Лекция 11.

Рациональные отображения. Линейные системы. Бирациональная эквивалентность. Кривые. Дивизоры на кривых. Канонический класс и род кривой.

Рациональные отображения

В алгебраической геометрии часто используются морфизмы схем, определенные не всюду, а лишь на открытом подмножестве данной схемы. Простейший пример, с которым мы уже сталкивались — рациональные функции. Строгое определение рациональной функции на схеме X — такое: всякому аффинному открытому подмножеству $X \supset U = \operatorname{Spec} A$ сопоставим полное кольцо частных $\operatorname{Frac} A$ кольца A (если A — целостное кольцо, то $\operatorname{Frac} A$ — поле частных, в общем же случае это локализация кольца A по множеству всех элементов, не являющихся делителями нуля). Это сопоставление определяет на X квазикогерентный пучок (проверьте!), пучок рациональных функций $\mathcal{K}_X$. Так вот, рациональной функцией на X называется глобальное сечение пучка $\mathcal{K}_X$. Если схема X целая, это понятие можно переформулировать более простым образом ввиду следующего обстоятельства: сечение пучка $\mathcal{K}_X$ над любым открытым множеством однозначно продолжается до глобального сечения.

Упражнение 11.1. *Покажите, что пучок $\mathcal{K}_X$ на целой схеме X постоянен.*

Таким образом, рациональная функция на целой схеме определяется своим ограничением на любое открытое подмножество. Более того, это множество можно без потери информации уменьшить настолько, что функция станет регулярной. Поэтому можно сказать, что рациональная функция на целой схеме X это класс эквивалентности пар (U, f), где $U \subset X$ — открытое подмножество, а f — регулярная на U функция, причем $(U, f) \sim (V, g)$, если $f_{|U\cap V} \equiv g_{|U\cap V}$.

Аналогично определяются рациональные отображения.

Определение 11.1. Если X — целая схема, то рациональное отображение схем $X \dashrightarrow Y$ — это класс эквивалентности пар (U, f), где $U \subset X$ — открытое подмножество, а f — морфизм схем $U \to Y$, причем $(U, f) \sim (V, g)$, если $f_{|U\cap V} \equiv g_{|U\cap V}$.

С рациональными отображениями надо соблюдать осторожность. Например, рациональные отображения часто можно компоновать, но не всегда – может так случиться, что $f_1^{-1}(U_2)$ – не плотное (например, $f_1 : X \dashrightarrow Y$ может переводить все $U_1 \subset X$ внутрь дополнения к $U_2 \subset Y$). Кроме того, крайне неприятно, что необходимо держать в качестве дополнительного данного открытое подмножество $U \subset X$, от которого к тому же мало что зависит из-за дополнительного отождествления.

На самом деле рациональные отображения очень естественно возникают в алгебраической геометрии. Например, пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на схеме X, а $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ — пространство его сечений. Если V порождает $\mathcal{L}$, то у нас возникает морфизм $X \to \mathbb{P}(V^*)$. А если нет? Априори ясно, что V порождает $\mathcal{L}$ вне базисного множества $B(V)$. Иначе говоря, возникает морфизм схем $X \setminus B(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, то есть рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$.

Заметим, кстати, что это рациональное отображение можно эквивалентным образом описать на языке дивизоров. Пусть для простоты X — связная неособая проективная схема над полем k. Напомним, что дивизоры Картье на схеме X находятся во взаимно однозначном соответствии с ненулевыми рациональными сечениями линейных расслоений с точностью до умножения на обратимую регулярную функцию на X, то есть на элемент из k^*. При этом соответствии регулярным сечениям соответствуют *эффективные дивизоры* (то есть дивизоры вида $D = \sum a_i Y_i$, где все $a_i \geq 0$), а разным сечениям одного и того же линейного расслоения — линейно эквивалентные дивизоры (так как отношение двух рациональных сечений линейного расслоения это корректно определенная рациональная функция). И обратно, два линейно эквивалентных эффективных дивизора соответствуют регулярным сечениям фиксированного линейного расслоения. Итак, всякому линейному расслоению $\mathcal{L}$ на X соответствует класс линейной эквивалентности эффективных дивизоров на X, представляющий из себя проективное пространство $\mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{L})) = (\Gamma(X, \mathcal{L}) \setminus 0)/k^*$, и называемый *полной линейной системой* дивизоров, а подпространству $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ — проективное подпространство $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{L}))$. Полная линейная система дивизоров линейно эквивалентных дивизору D обозначается $|D|$, а всякое линейное проективное подпространство $\delta \subset |D|$ называется просто *линейной системой*. Например, если $P \in X$ — точка, можно рассмотреть линейную систему $|D - P|$ эффективных дивизоров, линейно эквивалентных дивизору D и проходящих через точку P.

