Лекция 21.

Бирациональные преобразования поверхностей. Минимальные модели. Численная эффективность. Линейчатые поверхности. Классификация.

Бирациональные преобразования поверхностей

Напомним некоторые факты, связанные с раздутиями гладких подмногообразий. Если X — поверхность, то единственное нетривиальное гладкое раздутие — раздутие точки.

Теорема 20.1. *Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие точки P на поверхности X, $E = \pi^{-1}(P)$. Тогда $\tilde{X}$ — гладкая, $E \cong \mathbb{P}^1$. Кроме того, $\operatorname{Pic} \tilde{X} = \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}E$, а индекс пересечения можно вычислять по формулам $(\pi^*C)\cdot(\pi^*D) = C\cdot D$, $(\pi^*C)\cdot E = 0$ и $E^2 = -1$. Наконец, $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + E$ и, в частности, $K_{\tilde{X}}^2 = K_X^2 - 1$.*

Доказательство. Все утверждения кроме формул для индекса пересечения были доказаны раньше. Чтобы проверить эти формулы, заметим, что всякий дивизор на X можно представить в виде разности двух гладких кривых, не проходящих через точку P (здесь потребуется слегка усиленная версия теоремы Бертини, сформулируйте и докажите ее!). Поэтому достаточно считать, что C и D — такие кривые. Но тогда $\pi^*C \cap E = \emptyset$, поэтому $(\pi^*C)\cdot E = 0$. Кроме того, все точки пересечения кривых π^*C и π^*D лежат в $\tilde{X} \setminus E = X \setminus P$, и легко видеть, что локальные индексы пересечения совпадают. Поэтому $(\pi^*C)\cdot(\pi^*D) = C\cdot D$. Наконец $E^2 = \operatorname{deg} \mathcal{N}_{E/\tilde{X}} = \operatorname{deg} \mathcal{O}_E(-1) = -1$. □

Упражнение 20.1. *Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие точки на гладкой поверхности X. Докажите, что $h^{11}(\tilde{X}) = h^{11}(X) + 1$ (указание: постройте точную последовательность $0 \to \pi^*\Omega_X \to \Omega_{\tilde{X}} \to \mathcal{O}_E(-2) \to 0$).*

Упражнение 20.2. *Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, A — двумерное регулярное локальное кольцо, x, y — локальные параметры. Докажите, что подсхема $\tilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^1$, заданная уравнением $uy = vx$, где $(u : v)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, является раздутием замкнутой точки X. В частности, раздутие покрывается двумя аффинными картами $\{u \neq 0\}$ и $\{v \neq 0\}$ с локальными координатами $(x, v/u)$ и $(u/v, y)$ соответственно.*

Упражнение 20.3. *Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие точки P на гладкой поверхности X. Пользуясь предыдущим упражнением, докажите, что*
(i) $L_{>1}\pi^*\mathcal{F} = 0$ для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X;
(ii) $R^{>1}\pi_*\mathcal{G} = 0$ для всякого когерентного пучка $\mathcal{G}$ на $\tilde{X}$;
(iii) для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X выполнено $\pi_*L_1\pi^*\mathcal{F} = 0$, $R^1\pi_*\pi^*\mathcal{F} = 0$ и существует точная последовательность $0 \to R^1\pi_*L_1\pi^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \pi_*\pi^*\mathcal{F} \to 0$;
(iv) $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE) = \mathfrak{m}_P^k$, $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE) = 0$ для всех $k \geq 0$;
(v) $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(kE) = \mathcal{O}_X$, $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(kE) = (\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_P^{k-1})^*$ для всех $k \geq 0$.

Оказывается, для гладких поверхностей любое бирациональное преобразование сводится к последовательности раздутий точек.

