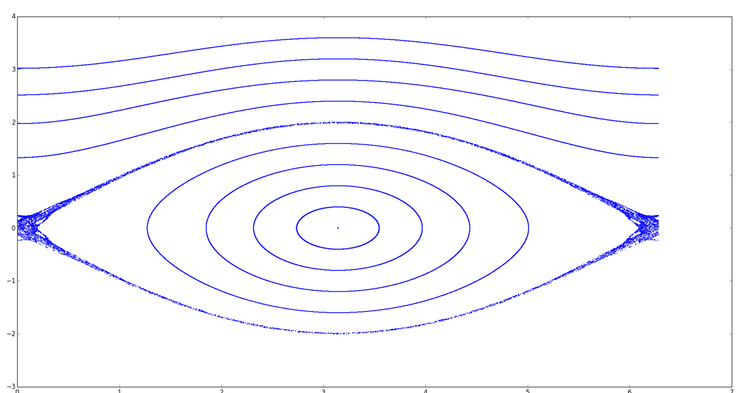
Несложно показать (упражнение), что

$$\frac{d\mathscr{P}}{d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}(\gamma(t+\tau), t)\, dt$$

Пусть τ_1, τ_2 — две последовательные невырожденные критические точки $\mathscr{P}$ (два простых последовательных нуля $\mathscr{P}'$), тогда площадь соответсвующей лунки

$$\mathscr{A}(\varepsilon) = |\varepsilon||\mathscr{P}(\tau_1) - \mathscr{P}(\tau_2)| + O(\varepsilon^2)$$

Расщепление сепаратрис является причиной зарождения хаотических траекторий в окрестности сепаратрисы:



Утверждние[12]**.** Пусть M^3 — трехмерное аналитическое многообразие, v — аналитическое векторное поле на M без положений равновесия.

[11] Доказательство, например, в Д.В. Трещев, Гамильтонова механика, Лекц. курсы НОЦ, 4, МИАН, М., 2006 , 64 с.

[12] В.В. Козлов, Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995, 429 с.

Пусть γ — гиперболическое периодическое решение $\dot{x} = v(x)$, W^s и W^u — устойчивая и неустойчивая асимптотическая поверхность к γ. Если W^s и W^u не совпадают и пересекаются, то система не допускает аналитического первого интеграла на M.

В частности, задача о движении маятника в переменном поле — неинтегрируемая. Также неинтегрируема задача о движении спутника по орбите

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu$$

Динамика вихрей на плоскости описывается гамльтоновой системой

$$\Gamma_s\dot{x}_s = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \Gamma_s\dot{y}_s = \frac{\partial H}{\partial x_s}$$

где

$$H = \frac{1}{2\pi}\sum_{s\neq k}\Gamma_s\Gamma_k \ln\sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$

Методом расщепления сепаратрис можно доказать неинтегрируемость задачи о движении 4 вихрей. Метод расщепления асимптотических поверхностей также применим к задаче о плоских течениях однородной идеальной жидкости в потенциальном поле. Также может быть применим в задачах о движении точки в ограничееной выпуклой области (бильярд Биркгофа).

Предварительные сведения

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество и $x \in U$. Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Говорят, что f дифференцируема в точке x, если существует представление

$$f(x+v) = f(x) + A \cdot v + o(\|v\|), \quad \text{при} \quad \|v\| \to 0, \quad v \in \mathbb{R}^m$$

Здесь $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, называемое дифференциалом (его обычно обозначают df или $\frac{\partial f}{\partial x}$).
Комментарий. Норма в определении может быть выбрана любой.
Неформальное определение. Функция называется дифференцируемой в точке, если она может быть приближена линейной функцией в малой окрестности этой точки.
Теорема. Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — открытое множество. Пусть

$$f(x_0, y_0) = 0$$

для некоторой пары $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и функция f дифференцируема в U и все ее частные производные непрерывны в U. Предположим, что

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

Тогда существует два открытых множества $I \in \mathbb{R}^m$ и $J \in \mathbb{R}^n$ и функция g из I в J такая, что $x_0 \in I$ и

$$f(x, g(x)) = 0$$

при всех $x \in I$ и $y_0 = g(x_0)$.
Комментарий. Мы будем в основном рассматривать бесконечно дифференцируемые функции, поэтому условие на частные производные выполняется автоматически. Задача — привести пример дифференцируемой функции с разрывной производной.
Пример. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Тогда всюду, кроме точек $x = \pm 1$, $y = 0$, можно выразить $y = \sqrt{1 - x^2}$ или $y = -\sqrt{1 - x^2}$.
Пример. Пусть $f(x, y) = x - Ay$, где A — квадратная матрица. Тогда теорема о неявной функции эквивалентна условию, что A обратима (т.е. y можно выразить через x из уравнения $x = Ay$).