Всякой линейной системе δ сопоставим множество $B(\delta)$ точек $P \in X$, таких что всякий дивизор из δ проходит через P. Это множество очевидно совпадает с множеством общих нулей соответствующего пространства сечений линейного расслоения, то есть является базисным множеством линейной системы. Линейная система без базисных точек задает морфизм схем X в проективное пространство гиперплоскостей в δ (всякой точке сопоставляется гиперплоскость дивизоров в δ, проходящих через эту точку), а общая непустая линейная система — морфизм, определенный на $X \setminus B(\delta)$, то есть рациональное отображение X.

Упражнение 11.2. *Пусть $X = \mathbb{P}^N$, $\delta = |H - P|$ — линейная система гиперплоскостей, проходящих через точку $P \in \mathbb{P}^N$. Покажите, что соответствующее рациональное отображение $\mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ — проекция из точки P.*

На самом деле, рациональное отображение может оказаться регулярным на большем множестве чем $X \setminus B(\delta)$.

Упражнение 11.3. *Пусть δ — линейная система на X, а D_0 — эффективный дивизор. Покажите, что $\delta' = D_0 + \delta$ — тоже линейная система, причем $B(\delta') = D_0 \cup B(\delta)$, но рациональные отображения соотвествующие линейным системам δ' и δ совпадают.*

В этой ситуации говорят, что D_0 — *неподвижная компонента* линейной системы δ'. Мораль состоит в том, что рациональное отображение, задаваемое линейной системой не изменится, если выбросить из нее неподвижные компоненты (на языке линейных расслоений это означает, что отображение $V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ раскладывается в композицию $V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}(-D_0) \to \mathcal{L}$). Кстати, заметим, что всякая базисная точка линейной системы на кривой является базисной компонентой, поэтому верна следующая

Лемма 11.2. *Если X — неособая кривая, то любое рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ регулярно.*

Доказательство. Пусть рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ задается парой $(V, \mathcal{L})$. Пусть $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ — образ отображения $V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Заметим, что $\mathcal{L}'$ — обратимый пучок. Действительно, локальные кольца точек неособой кривой — кольца дискретного нормирования, поэтому локально $\mathcal{L}$ изоморфен кольцу, а его подпучок $\mathcal{L}'$ — идеалу в кольце. Но всякий идеал в кольце дискретного нормирования главный, поэтому $\mathcal{L}'$ локально свободен ранга 1. Получаем сюръективное отображение $V \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{L}'$, задающее регулярный морфизм $X \to \mathbb{P}^N$, совпадающий с исходным рациональным отображением вне $B(V)$. $\square$

Упражнение 11.4. *Если X — неособая кривая, а Y — собственная схема, то любое рациональное отображение $X \dashrightarrow Y$ регулярно.*

Аналогично случаю кривых можно рассмотреть и общий случай. Пусть X — произвольная схема, а $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ — рациональное отображение, задаваемое парой $(V, \mathcal{L})$. Пусть $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ — образ отображения $V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}' \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — пучок идеалов подсхемы $B(V) \subset X$ (образ отображения $V \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{O}_X$). Пусть $\pi : \widetilde{X} \to X$ — раздутие пучка идеалов $\mathcal{J}$ на X.