Предложение 20.2. *Пусть $f : Y \to X$ — регулярный бирациональный морфизм и пусть обратное отображение $f^{-1} : X \to Y$ не определено в точке P. Тогда существует морфизм $g : Y \to \tilde{X}$, где $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие точки P, такой что $f = \pi \circ g$.*

Доказательство. Можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, A — регулярное локальное двумерное кольцо. Пусть (x, y) — локальные координаты на X. Достаточно показать, что идеал, порожденный функциями (x, y) на Y — локально главный (тогда g существует по универсальному свойству раздутия). Предположим, это не так. Тогда существует точка $Q \in Y$ в которой идеал (x, y) — не главный. Заметим, что поскольку f^{-1} не определено в P, то $\operatorname{dim} f^{-1}(P) = 1$, причем $f^{-1}(P)$ связно по теореме Зариского. Следовательно, через точку Q проходит неприводимая кривая $C \subset f^{-1}(P)$. Пусть z — ее уравнение в Q (здесь мы пользуемся локальной факториальностью локального кольца точки Q, то есть гладкостью Y). Тогда $(x, y) \subset (z)$, то есть $x = az$, $y = bz$, причем по предположению $a, b \in \mathfrak{m}_Q$, то есть $x, y \in \mathfrak{m}_Q^2$.

Рассмотрим график $\Gamma \subset Y \times \tilde{X}$ рационального отображения $g = \pi^{-1} \circ f : Y \to \tilde{X}$. Пусть $q : \Gamma \to Y$ и $r : \Gamma \to \tilde{X}$ — проекции. Так как g не опредлено в Q, то $\operatorname{dim} q^{-1}(Q) \geq 1$, причем $\pi(r(q^{-1}(Q))) = f(q(q^{-1}(Q))) = f(Q) = P$, то есть $r(q^{-1}(Q)) = E$. С другой стороны, проекция $r : \Gamma \to \tilde{X}$ бирациональна, поэтому найдется точка $R \in E$, такая что r — изоморфизм над R. Ясно, что $q(r^{-1}(R)) = Q$, то есть $r^{-1}(R) = (Q, R)$. Морфизм r задает изоморфизм локальных колец $\mathcal{O}_{\tilde{X},R} \cong \mathcal{O}_{\Gamma,(Q,R)}$, а морфизм q — вложение колец $\mathcal{O}_{Y,Q} \to \mathcal{O}_{\Gamma,(Q,R)}$. Компонируя их, получаем локальное вложение локальных колец $\mathcal{O}_{Y,Q} \to \mathcal{O}_{\tilde{X},R}$. Ясно, что оно коммутирует с вложением в общее поле частных, поэтому функции x, y должны лежать в $\mathfrak{m}_R^2$. Но по упражнению 20.2 в точке R одна из функций x, y является локальной координатой, то есть не лежит в $\mathfrak{m}_R^2$. □

Упражнение 20.4. *Пусть $Y_0 \subset \mathbb{P}^3$ — квадратичный конус, Q — его вершина, а $f_0 : Y_0 \to \mathbb{P}^2 = X$ — проекция из точки $P_0 \in Y_0 \setminus Q_0$. Докажите, что*
(i) Пусть $Y \to Y_0$ — раздутие точки P_0. Покажите, что морфизм $f : Y \to Y_0 \to X$ — регулярен, а f^{-1} не определен в точке $P = f_0(Q)$.
(ii) Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — раздутие точки P. Покажите, что отображение $\pi^1 \circ f : Y \to X$ не определено в точке Q.

Следствие 20.3. *Пусть $f : Y \to X$ — бирациональный регулярный морфизм между гладкими проективными поверхностями. Тогда f раскладывается в композицию конечного числа раздутий точки.*

Доказательство. Морфизм f^{-1} не определен в конечном множестве точек, прообраз каждой из которых кривая в Y. Пусть n — суммарное число неприводимых компонент этих кривых. Морфизм $Y \to X$ пропускается через $Y \to \tilde{X}$ и ясно, что при этом морфизме стягивается на одну кривую меньше. Остается применить индукцию по n. □

Предложение 20.4. *Пусть X — гладкая поверхность, а $f : Y \to X$ бирациональный проективный морфизм. Найдется последовательность раздутий точек $X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X$ и регулярное отображение $g : X_n \to Y$, так что $f \circ g = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n$.*

