Лекция 20.

Теория пересечения на поверхности. Формула присоединения. Теорема Римана–Роха на поверхности. Раздутия. Бирациональные инварианты.

Теория пересечений на поверхности

Напомним, что поверхностью называется геометрически целая отделимая двумерная схема над полем k. Ограничимся изучением проективных неособых поверхностей над алгебраически замкнутым полем. (на самом деле всякая собственная неособая поверхность над алгебраически замкнутым полем проективна, однако мы этого доказывать не будем). Кривой на данной поверхности будет называться любой эффективный дивизор. Таким образом, кривая на поверхности может быть особой, приводимой и неприведенной.

В изучении кривых важную роль играло понятие степени дивизора. В случае поверхностей его роль играет понятие *индекса пересечения* — билинейной формы на группе классов дивизоров. Сейчас мы займемся ее построением.

Пусть C и D — гладкие кривые на поверхности S. Определим *индекс пересечения*

$$C \cdot D = \begin{cases} \dim \Gamma(S, \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D), & \text{если } C \neq D \\ -\deg \mathsf{Tor}_1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D), & \text{если } C = D \end{cases}$$

Здесь требуются пояснения. Давайте вычислим $\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D$. Воспользуемся для этого следующей плоской резольвентой пучка $\mathcal{O}_D$

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D) \xrightarrow{D} \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Тензорно умножив ее на $\mathcal{O}_C$ получим точную последовательность

$$0 \to \mathsf{Tor}_1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D) \to \mathcal{O}_S(-D)_{|C} \xrightarrow{D} \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D \to 0.$$

Если $C \neq D$, то ограничение уравнения кривой D на C нетривиально, поэтому морфизм обратимых пучков $\mathcal{O}_S(-D)_{|C} \xrightarrow{D} \mathcal{O}_C$ на кривой C нетривиален, значит $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D) = 0$, а $\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D$ является пучком кручения на кривой C — структурным пучком теоретико-схемного пересечения $C \cap D$ (в частности, если кривые C и D пересекаются *трансверсально*, то есть в каждой точке пересечения их локальные уравнения порождают максимальный идеал этой точки, то $C \cdot D$ равно числу точек пересечения $C \cap D$). Если же $C = D$, то ограничение уравнения кривой D на C тривиально, поэтому морфизм обратимых пучков $\mathcal{O}_S(-D)_{|C} \xrightarrow{D} \mathcal{O}_C$ на кривой C тривиален, следовательно $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_S(-D)_{|C}$, $\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_C$, так что $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D)$ является линейным расслоением на кривой $C = D$.

Лемма 20.1. *Индекс пересечения гладких кривых корректно определен и симметричен. Более того,* $C \cdot D = \deg \mathcal{O}_S(D)_{|C} = \deg \mathcal{O}_S(C)_{|D}$.

Доказательство. Корректность определения очевидна, симметричность следует из симметричности функтора тензорного произведения. В силу симметричности достаточно проверить равенство $C \cdot D = \deg \mathcal{O}_S(D)_{|C}$. В случае $C = D$ оно следует из того, что $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_S(-D)_{|C}$, а в случае $C \neq D$ — из теоремы Римана–Роха для кривой C. Действительно, в этом случае имеем на C точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D)_{|C} \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D \to 0,$$

откуда $\operatorname{dim}\Gamma(S, \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_S(-D)_{|C}) = -\operatorname{deg}\mathcal{O}_S(-D)_{|C}$. □

Распространим теперь индекс пересечения на дивизоры, являющиеся суммами гладких кривых:

$$(\sum C_i) \cdot (\sum D_j) = \sum (C_i \cdot D_j).$$

Лемма 20.2. *Если $\sum D_j \sim \sum E_k$, то $(\sum C_i) \cdot (\sum D_j) = (\sum C_i) \cdot (\sum E_k)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\sum C_i = C$. В этом случае

$$C \cdot (\sum D_j) = \sum C \cdot D_j = \sum \operatorname{deg}\mathcal{O}_S(D_j)_{|C} = \operatorname{deg}\mathcal{O}_S(\sum D_j)_{|C}$$

