Лекция 10.

Отделимость. Собственность. Дивизоры Вейля и Картье. Группа классов дивизоров и группа Пикара.

Отделимость и собственность

Как уже отмечалось, топология Зариского намного грубее “классической” топологии, поэтому, например, почти любая схема нехаусдорфова, а каждая нетерова схема квазикомпактна, несмотря на то, что множества их комплексных (или вещественных) точек с индуцированной топологией могут тем не менее быть хаусдорфовыми и некомпактными.

Упражнение 10.1. *Покажите, что схема хаусдорфова в топологии Зариского только в том случае, если она является несвязным объединением точек, и что множество комплексных точек любой аффинной схемы конечного типа над $\mathbb{C}$ хаусдорфово.*

Хотелось бы сформулировать алгебраическое свойство схем, заменяющее для них понятие хаусдорфовости. Таким свойством является отделимость. Чтобы сформулировать соответствующее определение нам понадобится определение диагонального морфизма.

Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Напомним, что существует схема $X \times_Y X$ с проекциями $p_1, p_2 : X \times_Y X_2 \to X$, обладающая следующим универсальным свойством: для любой схемы Z и морфизмов $\varphi_1, \varphi_2 : Z \to X$, таких что $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$ существует морфизм $\varphi : Z \to X \times_Y X$, такой что $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi$, $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi$. Эта схема называется *расслоенным квадратом* X над Y. Пусть теперь $Z = X$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = \mathsf{id}_X : X \to X$. Индуцированный морфизм $X \to X \times_Y X$ называтся *диагональным морфизмом* и обозначается Δ или $\Delta_{X/Y}$. По определению, имеем $p_1 \circ \Delta = p_2 \circ \Delta = \mathsf{id}_X$.

Упражнение 10.2. *Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$. Покажите, что диагональный морфизм $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ соответствует гомоморфизму умножения $A \otimes_B A \to A$.*

Определение 10.1. Морфизм схем $f : X \to Y$ называется *отделимым* (separated), если диагональный морфизм $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ является замкнутым вложением. Схема X называется *отделимой*, если отделим морфизм $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, то есть если замкнутым вложением является диагональный морфизм $\Delta_X : X \to X \times X$.

Из предыдущего упражнения следует, что любой морфизм аффинных схем отделим (гомоморфизм умножения сюръективен, так как в любом кольце есть единица!). В частности, любая аффинная схема отделима. Однако, отделимость не является локальным (по X, хотя и является локальным по Y) свойством, так как иначе всякий морфизм был бы отделимым.

Стандартным примером неотделимой схемы является прямая с двойной точкой. Пусть $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1$, $U_{12} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ и определим схему X как склейку U_1 и U_2 вдоль U_{12}. Полученная схема обладает морфизмом $p : X \to \mathbb{A}^1$, таким что p является изоморфизмом над $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, но $p^{-1}(0)$ — две точки (обозначим их P_1 и P_2). Покажем, что схема X неотделима. Для этого достаточно проверить, что точка $(P_1, P_2) \in X \times X$ лежит в замыкании диагонали $\Delta(X) \subset X \times X$. Рассмотрим вложения $\mathbb{A}^1 \cong U_1 \subset X$ и $\mathbb{A}^1 \cong U_2 \subset X$. По определению произведения получаем морфизм $\varphi : \mathbb{A}^1 \to X \times X$. Ясно, что $\varphi(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \subset \Delta(X)$, но $\varphi(0) = (P_1, P_2)$, и в силу непрерывности φ получаем $(P_1, P_2) \in \overline{\varphi(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})} \subset \overline{\Delta(X)}$.

Замечание 10.2. На самом деле, для проверки отделимости, достаточно проверять, что *диагональ*, то есть образ диагонального морфизма $\Delta_{X/Y}(X) \subset X \times_Y X$ замкнут. Действительно, так как $\Delta(X) \cong X$ (посредством морфизмов $\Delta_{X/Y} : X \to \Delta_{X/Y}(X)$ и, скажем, $p_1 : \Delta_{X/Y}(X) \to X$), а проверка сюръективности морфизма пучков $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \to (\Delta_{X/Y})_* \mathcal{O}_X$ локальна по X, то есть здесь можно считать X и Y аффинными.