Доказательство. Ясно, что f — раздутие некоторого пучка идеалов $\mathcal{J}$ на X. В силу универсального свойства раздутия достаточно построить такую последовательность раздутий точек, что $\operatorname{Im}(\pi_n^* \dots \pi_1^* \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{X_n})$ — обратимый пучок. Пусть $\mathcal{J}$ — пучок идеалов подсхемы $Z \subset X$ и $P \in Z$. Пусть $k \geq 1$ — максимальное число, такое что $\mathcal{J} \subset \mathfrak{m}_P^k$. Рассмотрим раздутие $\pi : \tilde{X} \to X$ в точке P и обозначим $\mathcal{J}' = \operatorname{Im}(\pi^* \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{\tilde{X}})$. Заметим, что $\operatorname{Hom}(\mathcal{J}, \mathfrak{m}_P^k) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE)) \cong \operatorname{Hom}(\pi^* \mathcal{J}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE))$, поэтому $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE)$. Более того, ясно что $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE)/\mathcal{J}'$ — структурный пучок нульмерной подсхемы $Z' \subset \tilde{X}$ (то что носитель этого пучка вне E нульмерен очевидно, а если бы все E лежало в носителе этого пучка, то мы имели бы морфизм $\mathcal{J}' \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(k+1)E)$, который давал бы вложение $J \to \mathfrak{m}_P^{k+1}$, что невозможно по выбору числа k). Покажем, что $\operatorname{dim} H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{Z'}) < \operatorname{dim} H^0(X, \mathcal{O}_Z)$. Для этого заметим, что так как морфизм $\pi^*\mathcal{J} \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ пропускается через $\mathcal{J}'$, то морфизм $\mathcal{J} \to \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$ пропускается через $\pi_*\mathcal{J}'$, поэтому $\pi_*\mathcal{J}'$ — идеал в $\mathcal{O}_X$, содержащий $\mathcal{J}$. Кроме того, $R^1\pi_*\pi^*\mathcal{J} = 0$, поэтому наличие сюръекции $\pi^*\mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ означает $R^1\pi_*\mathcal{J}' = 0$. Теперь применяя функтор π_* к последовательности $0 \to \mathcal{J}' \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE) \to \mathcal{O}_{Z'} \to 0$ получаем точную последовательность $0 \to \pi_*\mathcal{J}' \to \mathfrak{m}_P^k \to \pi_*\mathcal{O}_{Z'} \to 0$, из которой следует, что пучок $\pi_*\mathcal{O}_{Z'}$ накрывается пучком $\mathfrak{m}_P^k/\mathcal{J}$, значит

$$\dim H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{Z'}) = \dim H^0(X, \pi_*\mathcal{O}_{Z'}) \le \dim H^0(X, \mathfrak{m}_P^k/\mathcal{J}) < \dim H^0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_Z).$$

Остается применить индукцию. □

Следствие 20.5. *Всякое бирациональное отображение между гладкими проективными поверхностями раскладывается в композицию раздутий гладких точек и обратных к ним преобразований.*

Доказательство. Пусть $f : X \to X'$ — бирациональное отображение и $Y \subset X \times X'$ — его график. Проекция $Y \to X$ является регулярным бирациональным морфизмом, поэтому найдется последовательность раздутий гладких точек $X_n \to \cdots \to X_1 \to X$ и регулярный морфизм $X_n \to Y$. Остается разложить композицию $X_n \to Y \to X'$ в виде композиции раздутий гладких точек. □

Минимальные модели

При изучении кривых мы показали, что в каждом бирациональном классе существует ровно одна гладкая проективная кривая (таким образом, бирациональная классификация кривых сводится к бирегулярной). Для поверхностей это уже очевидно неверно, так как любую поверхность можно раздуть. Тем не менее, наложив дополнительное ограничение, можно выделить канонический элемент во всяком бирациональном классе.

Определение 20.6. Гладкая проективная поверхность X называется *минимальной*, если не существует нетривиального регулярного морфизма $X \to X'$ на гладкую поверхность X'.

Как было показано выше, всякая неминимальная поверхность получается раздутием, поэтому на ней обязательно есть рациональная кривая с индексом самопересечения -1 (так называемая (-1)-*кривая*, или *исключительная кривая первого рода*). Следующая теорема показывает, что наличие такой кривой равносильно неминимальности.