и аналогично $C \cdot (\sum E_k) = \operatorname{deg}\mathcal{O}_S(\sum E_k)_{|C}$. Остается заметить, что $\sum D_j \sim \sum E_k$ влечет $\mathcal{O}_S(\sum D_j) \cong \mathcal{O}_S(\sum E_k)$. □

Чтобы распространить индекс пересечения на все дивизоры нам понадобится

Лемма 20.3 (Лемма о сдвиге). *Всякий дивизор D на поверхности S линейно эквивалентен дивизору вида $D_1 - D_2$, где D_1 и D_2 — гладкие кривые на S.*

Доказательство. Поверхность S проективна, поэтому на ней существует обильный дивизор H. Пользуясь приведенным ниже упражнением найдем n, такое что дивизоры nH и $D + nH$ очень обильны. По теоерме Бертини в линейных системах $|nH|$ и $|D + nH|$ выберем гладкие дивизоры D_1 и D_2. Тогда $D_1 - D_2 \sim D$. □

Упражнение 20.1. *Пусть D и H — дивизоры на схеме X, H обилен. Покажите, что*
(i) существует n_0, такое что линейная система $|D + nH|$ непуста при $n \geq n_0$;
(ii) существует n_1, такое что дивизор $D + nH$ очень обилен при $n \geq n_1$.

Итак, пусть C и D — любые дивизоры. Представим $C \sim C_1 - C_2$, $D \sim D_1 - D_2$ и положим

$$C \cdot D = C_1 \cdot D_1 - C_1 \cdot D_2 - C_2 \cdot D_1 + C_2 \cdot D_2.$$

Теорема 20.4. *Индекс пересечения корректно определенная симметрическая билинейная форма на группе классов дивизоров.*

Доказательство. Проверим корректность. Предположим, что $D \sim D_1 - D_2 \sim D_1' - D_2'$. Тогда $D_1 + D_2' \sim D_1' + D_2$, значит $C_i \cdot D_1 + C_i \cdot D_2' = C_i \cdot D_1' + C_i \cdot D_2$, откуда следует

$$C_1 \cdot D_1 - C_1 \cdot D_2 - C_2 \cdot D_1 + C_2 \cdot D_2 = C_1 \cdot D_1' - C_1 \cdot D_2' - C_2 \cdot D_1' + C_2 \cdot D_2'.$$

Симметричность очевидна из определения. Остается проверить билинейность. Предположим, что $D \sim D_1 - D_2$, $D' \sim D_1' - D_2'$ и $D + D' \sim D_1'' - D_2''$. Тогда $D_1 + D_1' + D_2'' \sim D_1'' + D_2 + D_2'$, значит $C_i \cdot D_1 + C_i \cdot D_1' + C_i \cdot D_2'' \sim C_i \cdot D_1'' + C_i \cdot D_2 + C_i \cdot D_2'$ и билинейность следует. □

Упражнение 20.2. *Пусть h — прямая на $\mathbb{P}^2$. Покажите, что $h^2 = 1$.*

Упражнение 20.3. *Пусть a и b — вертикальная и горизонтальная прямые на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Покажите, что $a^2 = b^2 = 0$, $a \cdot b = 1$.*

Формула присоединения

Пусть $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие гладкого многообразия, а $\mathcal{J}$ — его пучок идеалов.