Для проверки замкнутости диагонали, а значит и отделимости морфизма, удобно использовать следующий критерий.

Теорема 10.3 (валюативный критерий отделимости). *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем, причем схема X нетерова. Пусть R — кольцо нормирования с полем частных K, $i : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$ — вложение, соответствующее вложению $R \subset K$. Морфизм f отделим, тогда и только тогда, когда для любой коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad (*)$$

существует не более одного морфизма $\operatorname{Spec} R \to X$, сохраняющего ее коммутативность.

Доказательство. В кольце R ровно два простых идеала: нулевой идеал и максимальный идеал нормирования. Соответственно, на схеме $\operatorname{Spec} R$ ровно две точки, общая точка $\operatorname{Spec} K$ и замкнутая точка $\operatorname{Spec} k$, где k — поле вычетов R. Заметим, что морфизм $\varphi : \operatorname{Spec} R \to X$ однозначно определяется своими ограничениями на $\operatorname{Spec} K$ и $\operatorname{Spec} k$. Действительно, если $\varphi(\operatorname{Spec} k) = x \in X$ и $U = \operatorname{Spec} A$ — аффинная окрестность точки x, то φ в силу непрерывности пропускается через U и однозначно определяется гомоморфизмом колец $A \to R$, который в свою очередь однозначно определяется гомоморфизмом колец $A \to K$, так как $R \subset K$, то есть ограничением морфизма φ на $\operatorname{Spec} K$.

Пусть теперь f отделим, но $\varphi_1, \varphi_2 : \operatorname{Spec} R \to X$ два разных морфизма, сохраняющих коммутативность диаграммы. В силу вышесказанного $\varphi_1(\operatorname{Spec} k) \neq \varphi_2(\operatorname{Spec} k)$. Так как $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$ в силу коммутативности нижнего треугольника диаграммы, то найдется морфизм схем $\varphi : \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$, такой что $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi$ и $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi$. Заметим, что $\varphi(\operatorname{Spec} K) = (\varphi_1(\operatorname{Spec} K), \varphi_2(\operatorname{Spec} K)) \in \Delta(X)$ в силу коммутативности верхнего треугольника диаграммы. С другой стороны, $\varphi(\operatorname{Spec} k) \in \overline{\varphi(\operatorname{Spec} K)} \subset \overline{\Delta(X)}$, в то время как $\varphi(\operatorname{Spec} k) = (\varphi_1(\operatorname{Spec} k), \varphi_2(\operatorname{Spec} k)) \notin \Delta(X)$.

Предположим теперь, что f неотделим. Значит диагональ $\Delta(X) \subset X \times_Y X$ незамкнута. Следовательно, найдется открытое аффинное подмножество $U = \operatorname{Spec} A \subset X \times_Y X$ и пара простых идеалов $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \subset A$, так что точка u', соответствующая идеалу $\mathfrak{p}'$ лежит в $\Delta(X)$, а точка u, соответствующая идеалу $\mathfrak{p}$ не лежит в $\Delta(X)$ и локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'$ одномерно. Пусть K — поле частных кольца $A/\mathfrak{p}'$, а R — целое замыкание локального кольца $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'$ в K.

Упражнение 10.3. *Целое замыкание нетерова локального целостного кольца размерности 1 в конечном расширении его поля частных — кольцо дискретного нормирования.*