Упражнение 11.5. *Рассмотрим пучок $\mathcal{O}_{\widetilde{X}/X}(1)$ на $\widetilde{X} = \mathrm{Proj}_X(\oplus \mathcal{J}^k)$. Покажите, что $\pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}/X}(1) \cong \mathcal{J}$, $\pi_*(\pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}/X}(1)) \cong \mathcal{L}'$.*

Сюръекция $V \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{L}' = \pi_*(\pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}/X}(1))$ индуцирует по сопряженности морфизм $V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \pi^*(V \otimes \mathcal{O}_X) \to \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}/X}(1)$, который тоже сюръективен (проверьте это!), поэтому получаем морфизм схем $\tilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^N$. Ясно, что на $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(B(V)) = X \setminus B(V)$ морфизмы φ и $\tilde{\varphi}$ совпадают, поэтому $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$. Полученное равенство можно переинтерпретировать так. Заметим, что отождествление открытых множеств $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(B(V)) = X \setminus B(V)$ можно рассматривать как рациональное отображение $\pi^{-1} : X \dashrightarrow \widetilde{X}$, которое тоже называется раздутием. Тогда получаем $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi^{-1}$, то есть *всякое рациональное отображение в проективное пространство раскладывается в композицию раздутия некоторого пучка идеалов и регулярного морфизма.*

Похожее утверждение верно и для любого рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$. Пусть φ регулярно на открытом множестве $U \subset X$. Рассмотрим в $U \times Y$ график морфизма $\varphi_{|U}$ (проверьте, что график морфизма $\Gamma_\varphi(U) \subset U \times Y$ — замкнутая подсхема, изоморфная U) и пусть $\widetilde{X} = \overline{\Gamma_\varphi(U)} \subset X \times Y$. Пусть π — ограничение проекции $X \times Y \to X$, а $\tilde{\varphi}$ — ограничение проекции $X \times Y \to Y$ на $\widetilde{X}$. Тогда $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi^{-1}$. На этот раз, однако, морфизм $\pi : \widetilde{X} \to X$ не является вообще говоря раздутием (раздутие всегда проективный морфизм). Например, если $Y = X \setminus Z$, $\varphi = \mathsf{id}$, то $\widetilde{X} = Y = X \setminus Z$ и π — вложение. В общем случае, проекция π — так называемое бирациональное отображение.

Определение 11.3. Морфизм целых схем $f : X \to Y$ называется *бирациональным*, если для какого-то открытого подмножества $U \subset Y$ он индуцрует изоморфизм $f : f^{-1}(U) \to U$.

Таким образом, всякий бирациональный морфизм обратим как рациональное отображение, а *всякое рациональное отображение раскладывается в композицию рационального отображения, обратного к бирациональному морфизму и регулярного морфизма.*

Терминология, как водится, не очень удачна. Бирациональное отображение это морфизм схем с дополнительным свойством; рациональное отображение это вообще не морфизм схем, а нечто более сложное и дополнительно определяемое.

Упражнение 11.6. *Вычислите $\widetilde{X}$ в рассмотренном выше примере: $Y = \mathbb{P}^1$, $X = \mathbb{P}^2$, $f : X \dashrightarrow Y$ – проекция из точки (указание: должно получиться раздутие X в точке $\langle 0, 0, 1 \rangle$).*

Одна вещь, которая четко видна из определения рационального отображения через графики – это что для каждого рационального отображения $f : X \dashrightarrow Y$ существует одно максимальное открытое множество $U \subset X$, на котором оно определено (это просто объединение всех таких U, что проекция $\pi : \widetilde{X} \to X$ – изоморфизм над $U \subset X$). Дополнение $X \setminus U$ называется *множеством неопределенности* рационального отображения f.

Категорно, на рациональные отображения можно смотреть еще вот как: мы берем категорию схем и формально обращаем бирациональные морфизмы (аналогично понятую локализации для кольца). Такого сорта общекатегорные процедуры формального обращения действительно существуют, но хорошо работают только при некоторых условиях, которые в этом случае выполнены не целиком. Что, в общем, и видно: поскольку рациональные отображения можно компоновать не всегда, категории они не образуют. Все же есть одна более специальная ситуация, в которй эта аналогия – по делу. А именно, во-первых, исторически рациональные отображения рассматривали обычно в категории целых схем (вернее, в те времена схем не было, а неприведенные или приводимые объекты старались особо и не рассматривать). Во-вторых, давайте рассматривать только *обратимые* рациональные отображения – а именно, такие $f : X \dashrightarrow Y$, что f индуцирует изоморфизм открытого плотного $U \subset X$ и открытого плотного $V \subset Y$ (а не сплющивает, например, все U в какую-нибудь одну точку в Y).