Лемма 20.5. *Пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ — локально свободный пучок на Z, $\mathsf{rk}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = \mathsf{codim}_X Z$.*

Доказательство. Домножая точную последовательность $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z \to 0$ на $\mathcal{J}$ получаем точную последовательность $0 \to \mathcal{J} \otimes \mathcal{J} \to \mathcal{J} \to \mathcal{J} \otimes \mathcal{O}_Z \to 0$, откуда $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong \mathcal{J} \otimes \mathcal{O}_Z$. Отсюда уже видно, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ сосредоточен на Z. Проверять локальную свободность можно локально. Пусть $z \in Z$ — точка. Выберем регулярную последовательность $f_1, \dots, f_c$, порождающую идеал $\mathcal{J}_z \subset \mathcal{O}_{X,z}$ и рассмотрим резольвенту Кошуля

$$\dots \to \mathcal{O}_{X,z}^{\oplus\binom{c}{3}} \to \mathcal{O}_{X,z}^{\oplus\binom{c}{2}} \to \mathcal{O}_{X,z}^{\oplus c} \to \mathcal{J} \to 0$$

Домножая ее на $\mathcal{O}_{Z,z}$ получаем комплекс

$$\dots \to \mathcal{O}_{Z,z}^{\oplus\binom{c}{3}} \to \mathcal{O}_{Z,z}^{\oplus\binom{c}{2}} \to \mathcal{O}_{Z,z}^{\oplus c}$$

с нулевыми дифференциалами (так как $f_i = 0$ в $\mathcal{O}_{Z,z}$). В частности, $\mathcal{J}_z \otimes \mathcal{O}_{Z,z} \cong \mathcal{O}_{Z,z}^c$. □

Следствие 20.6. *Если $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие гладкого многообразия, то последовательность*

$$0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \Omega_{X|Z} \to \Omega_Z \to 0$$

точна.

Доказательство. Эта последовательность всегда точна справа. Отсюда следует, что пучок $\mathsf{Ker}(\Omega_{X|Z} \to \Omega_Z)$ локально свободен как ядро эпиморфизма локально свободных пучков, а его ранг равен коразмерности Z в X. Значит $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \mathsf{Ker}(\Omega_{X|Z} \to \Omega_Z)$ — эпиморфизм локально свободных пучков одинакового ранга, а значит — изоморфизм. □

Определение 20.7. Пучок $\mathcal{N}_{Z/X} := (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^*$ называется *нормальным пучком* (или *нормальным расслоением*) Z в X.

Теорема 20.8 (формула присоединения). *Если $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие гладкого многообразия, то $\omega_Z \cong \omega_{X|Z} \otimes \mathsf{det}\, \mathcal{N}_{Z/X}$.*

Упражнение 20.4. *Пусть $Z \subset X$ — подмногообразие коразмерности r, являющееся схемой нулей глобального сечения локально свободного пучка E на X ранга r. Докажите, что $\mathcal{N}_{Z/X} \cong E_{|Z}$. (Указание: воспользуйтесь комплексом Кошуля $\dots \to \Lambda^2 E^* \to E^* \to \mathcal{O}_X$).*

Пусть C — гладкая кривая на поверхности S. В силу предыдущего упражнения $\mathcal{N}_{C/S} \cong \mathcal{O}_S(C)_{|C}$. Будем для краткости обозначать этот пучок $\mathcal{O}_C(C)$. Пользуясь формулой присоединения получаем

Следствие 20.9. *Если C — гладкая кривая на поверхности S, то $K_C = (K_S + C)_{|C}$. В частности, $2g(C) - 2 = (K_S + C) \cdot C$.*

Упражнение 20.5.
(i) Пусть C — кривая степени d в $\mathbb{P}^2$. Докажите, что $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.
(ii) Пусть C — кривая бистепени (a, b) в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Докажите, что $g(C) = (a-1)(b-1)$.
(iii) Пусть C — пересечение поверхностей степени $d_1, d_2, \dots, d_n$ в $\mathbb{P}^{n+1}$. Докажите, что $g(C) = d_1 d_2 \dots d_n(d_1 + d_2 + \dots + d_n - n - 2)/2 + 1$.

Теорема Римана–Роха

Как и в случае кривых теорема Римана–Роха для поверхностей вычисляет эйлерову характеристику пучка в терминах его инвариантов и инвариантов поверхности. Вначале несколько слов об инвариантах поверхности.