Итак, R — кольцо нормирования с полем частных K. Рассмотрим композицию естественных отображений $A \to A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}' \to R$ и пусть $\varphi : \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} A \subset X \times_Y X$ соответствующий морфизм схем. Положим теперь $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi$, $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi : \operatorname{Spec} R \to X$. Заметим, что $f \circ \varphi_1 = f \circ p_1 \circ \varphi = f \circ p_2 \circ \varphi = f \circ \varphi_2$. С другой стороны, ограничение отображения φ на $\operatorname{Spec} K$ соответствует гомоморфизму $A \to A/\mathfrak{p}' = K$ и так как по предположению точка u' лежит на диагонали, имеем $\varphi_{1|\operatorname{Spec} K} = \varphi_{2|\operatorname{Spec} K}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму $(*)$, в которой верхняя стрелка — это $\varphi_{1|\operatorname{Spec} K} = \varphi_{2|\operatorname{Spec} K}$, а нижняя стрелка — это $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Ясно, что моррфизмы φ_1 и φ_2 сохраняют ее коммутативность, так что остается показать, что $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Действительно, в противном случае морфизм φ представлялся бы в виде композиции $\varphi = \Delta_{X/Y} \circ \varphi_1 = \Delta_{X/Y} \circ \varphi_2$ (в силу универсального свойства расслоенного произведения), а значит точка $\varphi(\operatorname{Spec} k)$ лежала бы на диагонали, но $\varphi(\operatorname{Spec} k)$ — это точка, соответствующая идеалу $\mathfrak{p}$ в A, то есть точка u, которая по предположению на диагонали не лежит. $\square$

Упражнение 10.4. *Пользуясь валюативным критерием докажите, что*

(i) *открытые и замкнутые вложения отделимы;*

(ii) *композиция отделимых морфизмов отделима;*

(iii) *отделимость сохраняется при замене базы (если морфизм $f : X \to Y$ отделим, то для любого морфизма $g : Y' \to Y$ (замена базы) проекция $X' = X \times_Y Y' \to Y'$ отделима);*

(iv) *произведение отделимых морфизмов отделимо;*

(v) *если $f \circ g$ отделимо, то g отделим.*

Упражнение 10.5. *Покажите, что множество комплексных точек отделимой схемы над полем $\mathbb{C}$ хаусдорфово относительно классической топологии.*

Теперь сформулируем свойство схем, заменяющее для них понятие компактности.

Определение 10.4. Морфизм $f : X \to Y$ называется *замкнутым*, если образ любого замкнутого подмножества в X замкнут в Y. Морфизм $f : X \to Y$ называется *универсально замкнутым*, если для любой замены базы $Y' \to Y$ морфизм $X' = X \times_Y Y' \to Y$ замкнут.

Примером замкнутого, но не универсально замкнутого морфизма является проекция из $\mathbb{A}^1$ в точку. Этот морфизм замкнут, так как любое подмножество точки замкнуто. Однако, меняя базу на $\mathbb{A}^1$ получаем проекцию $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, которая не является замкнутым морфизмом. Действительно, образом замкнутого множества с уравнением $xy = 1$ является $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

Определение 10.5. Морфизм $f : X \to Y$ называется *собственным* (proper), если он конечного типа, отделим и универсально замкнут.

Для проверки собственности морфизма тоже удобно использовать валюативный критерий.

Теорема 10.6 (валюативный критерий собственности). *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем конечного типа, причем схема X нетерова. Пусть R — кольцо нормирования с полем частных K, $i : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$ — вложение, соответствующее вложению $R \subset K$. Морфизм f собственный, тогда и только тогда, когда для любой коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad (*)$$

существует ровно один морфизма $\operatorname{Spec} R \to X$, сохраняющий ее коммутативность.

Доказательство. Допустим, что морфизм f собственный и дана диаграмма $(*)$. Пусть $X_R = X \times_Y \operatorname{Spec} R$. Рассмотрим морфизм схемы $\operatorname{Spec} K \to X_R$, соответствующий верхней и левой стрелкам диаграммы $(*)$, пусть точка $t' \in X_R$ — ее образ, и пусть T — замыкание точки t' в X_R. Обозначим через π ограничение проекции $X_R \to \operatorname{Spec} R$ на T. Так как морфизм $X_R \to \operatorname{Spec} R$ замкнут в силу универсальной замкнутости морфизма f, то множество $\pi(T)$ замкнуто в $\operatorname{Spec} R$. С другой стороны, $\pi(t') = i(\operatorname{Spec} K)$, следовательно $\pi(T) = \operatorname{Spec} R$. Выберем точку в $t \in T$ над замкнутой точкой в $\operatorname{Spec} R$ и пусть $U = \operatorname{Spec} A$ — аффинная окрестность точки t. Так как $t \in \overline{\{t'\}}$, имеем $t' \in \operatorname{Spec} A$.