Тогда понятно, что такие f можно компоновать без проблем, т.е. они таки образуют категорию, и к тому же в этой категории все морфизмы обратимы (такая категория называется *группоид*).

Объект этой категории называется "многообразие с точностью до бирациональной эквивалентности", и это довольно полезное огрубление понятия алгебраического многообразия – оно позволяет изучать некоторые существенные свойства многообразий, не отвлекаясь на частности вроде раздутий. При этом полной потери всего не происходит. Например – и мы это со временем докажем – неособая проективная алгебраическая кривая, т.е. неособая проективная схема размерности 1 над полем, полностью определяется своим классом бирациональной эквивалентности. В частности, есть кривые, не бирационально-эквивалентные проективной прямой $\mathbb{P}^1$. В общем случае, многообразие, бирационально эквивалентное $\mathbb{P}^n$, называется *рациональным*; есть довольно много конкретных мгоообразий, рациональность которых – важный открытый вопрос.

Отметим следующее алгебраическое описание бирациональной категории.

Упражнение 11.7. *Докажите, что функтор $A \mapsto \operatorname{Frac}(A)$ есть эквивалентной категории полей и категории целых схем с точностью до бирациональной эквивалентности.*

Наконец, приведем нетривиальный и весьма поучительный классический пример бирационального изоморфизма – а именно, возьмем $X = \mathbb{P}^2$, и рассмотрим отображение $f : X \to X$, заданное в однородных координатах формулой

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle \mapsto \langle z_2 z_3, z_1 z_3, z_1 z_2 \rangle.$$

Это называется *отображение Кремоны.* На первый взгляд это хорошо определенный морфизм схем, но на самом деле это не так: есть ненулевые наборы координат, которые переходят в запрещенную строку $\langle 0, 0, 0 \rangle$. Но как рациональное отображение, отображение Кремоны очевидно хорошо определено.

Упражнение 11.8. (i) *Каково множество базисных точек отображения Кремоны?*

(ii) *Что получится, если скомпоновать это отображение с собой?*

(iii) *Покажите, что отображение Кремоны задается линейной системой $|2H - P_0 - P_1 - P_1|$ коник, проходящих через точки $P_0 = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $P_1 = \langle 0, 1, 0 \rangle$ и $P_2 = \langle 0, 0, 1 \rangle$.*

Упражнение 11.9. *Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, H_1 и H_2 — горизонтальная и вертикальная прямые, а P — точка. Покажите, что линейная система $|H_1 + H_2 - P|$ задает бирационально отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, а обратное отображение задается линейной системой $|2H - P_1 - P_2|$ на $\mathbb{P}^2$, где H — прямая, а P_1 и P_2 — точки.*

Упражнение 11.10. *Пусть $P_1, \dots, P_6$ — точки на $\mathbb{P}^2$ в общем положнии (никакие 3 не лежат на одной прямой и все вместе не лежат на одной конике). Докажите, что линейная система $|3H - P_1 - \dots - P_6|$ обильна (вне точек P_i) и задает вложение раздутия $\widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ в точках $P_1, \dots, P_6$ в $\mathbb{P}^3$.*

На самом деле, образ предыдущего вложения — кубическая поверхность.

Кривые

Определение 11.4. Кривой называется целая регулярная одномерная схема над полем. Кривая называется *полной*, если она собственна.

Пусть C — кривая над полем k, а $K(C)$ — поле рациональных функций на C. Расширение полей $K(C)/k$ имеет степень трансцендентности 1. В силу упр. 11.7 поле $K(C)$ определяет класс бирациональной эквивалентности кривой C, а в силу леммы 11.2 бирациональный изоморфизм полных кривых бирегулярен. Легко предположить, что полную кривую можно востановить по полю рациональных функций. Так оно и есть.