Пусть вообще, X — гладкое проективное многообразие. Пусть $\Omega_X^i = \Lambda^i\Omega_X$ — пучок дифференциальных i-форм на X. Заметим, что внешнее произведение дает невырожденное спаривание $\Omega_X^i \otimes \Omega_X^{n-i} \to \Omega_X^n = \omega_X$, откуда видно, что $(\Omega_X^i)^* \otimes \omega_X \cong \Omega_X^{n-1}$. Положим

$$h^{ij}(X) = \operatorname{dim} H^i(X, \Omega_X^j).$$

Числа $h^{ij}(X)$ называются *числами Ходжа* многообразия X. Из двойственности Серра следует симметричность чисел Ходжа:

$$h^{ij} = \operatorname{dim} H^i(X, \Omega_X^j) = \operatorname{dim} H^{n-i}(X, (\Omega_X^j)^* \otimes \omega_X) = \operatorname{dim} H^{n-i}(X, \Omega_X^{n-j}) = h^{n-i,n-j}(X).$$

Замечание 20.10. На самом деле, имеется также равенство $h^{ij}(X) = h^{ji}(X)$. Над полем комплексных чисел оно следует из теории Ходжа, строящей на комплекных когомологиях ассоциированного комплексного многообразия $H^k(X, \mathbb{C})$ разложение в прямую сумму $H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{i+j=k} H^{ij}(X)$, такое что $H^{ji}(X) = \overline{H^{ij}(X)}$, и отождествляющей $H^{ij}(X) = H^i(X, \Omega^j(X))$. Из теории Ходжа также следует, что $\sum_{i+j=k} h^{ij}(X) = b^k(X)$ — k-ое число Бетти.

В случае поверхности наиболее важными инвариантами являются

- *Геометрический род* $p_g = \operatorname{dim} H^0(S, \omega_S) = h^{02}(S) = h^{20}(S)$ и
- *Иррегулярность* $q = \operatorname{dim} H^1(S, \mathcal{O}_S) = h^{10}(S)$.

Теорема 20.11 (теорема Римана–Роха). *Пусть D — дивизор на гладкой проективной поверхности S над полем k. Тогда*

$$\operatorname{dim}_k H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - \operatorname{dim}_k H^1(S, \mathcal{O}_S) + \operatorname{dim}_k H^2(S, \mathcal{O}_S(D)) = \frac{1}{2} D \cdot (K - D) + 1 - q + p_g.$$

Доказательство. Пусть вначале $D = 0$. Тогда $\mathcal{O}_S(D) = \mathcal{O}_S$, $H^0(S, \mathcal{O}_S) = k$, $\operatorname{dim} H^1(S, \mathcal{O}_S) = q$ и $\operatorname{dim} H^2(S, \mathcal{O}_S) = g$ по определению рода, поэтому требуемое равенство очевидно выполняется.

Пусть теперь C — гладкая кривая, а D — любой дивизор. Домножая точную последовательность $0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0$ на $\mathcal{O}_S(D)$ получаем

$$0 \to \mathcal{O}_S(D - C) \to \mathcal{O}_S(D) \to \mathcal{O}_C(D) \to 0$$

Отсюда $\chi(\mathcal{O}_S(D)) - \chi(\mathcal{O}_S(D - C)) = \chi(\mathcal{O}_C(D))$. Вычислим его с помощью теоремы Римана–Роха на кривой C: $\chi(\mathcal{O}_C(D)) = C \cdot D + 1 - g(C)$, а род кривой найдем из формулы присоединения $g(C) = \frac{1}{2}(K + C) \cdot C + 1$. Получаем

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) - \chi(\mathcal{O}_S(D - C)) = C \cdot D - \frac{1}{2}(K + C) \cdot C$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} D \cdot (K - D) - \frac{1}{2}(D - C) \cdot (K - D + C) = \frac{1}{2}(D \cdot C - C \cdot K + D \cdot C - C \cdot C) = D \cdot C - \frac{1}{2} C \cdot (K + C),$$