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & X_R & \longrightarrow & X \\ & & & & {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & & & \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad (*)$$

Пусть $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \subset A$ — простые идеалы, соответствующие точкам $t', t \in \operatorname{Spec} A$. Рассмотрим гомоморфизмы $\alpha : A \to K$ и $\rho : R \to A$, соответствующие вложению $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ и проекции $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$. Ясно, что $\mathsf{Ker}\,\alpha = \mathfrak{p}'$ и $\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ — максимальный идеал в R. Кроме того, ясно что $\alpha \circ \rho : R \to K$ — естественное вложение. Следовательно, $A/\mathfrak{p}'$ — подкольцо в K, содержащее простой идеал $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}'$, пересечение которого с кольцом нормирования R совпадает с максимальным идеалом нормирования.

Упражнение 10.6. *Пусть K — поле, $R \subset K$ — кольцо нормирования, а $\mathfrak{m} \subset R$ — идеал нормирования. Если $A \subset K$ — подкольцо содержащее R и $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, такой что $\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{m}$, то $A = R$.*

Итак, $A/\mathfrak{p}' = R$. Получаем гомоморфизм $A \to R$, то есть морфизм схем $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} A$, компонируя который с вложением $\operatorname{Spec} A \to X_R$ и проекцией $X_R \to X$, получаем искомый морфизм $\operatorname{Spec} R \to X$. Этот морфизм единственный в силу отделимости морфизма f.

Предположим теперь, что выполняется критерий и установим собственность морфизма. В силу сделанных предположений и доказанного валюативного критерия отделимости достаточно проверить универсальную замкнутость морфизма f. Пусть $Y' \to Y$ — произвольная замена базы, $X' = X \times_Y Y'$, $f' : X' \to Y'$ — проекция, и пусть $Z \subset X'$ — замкнутое подмножество, такое что $f'(Z)$ не замкнуто в Y'. Тогда найдется открытое аффинное подмножество $U = \operatorname{Spec} A \subset Y'$ и пара простых идеалов $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \subset A$, так что точка u', соответствующая идеалу $\mathfrak{p}'$ лежит в $f'(Z)$, а точка u, соответствующая идеалу $\mathfrak{p}$ не лежит в $f'(Z)$ и локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'$ одномерно. Пусть далее u'' — точка в Z, такая что $f'(u'') = u'$, K — ее поле вычетов (так что $A/\mathfrak{p}'$ — подкольцо в K, причем K является конечным расширением поля частных кольца $A/\mathfrak{p}'$), а R — целое замыкание локального кольца $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'$ в K. Тогда по упр. 10.3 кольцо R — кольцо нормирования с полем частных K. По построению имеем морфизм $\operatorname{Spec} K \to Z$, компонируя который с вложением $Z \subset X'$ и проекцией $X' \to X$, получаем морфизм $\operatorname{Spec} K \to X$. С другой стороны, гомоморфизм колец $A \to A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}' \to R$ дает морфизм $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} A$, компонируя который с морфизмами $\operatorname{Spec} A \subset Y'$ и $Y' \to Y$, получаем морфизм $\operatorname{Spec} R \to Y$. Получаем диаграмму $(*)$, причем коммутативную по построению. Следовательно, существует морфизм $\operatorname{Spec} R \to X$, сохраняющий коммутативность диаграммы. Пользуясь универсальным свойством расслоенного произведения, поднимаем его до морфизма $\operatorname{Spec} R \to X'$. Ясно, что при этом морфизме замкнутая точка $\operatorname{Spec} R$ переходит в Z, а ее образ в Y' равен u, следовательно $u \in f'(Z)$, что противоречит сделанным предположениям. □

Упражнение 10.7. *Пользуясь валюативным критерием докажите, что*

(i) *замкнутые вложения собственны;*

(ii) *композиция собственных морфизмов собственна;*

(iii) *собственность сохраняется при замене базы (если морфизм $f : X \to Y$ собственный, то для любого морфизма $g : Y' \to Y$ (замена базы) проекция $X' = X \times_Y Y' \to Y'$ собственна);*

(iv) *произведение собственных морфизмов собственное;*

(v) *если $f \circ g$ собственный и f отделимый, то g собственный.*

Кроме того, ясно, что собственность, так же как и отделимость, является локальным по базе свойством.