Лемма 11.5. *Пусть K/k расширение полей степени трансцендентности 1. Существует единственная с точностью до изоморфизма полная кривая C/k, такая что $K(C) \cong K$.*

Доказательство. Пусть C — множество всех дискретных нормирований поля K и рассмотрим на C топологию, в которой замкнутыми являются конечные множества. Для всякого открытого $U \subset C$ обозначим через $\mathcal{O}_C(U)$ подкольцо в K, состоящее из всех $f \in K$, таких что $v_P(f) \geq 0$ для всех $P \in U$. Ясно, что $\mathcal{O}_C$ — пучок колец на C. Нам надо показать, что окольцованное пространство $(C, \mathcal{O}_C)$ — схема.

Сделаем так. Пусть $x \in K$ — трансцендентный элемент, так что $K/k(x)$ — алгебраическое расширение. Пусть A_0 — целое замыкание кольца $k[x]$ в K, а A_∞ — целое замыкание кольца $k[x^{-1}]$ в K. Заметим, что локализация кольца A_0 в x равна локализации кольца A_∞ в x^{-1} (и равна целому замыканию кольца $k[x, x^{-1}]$ в K). Пусть C_x — склейка аффинных схем $\operatorname{Spec} A_0$ и $\operatorname{Spec} A_\infty$ вдоль $\operatorname{Spec}(A_0)_x = \operatorname{Spec}(A_\infty)_{x^{-1}}$. Ясно, что C — целая нетерова схема над k. Более того, аффинные схемы $\operatorname{Spec} A_0$ и $\operatorname{Spec} A_\infty$ являются разветвленными расширениями аффинных прямых $\mathbb{A}^1_0 = \operatorname{Spec} k[x]$ и $A^1_\infty = \operatorname{Spec} k[x^{-1}]$ (которые в свою очередь склеиваются в проективную прямую $\mathbb{P}^1$). Поэтому C — одномерная схема. Наконец, локальные кольца замкнутых точек схемы C суть целые замыкания локальных колец замкнутых точек проективной прямой $\mathbb{P}^1$ в поле K, то есть кольца дискретного нормирования, поэтому схема C_x регулярна. Итак, схема C является кривой, причем $K = \operatorname{Frac} A_0 = \operatorname{Frac} A_\infty = K(C)$. Чтобы проверить полноту кривой C_x, достаточно убедиться в собственности морфизма $C_x \to \mathbb{P}^1$, а так как собственность локальна по базе — в собственности морфизмов $\operatorname{Spec} A_0 \to \operatorname{Spec} k[x]$ и $\operatorname{Spec} A_\infty \to \operatorname{Spec} k[x^{-1}]$. Согласно валюативному критерию собственности, надо проверить, что для любого кольца нормирования R' с полем частных K' и любых согласованных морфизмов $k[x] \to R'$, $A_0 \to K'$ образ A_0 в K' содержится в R'. Действительно, всякий элемент из A_0 цел над $k[x]$, следовательно его образ в K' цел над R', а кольцо R' целозамкнуто.

Остается проверить, что $C \cong C_x$. Действительно, всякое дискретное нормированное кольцо R в K содержит либо A_0, либо A_∞ (если $v(x) \geq 0$, то $k[x] \subset R$, значит, всякий элемент в A_0 будучи целым над $k[x]$ цел и над R, а R целозамкнуто, а если $v(x) \leq 0$, то аналогично $A_\infty \subset R$), и следовательно является локализацией одного из этих колец. Поэтому множества точек кривых C и C_x канонически отождествляются, причем так как замкнутые по Зарискому множества в C_x конечны, это отждествление — гомеоморфизм. Наконец, регулярные функции на открытом множестве $U \subset C_x$ естественно отождествляются с кольцом $\mathcal{O}_C(U)$, поэтому $C \cong C_x$ как окольцованное пространство. $\square$

Упражнение 11.11. *Покажите, что всякая полная кривая проективна (проверьте проективность построенного выше морфизма $C \to \mathbb{P}^1$).*

Для многообразий большей размерности это уже не верно. Можно построить пример собственного регулярного трехмерного многообразия, не являющегося проективным.