откуда видно, что теорема Римана–Роха верна для D тогда и только тогда, когда она верна для $D - C$. Остается заметить, что всякий дивизор можно представить в виде разности двух гладких кривых. □

Раздутия и бирациональные инварианты

Напомни, что раздутием пучка идеалов $\mathcal{J}$ на схеме X называется схема $\mathrm{Proj}_X(\oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{J}^m)$. В случае, когда $\mathcal{J}$ — пучок идеалов гладкого подмногообразия $Z \subset X$, раздутие $\mathcal{J}$ также называется раздутием Z, или раздутием с центром в Z. Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие пучка идеалов $\mathcal{J}$. Ясно, что пучок $\pi^*\mathcal{J}$ на $\tilde{X}$ соответствует градуированному модулю $\oplus_{m=0}^{\infty}(\mathcal{J} \otimes \mathcal{J}^m)$, а его образ при естественном отображении в $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ — модулю $\oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{J}^{m+1}$, который в свою очередь соответствует обратимому пучку $\mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(1)$. Оказывается, это свойство является универсальным свойством раздутия.

Теорема 20.12 (универсальное свойство раздутия). *Пусть $f : Y \to X$ — морфизм, и пучок идеалов $\mathcal{L} = \mathsf{Im}(f^*\mathcal{J} \to \mathcal{O}_Y)$ обратим. Тогда существует морфизм $g : Y \to \tilde{X}$, такой что $f = \pi \circ g$, где $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие идеала $\mathcal{J}$.*

Доказательство. Ясно, что наличие такого морфизма равносильно существованию сечения проекции $Y \times_X \tilde{X} \to Y$. Однако, легко видеть, что $Y \times_X \tilde{X} = \mathrm{Proj}_Y(\oplus_{m=0}^{\infty}(f^*\mathcal{J}^m))$ (по определению Proj и расслоенного произведения), а $Y = \mathrm{Proj}_Y(\oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{L}^m)$, поэтому достаточно заметить, что сюръекция $f^*\mathcal{J} \to \mathcal{L}$ дает эпиморфизм алгебр $\oplus_{m=0}^{\infty}(f^*\mathcal{J}^m) \to \oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{L}^m$. □

Упражнение 20.6. *В условиях предыдущей теоремы докажите единственность g.*

Предложение 20.13. *Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие гладкого подмногообразия $Z \subset X$, $E = \pi^{-1}(Z) \subset \tilde{X}$. Тогда $\tilde{X}$ гладко, $E \cong \mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/X})$, и $\mathcal{N}_{E/\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1)_{|E} \cong \mathcal{O}_{E/Z}(-1)$.*

Доказательство. Ясно, что $E = \pi^{-1}(Z) = \tilde{X} \times_X Z = \mathrm{Proj}_Z(\oplus_{m=0}^{\infty}(J^m \otimes \mathcal{O}_Z))$ по определению Proj и расслоенного произведения. С другой стороны, домножая точную последовательность $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z \to 0$ на $\mathcal{J}^m$ находим $\mathcal{J}^m \otimes \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1}$. Наконец, если $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие, то $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 = \mathcal{N}^*_{Z/X}$ — локально свободный пучок на Z, а $\mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1} \cong S^m\mathcal{N}^*_{Z/X}$ (если $\mathcal{J}$ локально порождается регулярной последовательнсотью $f_1, f_2, \dots, f_c$, то $\mathcal{J}^m$ порождается всеми мономами степени m от $f_1, f_2, \dots, f_c$, а их образы в $\mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1}$ образуют базис). Таким образом, $E \cong \mathrm{Proj}_Z(\oplus_{m=0}^{\infty}S^m\mathcal{N}^*_{Z/X}) = \mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/X})$.