Предложение 10.7. *Всякий проективный морфизм собственный.*

Доказательство. Воспользуемся валюативным критерим собственности. Рассмотрим диаграмму $(*)$. В силу перечисленных выше свойств можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, и $X = \mathbb{P}^N_A$. Сделав замену базы $\operatorname{Spec} R \to Y$ можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} R$ и $X = \mathbb{P}^N_R$. и нижняя стрелка в диаграмме $(*)$ — тождественный морфизм. Морфизм $\operatorname{Spec} K \to \mathbb{P}^N_R$ — это набор $(x_0, x_1, \dots, x_N) \in K^{N+1} \setminus \{0\}$ с точностью до умножения на константу. С другой стороны, морфизм $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^N_R$ — это набор $(y_0, y_1, \dots, y_N) \in R^{N+1}$, такой что не все y_i лежат в идеале нормирования (только тогда соответствующий морфизм $R^{N+1} \to R$ сюръективен). Иначе говоря, это набор элементов в K^{N+1}, такой что их нормирования неотрицательны, причем нормирование одного из элементов равно нулю. Ограничение такого морфизма на $\operatorname{Spec} K$ задается тем же набором эелементов. Поэтому надо убедиться, что для любого набора $(x_0, x_1, \dots, x_N) \in K^{N+1} \setminus \{0\}$ найдется единственный (с точностью до обратимого элемента кольца R) элемент $t \in K \setminus \{0\}$, такой что нормы всех элементов $(x_0/t, x_1/t, \dots, x_N/t)$ неотрицательны, а одна из них равна нулю. Но ясно, что такой элемент действительно есть и определен однозначно с точностью до обратимого элемента кольца R — это элемент поля, норма которого равна минимальной из норм элементов в $x_0, x_1, \dots, x_N$. □

Отсюда легко вытекает критерий проективности.

Упражнение 10.8. *Докажите, что морфизм $X \to Y$ проективен тогда и только тогда, когда он собственный и на X существует линейное расслоение обильное над Y.*

Дивизоры и обратимые пучки

Пусть X — целая нормальная отделимая нетерова схема. Неприводимая приведенная подсхема $Y \subset X$ коразмерности 1 называется *простым дивизором* на X. Свободная абелева группа, порожденная всеми простыми дивизорами называется группой дивизоров и обозначается $\operatorname{Div} X$, а ее элементы называются дивизорами.

Пусть $Y \subset X$ — простой дивизор, а R — локальное кольцо его точки. Ясно, что R — целозамкнутое нетерово одномерное подкольцо в поле $K(X)$ рациональных функций на X, следовательно R — кольцо дискретного нормирования (упр. 10.3). Пусть $v_Y : K^* \to \mathbb{Z}$ — соответствующее нормирование.

Упражнение 10.9. *Покажите, что простой дивизор однозначно определеяется своим нормированием, и приведите пример нормирования, не соответствующего никакому дивизору.*

Если $f \in K^*$ — ненулевая рациональная функция на X, то целое число $v_Y(f)$ называется *кратностью f вдоль Y*. Если кратность положительна, говорят, что f имеет на Y *нуль* (соответствующей кратности), а если отрицательна — *полюс.*