Скажем теперь несколько слов о дивизорах на кривых. Дополнительным упрощающим свойством в даноом случае является то, что простые дивизоры — это просто замкнутые точки на кривой. Поле вычетов всякой замкнутой точки является конечным расширением базового поля. Степень этого расширения называется *степенью точки*:

$$\operatorname{deg} P = \operatorname{deg} K(P)/k.$$

Степень по линейности продолжается на группу дивизоров и до гомоморфизма $\operatorname{Div} C \to \mathbb{Z}$.

Лемма 11.6. *Степень главного дивизора равна нулю.*

Доказательство. Пусть f — рациональная функция на C. В доказательстве леммы 11.5 мы убедились, что она задает морфизм $f : C \to \mathbb{P}^1$, такой что дивизор нулей функции f — это $f^{-1}(0)$, а дивизор полюсов функции f — это $f^{-1}(\infty)$, $0, \infty \in \mathbb{P}^1$. Покажем, что степень каждого из этих дивизоров равна степени расширения полей $K(C)/k(f)$. Рассмотрим, например, $f^{-1}(0)$. Пусть $R = k[f]_0$ — локальное кольцо точки $0 \in \mathbb{P}^1$, а S — целое замыкание кольца R в поле $K(C)$. Проверим, что S — свободный R-модуль. Пусть $\mathfrak{m} \subset R$ — максимальный идеал. Выберем в $R/\mathfrak{m} = k$-модуле $S/S\mathfrak{m}$ базис, поднимем его до элементов $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ и рассмотрим гомоморфизм R-модулей $\oplus R s_i \to S$. Он сюръективен по лемме Накаямы. С другой стороны, если набор элементов (r_i) лежит в его ядре, т.е. $\sum r_i s_i = 0$, то сокращая при необходимости на наибольший общий делитель (кольцо R факториально!), можно считать, что не все r_i лежат в $\mathfrak{m}$, и мы получаем нетривиальное соотношение между образами s_i в $S/S\mathfrak{m}$ — противоречие. Значит s_i линейно независимы над R и $S \cong R^{\oplus n}$. С другой стороны, ясно что s_i линейно независимы и над $k(f)$, но при этом порождают $K(C)$ как $k(f)$-модуль. Значит $n = \operatorname{deg} K(C)/k(f)$. Остается заметить, что $S/S\mathfrak{m} = \oplus S_{\mathfrak{m}_i}/S_{\mathfrak{m}_i}\mathfrak{m}_i^{k_i}$ (примарное разложение), где $\mathfrak{m}_i$ — максимальные идеалы кольца S (они соответствуют точкам $P_i \in f^{-1}(0)$), причем $k_i = v_i(f)$, где v_i — дискретное нормирование поля $K(C)$, соответствующее точке $P_i \in C$, поэтому $n = \operatorname{dim}_k S/S\mathfrak{m} = \sum k_i \operatorname{dim} S/\mathfrak{m}_i = \sum k_i \operatorname{deg} P_i = \operatorname{deg}(\sum k_i P_i)$ — степень дивизора нулей функции f. □

В частности, гомоморфизм степени пропускается через группу классов дивизоров, то есть его можно рассматривать как гомоморфизм $\operatorname{deg} : \operatorname{Cl} C = \operatorname{Pic} C \to \mathbb{Z}$. Очень важный класс дивизоров на кривой C дает пучок кэлеровых дифференциалов Ω_C.

Лемма 11.7. *Пучок Ω_C на кривой локально свободен ранга* 1.

Доказательство. Достаточно показать, что для кольца дискретного нормирования R модуль $\Omega_{R/k}$ свободен ранга 1. Действительно, этот модуль свободно порождается элементом $d\pi$, где $\pi \in R$ — униформизующая. □

Обратимый пучок Ω_C называется *каноническим пучком.* Для регулярного многообразия X большей размерности вместо пучка дифференциалов, который тоже локально свободен, но имеет ранг равный размерности многообразия X, используют его старшую внешнию степень, которая тоже называется каноническим пучком и обозначается ω_X. Класс линейной эквивалентности дивизоров на X, соответствующий каноническому пучку, называется *каноническим классом* и обозначается K_X. Итак, можно записать $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$.