Определение. [13] Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что M — k-мерное многообразие, если для каждой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ и $n-k$ бесконечно дифференцируемых функций $f_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n-k$ таких, что

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0 \quad ... \quad f_{n-k}(x) = 0\} = M \cap U$$

и векторы $\mathrm{grad} f_i$, $i = 1, ..., n-k$ линейно независимы в точке x.
Пример. Пусть M — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. Тогда она задается одним уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

M — двумерное многообразие.
Комментарий. Условие линейной независимости градиентов приводит к тому, что система уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0 \quad ... \quad f_{n-k}(x) = 0$$

может быть разрешена (по теореме о неявной функции) относительно некоторых $n-k$ переменных $x_{i_1} \cdots x_{i_{n-k}}$. Оставшиеся k переменных являются локальными координатами на M в окрестности данной точки. При этом локальные координаты могут быть выбраны многими способами. Смысл локальных координат в том, что это некоторые числовые параметры, которые взаимнооднозначно параметризуют точки некоторой части нашего многообразия. Также полезно представлять локальные координаты как набор координатных функций, заданных в некоторой части многообразия, т.е. каждая такая функция сопоставляет точке многообразия некоторое число (соответствующую координату точки).
Пример. В случае единичной сферы в $\mathbb{R}^3$ уравнение сферы может быть разрешено относительно одной из переменных. Например, в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ можно выразить x через y и z (т.е. независимых параметра два — y и z). Также в окрестности этой точки можно ввести координаты φ, θ, которые связаны с y и z следующим образом: $y = \cos\theta \sin\varphi$, $z = \sin\theta$ (если оба угла достаточно близки к 0).
Определение. Пусть M и N — два многообразия. Они называются гомеоморфными, если существует взаимнооднозначное отображение $f\colon M \to N$ такое, что f и f^{-1} — непрерывны.

[13] Несколько более общее определение многообразия через карты можно посмотреть во многих книгах по дифференциальной геометрии или топологии.

Определение. Пусть M и N — два многообразия. Они называются диффеоморфными, если существует взаимнооднозначное отображение $f\colon M \to N$ такое, что f и f^{-1} — дифференцируемы.

Определение. Пусть $\mu \in M$ — точка на k-мерном многообразии M и $x\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — бесконечно дифференцируемое отображение и $x(0) = \mu$ (ε — произвольное положительное малое число). Отображение x называется гладкой кривой, проходящей через точку μ.

Определение. Пусть M — k-мерное многообразие и $x, \tilde{x}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — гладкие кривые, проходящие через точку μ. Они называются эквивалентными, если в локальных координатах в окрестности точки μ выполнены условия

$$|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| = o(t), \quad t \to 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

Комментарий. Можно показать, что если эти условия выполнены в некоторых локальных координатах, то выполнены и в любых.

Определение. Пусть M — многообразие и x — некоторая гладкая кривая, проходящая через точку μ. Тогда $\dot{x}(0)$ (касательный вектор к кривой в точке μ) называется касательным вектором к многообразию M в точке μ.

Определение. Линейное пространство касательных векторов ко всевозможным кривым, проходящим через точку $\mu \in M$ называется касательным пространством к M в μ и обозначается $T_\mu M$.

Комментарий. Отметим два важных свойства касательных векторов. Первое — перенос векторов при отображениях. Пусть M и N — два многообразия (возможно, разной размерности) и $f\colon M \to N$ — гладкая функция (т.е. задается бесконечно дифференцируемыми функциями в локальных координатах) и x — кривая, проходящая через точку $\mu \in M$. Тогда, если задан вектор $v \in T_\mu M$, то $df(v) \in T_\nu N$, $\nu = f(\mu) \in N$. Второе — векторы могут рассматриваться как дифференцирования функций по направлению. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ и $v \in T_\mu M$. Тогда $v(f) = df(v)$ (по определению).