Лемма 10.8. *Если $f \in K^*(X)$ то существует лишь конечное число простых дивизоров Y на X, таких что $v_Y(f) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $U \subset X$ — открытое аффинное подмножество, на котором функция f регулярна, а $U' \subset U$ — множество точек в U, в которых $f \neq 0$. Тогда $Z = X \setminus U'$ — замкнутое подмножество. Пусть теперь $Y \subset X$ — простой дивизор. Если общая точка Y лежит в U', то ясно что $v_Y(f) = 0$. Если же нет, то $Y \subset Z$, то есть является неприводимой компонентой в Z, однако в силу нетеровости схемы X множество Z имеет не более чем конечное количество неприводимых компонент коразмерности 1. □

В силу этой леммы, всякой ненулевой рациональной функции соответствует дивизор

$$(f) = \sum_{Y \subset X,\ \mathsf{codim}\, Y = 1} v_Y(f) Y.$$

Дивизоры, представимые в таком виде, называются *главными*. Очевидно, имеем $(f/g) = (f) - (g)$, поэтому множество главных дивизоров — подгруппа в $\operatorname{Div} X$. Дивизоры D_1 и D_2, разность которых $D_1 - D_2$ есть главный дивизор, называются *линейно эквивалентными*. Это обозначается так: $D_1 \sim D_2$. Факторгруппа группы $\operatorname{Div} X$ по главным дивизорам называется группой классов дивизоров на X и обозначается $\operatorname{Cl} X$. Ее элементы — классы линейной эквивалентности дивизоров.

Группа классов дивизоров позволяет отличать факториальные кольца от нефакториваль-ных. Для этого нам понадобится

Упражнение 10.10. *Нетерово целостное кольцо факториально тогда и толко тогда, когда в нем всякий простой идеал высоты* 1 *главный.*

Лемма 10.9. *Пусть* $X = \operatorname{Spec} A$ *— нетерова целая аффинная схема. Кольцо* A *факториально тогда и только тогда, когда схема* X *нормальна и* $\operatorname{Cl} X = 0$.

Доказательство. Если кольцо факториально, то оно целозамкнуто (упр. 4.11), поэтому его спектр нормален. Пусть $Y \subset X$ — простой дивизор, а $\mathfrak{p} \subset A$ — соответствующий простой идеал высоты 1. Тогда $\mathfrak{p}$ — главный, то есть порождается элементом $f \in A$. Ясно, что дивизор функции f — это Y. Значит $\operatorname{Cl} X = 0$.

Обратно, если X нормальна, то кольцо A целозамкнуто, так что остается проверить, что $\operatorname{Cl} X = 0$ влечет факториальность. Согласно упражнению достаточно проверить, что простые идеалы высоты 1 главные. Пусть $\mathfrak{p}$ — такой идеал, а Y — его простой дивизор. Так как $\operatorname{Cl} X = 0$, $Y = (f)$, где $f \in \operatorname{Frac}(A)$. По определению $v_Y(f) = 1$, но $v_{Y'}(f) = 0$ для всех остальных простых дивизоров. В частности, $f \in \cap_{\mathsf{ht}\,\mathfrak{p}'=1} A_{\mathfrak{p}'}$, значит $f \in A$ по предложению 4.7. Покажем, что f порождает $\mathfrak{p}$. Пусть $g \in \mathfrak{p}$ и рассмотрим g/f. Ясно, что $v_Y(g/f) \geq 0$ и для всех остальных простых дивизоров $v_{Y'}(g/f) \geq 0$. Значит $g/f \in A$, то есть g лежит в идеале порожденном f. ☐

Следствие 10.10. $\operatorname{Cl} \mathbb{A}^N = 0$.

Аналогичные рассуждения для проективного пространства доказывают

Предложение 10.11. $\operatorname{Cl} \mathbb{P}^N = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}^N = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, \ldots, x_N]$. Кольцо многочленов факториально, а всякий простой идеал высоты 1 в факториальном кольце — главный, поэтому всякий простой дивизор в проективном пространстве — гиперповерхность, уравнение которой — однородный многочлен от x_i. Назовем степенью простого дивизора степень его уравнения, обозначается $\mathsf{deg}\, Y$. Получаем гомоморфизм групп $\mathsf{deg} : \operatorname{Div} X \to \mathbb{Z}$. С другой стороны, рациональная функция на проективном пространстве — это рациональная функция степени 0 от x_i, поэтому всякий главный дивизор имеет степень 0. И обратно, если $D = \sum a_i Y_i$ — дивизор, $\mathsf{deg}\, D = 0$, а f_i — уравнение дивизора Y_i, то $\prod f_i^{a_i}$ — рациональная функция от x_i, а ее дивизор равен D. Поэтому группа главных дивизоров — это $\mathsf{Ker}\,\mathsf{deg}$, т.е. $\operatorname{Cl} \mathbb{P}^N = \mathbb{Z}$. ☐