Лемма 11.8. *Канонический пучок на $\mathbb{P}^1$ изоморфен пучку $\mathcal{O}(-2)$.*

Доказательство. Нам надо посчитать степень канонического дивизора, то есть дивизора рационального сечения пучка дифференциалов. Пусть $(z : w)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^1$. Рассмотрим аффинные карты $U_1 \cong \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ и $U_2 \cong \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ с координатами $x = z/w$

и $y = w/z = x^{-1}$. Ясно, что модуль дифференциалов $\Omega_{k[x]/k}$ свободен с образующей dx, а модуль дифференциалов $\Omega_{k[y]/k}$ свободен с образующей dy. Рассмотрим dx как рациональное сечение канонического пучка. Ясно, что dx не имеет нулей и полюсов на U_1. С другой стороны, $dx = d(1/y) = -(1/y^2)dy$, поэтому dx имеет полюс кратности 2 на U_2. Получаем $\deg K_{\mathbb{P}^1} = -2$. □

Упражнение 11.12. *Покажите, что $K_{\mathbb{P}^N} = -(N+1)H$, где H — класс гиперплоскости.*

Изучим теперь вопрос о том, как можно различать разные кривые. Удобнее всего это делать с помощью инвариантов. Главным (и единственным дискретным) инвариантом кривых является *род кривой* — размерность пространства глобальных сечений канонического пучка

$$g(C) = \dim \Gamma(C, \mathcal{O}_C(K_C)).$$

Таким образом, род — целое неотрицательное число. К сожалению, нашей техники пока не хватает для вычисления рода. Вместо этого мы используем связь между родом кривой и степенью канонического дивизора. Из двойственности Серра (которую мы будем изучать в следующем году), легко выводится, что

$$\deg K_C = 2g(C) - 2.$$

Пока мы этого не доказали, будем использовать эту формулу как определение рода.

Легко видеть, что род проективной прямой равен нулю. Над алгебраически замкнутым полем верно и обратное, кривая рода ноль изоморфна проективной прямой. Кривые рода 1 называются *эллиптическими*. Множество комплексных точек комплексной эллиптической кривой — тор. Кривые рода больше 1 иногда называют кривыми общего типа.

Опишем теперь более явно некоторый класс кривых. Пусть $\operatorname{char} k > 2$. Кривая C называется *гиперэллиптической*, если существует двулистное разветвленное накрытие $C \to \mathbb{P}^1$. Иначе говоря, если поле $K(C)$ является квадратичным расширением некоторого чисто трансцендентного подполя $k(x) \subset K(C)$. Покажем, что бывают гиперэллиптические кривые любого рода.

Пусть $p(x)$ — многочлен без кратных корней, $\deg p = n$. Пусть $K = k(x)[y]/(y^2 - p(x))$ и рассмотрим соответствующую гиперэллиптическую кривую C (кстати, ясно, что так получается любая гиперэллиптическая кривая).

Упражнение 11.13. *Докажите, что кольцо $k[x,y]/(y^2 - p(x)) \subset K$ целозамкнуто.*

Поэтому над аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty$ кривая ветвится над корнями многочлена $p(x)$. С другой стороны, чтобы получить уравнение кривой над $\mathbb{P}^1 \setminus 0$, рассмотрим целое замыкание кольца $k[x^{-1}]$ в K. Ясно, что y не цел над $k[x^{-1}]$, но $yx^{-[n/2]}$ — уже цел, причем $(yx^{-[n/2]})^2 = p(x)x^{-2[n/2]} = q(x^{-1})$ и многочлен q тоже не имеет кратных корней, значит кривая C ветвится над бесконечностью тогда и только тогда, когда $q(0) = 0$, что равносильно нечетности n. С другой стороны, меняя координаты на $\mathbb{P}^1$ всегда можно добиться того, чтобы ∞ не была точкой ветвления (если конечно $|k| > n$), то есть можно считать n четным. Итак пусть $n = 2m$. Покажем, что род кривой C равен $m - 1$. Для этого нам надо посчитать степень дивизора рациональной формы на C. Рассмотрим форму f^*dx. Над $\mathbb{P}^1 \setminus \infty$ имеем $2ydy = p'(x)d(x)$, поэтому вне множества $y = 0$ форма dx порождает модуль кэлеровых дифференциалов, следовательно не имеет ни нулей, ни полюсов. С другой стороны, если $y = 0$, то $p(x) = 0$, но $p'(x) \neq 0$, так как p не имеет кратных корней. Поэтому в этих точках $dx = ydy$ (с точностью до обратимого элемента), а dy порождает модуль кэлеровых дифференциалов, следовательно форма dx имеет в каждой из этих $2m$ точек нуль кратности 1. Наконец, в точке ∞ на $\mathbb{P}^1$ форма dx имеет полюс кратности 2, а кривая C неразветвлена. Поэтому над точкой ∞ на C форма dx имеет два полюса кратности 2. Итого, степень дивизора формы dx на C равна $2m-4 = 2(m-1)-2$, то есть род кривой C равен $m-1$.