Далее, легко видеть, что пучок идеалов $\mathcal{J}_E$ подсхемы $E \subset \tilde{X}$ соответствует градуированному модулю $\oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{J}^{m+1}$, то есть $\mathcal{J}_E = \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(1)$. В частности $\mathcal{J}_E$ — обратимый пучок, то есть E — дивизор Картье. Так как E гладок, заключаем что $\tilde{X}$ гладко вдоль E. С другой стороны, так как $\mathcal{J}_{|X\setminus Z} \cong \mathcal{O}_{X\setminus Z}$, то $\tilde{X} \setminus E = X \setminus Z$, поэтому $\tilde{X}$ гладко и вне E.

Наконец, так как $\mathcal{J}_E = \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(1)$, заключаем, что $\mathcal{N}^*_{E/\tilde{X}} = (\mathcal{J}_E)_{|E} = \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(1)_{|E} = \mathcal{O}_{E/Z}(1)$. Дуализируя, получаем $\mathcal{N}_{E/\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1)_{|E} \cong \mathcal{O}_{E/Z}(-1)$. □

Предложение 20.14. *Имеем изоморфизм $\mathrm{Pic}\,\tilde{X} \cong \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Pic}(X \setminus Z) = \mathrm{Pic}\,X$ и $\mathrm{Pic}(\tilde{X} \setminus E) = \mathrm{Pic}\,\tilde{X}/\mathbb{Z}E$, так как X и $\tilde{X}$ нормальны. Но $X \setminus Z = \tilde{X} \setminus E$, откуда получаем точную последовательность абелевых групп $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}\,\tilde{X} \to \mathrm{Pic}\,X \to 0$. Остается заметить, что морфизм $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}\,\tilde{X}$, $k \mapsto \mathcal{O}_{\tilde{X}}(kE)$ инъективен, так как $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(kE)_{|E} \cong \mathcal{O}_{E/Z}(-k)$, и что гомоморфизм $\pi^* : \mathrm{Pic}\,X \to \mathrm{Pic}\,\tilde{X}$ задает расщепление получившейся точной тройки. □

Следствие 20.15. *Если $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие гладкого подмногообразия $Z \subset X$, то $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + (c-1)E$, где $c = \mathsf{codim}_Z\,X$.*

Доказательство. Ясно, что $\omega_{\tilde{X}} = \pi^*L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE)$. Ограничивая на $\tilde{X} \setminus E$ получаем $L = \omega_X$, то есть $\omega_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE)$. По формуле присоединения находим $\omega_E = (\omega_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E))_{|E} = (\pi^*\omega_X \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}((a+1)E))_{|E} = \pi^*(\omega_{X|Z}) \otimes \mathcal{O}_{E/Z}(-a-1)$. В частности, если $E_z = \pi^{-1}(z)$ — слой над точкой $z \in Z$, то $\omega_{E|E_z} = \mathcal{O}_{E_z}(-a-1)$. Но $\omega_{E|E_z} = \omega_{E_z}$, а E_z — проективное пространство размерности $\mathsf{rk}(\mathcal{N}_{Z/X}) = c$, поэтому $a+1 = c$. □