Упражнение 10.11. *Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмножество, а $Y_1, \dots, Y_n$ — его неприводимые компоненты коразмерности 1. Докажите, что существует точная последоватльность абелевых групп*

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{(Y_1,\dots,Y_n)} \operatorname{Cl} X \longrightarrow \operatorname{Cl}(X - Y) \longrightarrow 0.$$

В частности, если $\operatorname{codim} Y \geq 2$, *то* $\operatorname{Cl}(X - Y) = \operatorname{Cl} X$.

Упражнение 10.12. *Пусть $X = \{(x, y, z) \mid xy = z^2\} \subset \mathbb{A}^3$ — квадратичный конус. Покажите, что $\operatorname{Cl} X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и порождается прямолинейной образующей конуса.*

Упражнение 10.13. *Пусть $X = \{(x, y, z, w) \mid xy = zw\} \subset \mathbb{P}^3$ — неособая квадрика. Покажите, что $\operatorname{Cl} X = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Дивизоры, о которых говорилось выше, называются также *дивизорами Вейля.* К сожалению, дивизоры Вейля не определены для ненормальных схем. Кроме того, они недостаточно функториальны. Поэтому часто используют другое определение для дивизоров — *дивизоры Картье.* Сразу скажем, что на регулярных схемах понятия дивизора Вейля и дивизора Картье эквивалентны.

Пусть вначале схема X такая же как и выше.

Определение 10.12. *Дивизором Картье* на целой нормальной отделимой нетеровой схеме X называется локально главный дивизор Вейля.

Иначе говоря, дивизор Вейля D является дивизором Картье, если существует покрытие $\{U_i\}$ схемы X, такое что на каждом из U_i дивизор D является дивизором рациональной функции f_i. Заметим, что поскольку на пересечениях $U_i \cap U_j$ функции f_i и f_j задают один и тот же дивизор, то их отношение f_i/f_j регулярная обратимая функция, то есть сечение пучка $\mathcal{O}^*$. Иначе говоря, набор функций $\{f_i\}$ задает глобальное сечение на X пучка $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$, где $\mathcal{K}^*$ — пучок обратимых рациональных функций. Обратно, всякое глобальное сечение пучка $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ локально поднимается до рациональной функции, поэтому задается набором ненулевых рациональных функций $\{f_i\}$ в некотором покрытии $\{U_i\}$ схемы X, которые на пересечениях отличаются на обратимую регулярную функцию, и поэтому их дивизоры склеиваются в корректно определенный локально главный дивизор Вейля на X. Это наблюдение позволяет определить группу дивизоров Картье для любой схемы X.

Определение 10.13. *Дивизор Картье* на произвольной схеме X — это глобальное сечение пучка $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.

Самым важным свойством дивизоров Картье является их связь с обратимыми пучками. Пусть D — дивизор Картье, заданный в покрытии $\{U_i\}$ набором рациональных функций $\{f_i\}$. Рассмотрим на каждом из множеств U_i пучок функций $\mathcal{O}_{U_i}$ и склеим эти пучки на пересечениях U_i/U_j с помощью изоморфизмов, заданных умножением на регулярные обратимые функции f_i/f_j. Иначе говоря, мы рассматриваем пучок, сечения которого над открытым множеством U — это наборы регулярных функций $\varphi_i \in \mathcal{O}(U \cap U_i)$, таких что на $U \cap U_i \cap U_j$ выполняется равенство $\varphi_i/f_i = \varphi_j/f_j$. Такой пучок обозначается $\mathcal{O}_X(D)$.