Замечание. В процессе вычислений важно различать «два вида единичных векторов»: обычно единичным вектором в данной системе локальных координат называется тот, который имеет все координаты кроме одной равные 0 и одну координату 1. Если на многообразии задана риманова метрика, то в приложениях (в механике) называют единичным вектор, если он параллелен единичному в первом смысле и его длина в римановой метрике равна 1 (очевидно, эти векторы могут быть различны

— достаточно рассмотреть случай полярных координат на плоскости).

Определение. Пусть M — многообразие, заданное $n-k$ уравнениями в $\mathbb{R}^n$

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0 \quad \dots \quad f_{n-k}(x) = 0$$

Тогда TM — многообразие, заданное в $\mathbb{R}^{2n}$ системой

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0 \quad \dots \quad f_{n-k}(x) = 0 \\
&g_1(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} y_n = 0 \\
&\dots \\
&g_{n-k}(x, y) = \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} y_n = 0
\end{aligned}$$

Многообразие TM называется касательным расслоением M.

Комментарий. Такая система действительно задает многообразие (несложно показать, что соответствующие градиенты линейно независимы). Его размерность в два раза больше, чем размерность M и равна $2k$. Если рассматривать TM как множество, то можно записать, что $TM = \bigcup\limits_{\mu \in M} T_\mu M$. Другими словами, TM есть объединение всех касательных пространств к M.

Определение. Пусть M — многообразие и $\mu \in M$ — некоторая его точка. Тогда линейная функция ω^1, определенная на касательных векторах к многообразию M в точке μ, называется ковектором в точке μ.

Замечание. Названия «ковектор», «1-форма», «кокасательный вектор» — синонимы.

Определение. Линейное пространство всевозможных ковекторов в точке $\mu \in M$ называется кокасательным пространством к M в μ и обозначается $T_\mu^* M$.

Используя кинетическую метрику на M, можно показать, что многообразия TM и $T^*M = \bigcup\limits_{\mu \in M} T_\mu^* M$ диффеоморфны (притом слои изоморфны как векторные пространства).

Таким образом, с топологической точки зрения пространства TM и T^*M механических задач полностью эквивалентны. Тем не менее, координаты касательных векторов и ковекторов изменяются различным образом при замене координат на M. Пусть $v \in T_\mu M$ и в локальных координатах $(q_1, \dots, q_n)$ имеет координаты $(v_1, \dots, v_n)$. Тогда после преобразования локальных координат $(Q_1(q), \dots, Q_n(q))$ новые координаты

$(V_1, ..., V_n)$ будут связаны со старыми соотношением (легко доказывается с использованием определения касательного вектора)

$$V_i = \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} v_j$$

Если же $\omega \in T^*_\mu M$, то новые координаты Ω_i связаны со старыми ω_i соотношением

$$\Omega_i = \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \omega_j$$

Например, компоненты $\dot{q}$ преобразуются по «векторному закону» при переходе от локальных координат q на M к другим локальным координатам, а компоненты обобщенных импульсов p — по «ковекторному», поэтому в автономном случае L — функция на TM, а H — на T^*M (оба утверждения просто проверяются).

Определение. Пусть X — множество и $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Пара (X, d) — метрическое пространство.

Определение. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится к некоторому элементу этого пространства.

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Пусть $f\colon X \to X$. Говорят, что f — сжимающее отображение, если существует $\alpha \in [0, 1)$ такое, что для любых $x, y \in X$ выполнено $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$.

Теорема. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — сжимающее отображение, тогда существует $x \in X$ такое, что $f(x) = x$ (неподвижная точка).

Некоторая дополнительная литература

Книги по механике:

- Д.В. Трещев, Гамильтонова механика.
- В.И. Арнольд, Математические методы классической механики.
- Я.В. Татаринов, Лекции по классической динамике.
- С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев, Теоретическая механика
- R. Abraham, J. Marsden, Foundations of Mechanics.

Книги и лекции по анализу и геометрии:

- Дж. Милнор, Теория Морса
- М.Э. Казарян, Calculus on Manifolds.
- М.Э. Казарян, Differential Geometry.
- А.Б. Скопенков, Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах.
- В.А. Зорич, Математический анализ.

По гамильтоновой механике, как и по другим классическим разделам математики, книг написано много, поэтому читателю не стоит ограничиваться приведенным списком литературы — надо всегда искать книгу, в которой будет написано понятным для него языком (все пишут и понимают по-разному).