Лемма 20.16. *Пусть X и Y — бирациональные проективные многообразия, F_X — произвольный тензорный функтор, примененный к пучку дифференциалов Ω_X (например, $F_X = \Omega^i_X$ или $F_X = \omega^n_X$), а F_Y — тот же тензорный функтор, примененный к пучку Ω_Y. Тогда $H^0(X, F_X) \cong H^0(Y, F_Y)$. В частности, $\dim H^0(X, F_X)$ — бирациональный инвариант.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — бирациональный изоморфизм, а $U \subset X$ — максимальное открытое подмножество, на котором f определено. Заметим, что $\mathsf{codim}_X(X - U) \geq 2$, так как во всякую точку коразмерности 1 морфизм f можно продолжить по валюативному критерию собственности. Кроме того, морфизм $f_{|U} : U \to Y$ — регулярен. Заметим, что $F_{X|U} \cong F_U \cong f^*_{|U}F_Y$. Отсюда следует, что отображения ограничения $H^0(X, F_X) \to H^0(U, F_U)$ и обратного образа $f^*_{|U} : H^0(Y, F_Y) \to H^0(U, F_U)$ являются вложениями. Действительно, всякое сечение локально свободного пучка F_X или F_Y, обращающееся в нуль в общей точке, равно нулю тождественно. С другой стороны, отображение $H^0(X, F_X) \to H^0(U, F_U)$ сюръективно по теореме Хартогса: сечение локально свободного пучка на нормальном многообразии, определенное вне подмножества коразмерности ≥ 2, продолжается на все многообразие. Таким образом, $H^0(Y, F_Y) \subset H^0(U, F_U) = H^0(X, F_X)$. Аналогично проверяется, что $H^0(X, F_X) \subset H^0(Y, F_Y)$. □

Доказанная лемма позволяет построить множество бирациональных инвариантов. Важнейшими из них являются числа Ходжа $h^{0i}(X) = \dim H^0(X, \Omega^i_X)$ (в частности геометрический род $p_g(X) = \dim H^0(X, \omega^i_X)$), а также плюрирода (или кратные рода) $P_n(X) = \dim H^0(X, \omega^n_X)$. Другой пример бирациональных инвариантов — числа Ходжа $h^{i0}(X) = \dim H^i(X, \mathcal{O}_X)$ (заметим, что это согласуется с симметрией $h^{ij}(X) = h^{ji}(X)$). Ограничимся доказательством этого для гладких раздутий.

Лемма 20.17. *Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие гладкого подмногообразия $Z \subset X$. Тогда $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_X$, $R^{>0}\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$.*

Доказательство. Ясно, что на дополнении к Z указанные изоморфизмы выполняются. Для проверки их в произвольной точке $z \in Z$ воспользуемся теоремой о формальных функциях $(R^i\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})^\wedge_z = \varprojlim H^i(E^{(m)}_z, \mathcal{O}_{E^{(m)}_z})$. Пусть $n = \dim X$, $c = \mathsf{codim}_X Z$ и пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ — регулярная последовательность, задающая идеал $\mathfrak{m}_z$ в $\mathcal{O}_{X,z}$, такая что $f_1, \dots, f_c$ задает идеал $\mathcal{J}_Z$. Ясно, что слой E_z задается регулярной последовательностью $f_0, f_{c+1}, f_{c+2}, \dots, f_n$, где f_0 — сечение расслоения $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E) = \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1)$. Отсюда видно, что пучок $\mathcal{J}^m_{E_z}/\mathcal{J}^{m+1}_{E_z}$ раскладывается в прямую сумму пучков $\mathcal{O}_{E_z}$, $\mathcal{O}_{E_z}(1)$, … , $\mathcal{O}_{E_z}(m)$. В частности, так как $E_z = \mathbb{P}^{c-1}$, мы видим, что $H^0(\mathcal{J}^m_{E_z}/\mathcal{J}^{m+1}_{E_z}) = 0$. Но пучок $\mathcal{O}_{E^{(m)}_z} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{J}^m_{E_z}$ обладает фильтрацией с факторами $\mathcal{J}^k_{E_z}/\mathcal{J}^{k+1}_{E_z}$, $0 \leq k \leq m-1$, поэтому тоже не имеет высших когомологий и по теореме о формальных функциях заключаем $R^{>0}\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$.

Остается заметить, что локально слой пучка $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ является $\mathcal{O}_X$-подалгеброй в $K(X)$, конечной над $\mathcal{O}_X$, следовательно целой над $\mathcal{O}_X$. Но $\mathcal{O}_X$ целозамкнуто, так как X нормально, поэтому $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$. □

Учитывая двойственность Серра заключаем, что вся граница ромба Ходжа является бирациональным инвариантом. А вот внутренность — наоборот, инвариантом не является.