Упражнение 10.14. *Пучок $\mathcal{O}_X(D)$ корректно определен дивизором D (не зависит от выбора покрытия U_i и рациональных функций f_i, задающих D) и когерентен.*

Заметим сразу, что пучок $\mathcal{O}_X(D)$ локально свободен ранга 1, то есть обратимый пучок. Кроме того, набор функций f_i по которым этот пучок строился, задает глобальное рациональное сечение этого пучка, которое корректно определено с точностью до умножения на глобальную регулярную обратимую функцию. Обозначим это сечение s_D.

Лемма 10.14. *Сопоставление $D \mapsto (\mathcal{O}_X(D), s_D)$ задает биекцию между множеством дивизоров Картье и обратимых пучков с ненулевым рациональным сечением с точностью до умножения на глобальную регулярную обратимую функцию.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый пучок, а s — его рациональное сечение. Выберем покрытие $\{U_i\}$, такое что на каждом из U_i пучок $\mathcal{L}$ тривиален, выберем изоморфизм $\mathcal{L}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ и обозначим через f_i рациональную функцию, соответствующую сечению $s_{|U_i}$. Ясно, что на $U_i \cap U_j$ функция f_i/f_j регулярная обратимая, поэтому получаем дивизор Картье, D и очевидно $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$, $s_D = s$. □

Упражнение 10.15. *Отображение $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ является гомоморфизмом групп:* $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$.

Ясно, что дивизор рациональной функции всегда является дивизором Картье. Поэтому определена группа классов дивизоров Картье. Кроме того, для главного дивизора Картье пучок $\mathcal{O}_X(D)$ изоморфен пучку $\mathcal{O}_X$ (если все f_i являются ограничением одной рациональной функции f, то $\varphi_i = \varphi_j$ на пересечениях $U_i \cap U_j$ и поэтому набор φ, задающий сечение пучка $\mathcal{O}_X(D)$ над U склеивается в регулярную на U функцию). Обратно, предположим, что $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$. Тогда сечение $1 \in \mathcal{O}_X(U)$ представляется как набор регулярных обратимых функций φ_i на U_i, причем $\varphi_i/f_i = \varphi_j/f_j$. Следовательно, набор рациональных функций f_i/φ_i согласован на пересечениях и склеивается в глобальную рациональную функцию f. Ясно, что $D = (f)$. Итак, $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ тогда и только тогда, когда дивизор D главный. Пользуясь упражнением 10.15 заключаем, что $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ тогда и только тогда, когда $D_1 \sim D_2$. Значит, отображение $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ задает вложение группы классов дивизоров Картье в группу обратимых пучков, *группу Пикара* схемы X. Группа Пикара обозначается $\operatorname{Pic} X$. Обратимый пучок $\mathcal{L}$ лежит в образе этого гомоморфизма, если обладает рациональным сечением.

Предложение 10.15. *Группа классов дивизоров Картье на целой схеме X изоморфна* $\operatorname{Pic} X$.

Доказательство. Согласно вышесказанному, надо проверить, что любой обратимый пучок $\mathcal{L}$ на целой схеме имеет рациональное сечение. Выберем $U \subset X$, над которым $\mathcal{L}$ тривиален и выберем его регулярное сечение над U. Ясно, что оно задает рациональное сечение $\mathcal{L}$ над $\overline{U}$, то есть над X. □

Теорема 10.16. *Если X — регулярная схема, то всякий дивизор Вейля на X является дивизором Картье. В частности* $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Pic} X$.

Доказательство. Регулярное кольцо факториально (лекция 6). □

Следствие 10.17. $\operatorname{Pic} \mathbb{P}^N \cong \mathbb{Z}$, *изоморфизм задается отображением $n \mapsto \mathcal{O}_X(n)$.*

Упражнение 10.16. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем и $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на Y. Докажите, что $f^*\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X, и что $f^* : \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$ — гомоморфизм групп.*

Упражнение 10.17. *Докажите, что группа автоморфизмов проективного пространства — это PGL_n (покажите, что если f — автоморфизм, то $f^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)$).*