Следствие 11.9. *Гиперэллиптическая кривая рода g является двулистным накрытием $\mathbb{P}^1$ разветвленным в $2g+2$ точках.*

Любая кривая рода ≤ 2 гиперэллиптична. Для кривых большего рода это, вообще говоря, уже не верно.

В заключении поговорим о кривых на поверхностях. Рассмотрим вначале простейший случай. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ — неособая кривая степени d. Предположим, что точка $(0,0,1)$ не лежит на кривой, а прямая $y=0$ пересекает кривую трансверсально (иначе сделаем замену координат так, чтобы эти условия выполнялись) и рассмотрим проекцию из этой точки $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Наша кривая относительно этого морфизма является d-листным разветвленным накрытием проективной прямой, разветвленным в тех точках кривой, где производная F'_z обращается в нуль. По теореме Безу таких точек $d(d-1)$. Рассматривая как и для двулистного накрытия рациональную форму $d(x/y)$ на кривой C, видим, что в каждой из точек ветвления на кривой эта форма имеет простой нуль, а в каждой из d точек пересечения кривой с прямой $y=0$ — полюс порядка 2. Отсюда получаем, $\deg K_C = d(d-1)-2d = d(d-3)$, следовательно

$$g(C) = (d(d-3)+2)/2 = (d-1)(d-2)/2.$$

Итак, нами доказано

Предложение 11.10. *Род неособой плоской кривой степени d равен $(d-1)(d-2)/2$.*

Далее, заметим, что дивизор построенной нами рациональной формы на кривой C равен ограничению на C рационального сечения F'_z/y^2 линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)$. Поскольку линейное расслоение однозначно определяется дивизором любого своего рационального сечения, заключаем, что

$$\Omega_C \cong i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3),$$

где $i : C \to \mathbb{P}^2$ — наше вложение. Переписывая этот изоморфизм в терминах дивизоров и замечая, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(C)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(K_{\mathbb{P}^2})$ (упр. 11.11), получаем формулу

$$K_C = (K_{\mathbb{P}^2} + C)_{|C}. \tag{11.1}$$

Эта формула — частный случай общей формулы, выражающий канонический класс гиперповерхности, которая называется *формулой присоединения.*

Из формулы присоединения следует, что всякий однородный многочлен $P(x,y,z)$ степени $d-3$ должен давать форму на кривой C. Если посмотреть внимательно на нашу конструкцию, видно что это форма равна

$$\frac{Py^2}{F'_z} d(x/y) = P\frac{ydx - xdy}{F'_z}.$$

Упражнение 11.14. *Докажите, что отображение $i^* : \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)) \to \Gamma(C, \Omega_C)$ инъективно.*

Пространство однородных многочленов степени $d-3$ от трех переменных имеет размерность $(d-1)(d-2)/2$. Если поверить в сюръективность построенного выше отображения (к сожалению, нам не хватает техники, чтобы ее доказать), получим, что $\dim \Gamma(C, \Omega_C) = (d-1)(d-2)/2$, что отлично сходится с определением рода.

Упражнение 11.15. *Пусть C — неособая кривая степени (a,b) на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (напомним, что $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Докажите, что $g(C) = (a-1)(b-1)$.*