Теорема 20.7 (Кастельнуово). *Пусть E — гладкая рациональная (-1)-кривая на гладкой проективной поверхности Y. Тогда существует гладкая проективная поверхность X и точка P на ней, такая что Y изоморфна раздутию $\tilde{X}$ в точке P, а кривая E является исключительным дивизором раздутия.*

Доказательство. Пусть H — очень обильный дивизор на Y с условием $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H)) = 0$, и положим $n = H \cdot E$. Из обильности H следует $n > 0$. Рассмотрим линейную систему $|H+nE|$. Докажем, что эта линейная система не имеет базисных точек. Отсутствие базисных точек вне E очевидно. Так как $(H + nE) \cdot E = 0$, то всякий дивизор из нашей линейной системы либо не пересекается с кривой E, либо содержит ее. Таким образом, надо проверить, что в нашей линейной системе найдется дивизор, не содержащий E. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_Y(H + (n-1)E) \to \mathcal{O}_Y(H + nE) \to \mathcal{O}_E \to 0.$$

Из соответствующей точной последовательности когомологий видно, что достаточно проверить, что $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + (n-1)E)) = 0$. Докажем по индукции, что $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + kE)) = 0$ для $0 \le k \le n-1$. База индукции, $k = 0$, выполнена по выбору H. Шаг индукции следует из точной последовательности когомологий, примененной к

$$0 \to \mathcal{O}_Y(H + (k-1)E) \to \mathcal{O}_Y(H + kE) \to \mathcal{O}_E(n-k) \to 0,$$

так как $H^{>0}(Y, \mathcal{O}_E(n-k)) = H^{>0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n-k)) = 0$ при $k \le n$.

Рассмотрим отображение, задаваемое линейной системой $|H + nE|$. Обозначим нормализацию его образа через X, а индуцированное отображение $Y \to X$ через π. Так как линейная система $|H+nE|$ обильна вне E, отделяет E от других точек поверхности Y и стягивает E в точку (обозначим ее через P), то отображение $\pi : Y \to X$ задает изоморфизм $Y \setminus E \cong X \setminus P$. В частности, X гладка вне P. Покажем, что X гладка и в P. Вычислим для этого пополнение локального кольца $(\mathcal{O}_{X,P})^\wedge$. Так как X — нормальна, то $(\mathcal{O}_{X,P})^\wedge = \varprojlim H^0(E^{(n)}, \mathcal{O}_{E^{(n)}})$ по теореме о формальных функциях. Воспользуемся точной последовательностью

$$0 \to \mathcal{J}_E^n / \mathcal{J}_E^{n+1} \to \mathcal{O}_{E^{(n+1)}} \to \mathcal{O}_{E^{(n)}} \to 0$$

и изоморфизмом $\mathcal{J}_E^n/\mathcal{J}_E^{n+1} \cong S^n(\mathcal{J}_E/\mathcal{J}_E^2) = S^n(\mathcal{O}_E(1)) \cong \mathcal{O}_E(n)$. Выбирая базис $\{x, y\}$ в $H^0(E, \mathcal{O}_E(1))$, получаем базис $\{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ в $H^0(E, \mathcal{O}_E(n))$, откуда по индукции следует, что $H^0(E^{(n)}, \mathcal{O}_{E^{(n)}}) \cong k[x, y]/\mathfrak{m}^{n+1}$, где $\mathfrak{m} = (x, y)$. Переходя к пределу, получаем $(\mathcal{O}_{X,P})^\wedge = k[[x, y]]$, значит X гладкая в точке P.

Теперь остается заметить, что согласно следствию 20.3 морфизм π есть композиция раздутий точек. Но π стягивает ровно одну кривую, поэтому π — раздутие точки P, а E — исключительный дивизор раздутия. □

Следствие 20.8. *Поверхность X минимальна тогда и только тогда, когда на ней нет рациональных (-1)-кривых.*

Следствие 20.9. *Всякая гладкая поверхность бирациональна минимальной поверхности.*

Доказательство. Пусть X — гладкая поверхность. Если на ней нет рациональных (-1)-кривых, она минимальна. Если же такая кривая есть, стянув ее, получим поверхность X_1. Повторяя то же рассуждение, получаем последовательность стягиваний $X \to X_1 \to X_2 \to \dots$ и надо лишь проверить, что такая последовательность не может быть бесконечной. В самом деле, в силу упражнения 20.1, имеем $h^{11}(X_1) = h^{11}(X) - 1$, $h^{11}(X_2) = h^{11}(X_1) - 1$, и т.д., но конечное число $h^{11}(X)$ не может бесконечное число раз уменьшаться на единицу, оставаясь при этом неотрицательным! □

Теперь займемся вопросом о единственности минимальной модели.

Численная эффективность

Определение 20.10. Дивизор D на поверхности X называется *численно эффективным* (по английски *numerically effective* или *nef*), если для всякой кривой C на X выполняется $D \cdot C \ge 0$.

Лемма 20.11. *Если канонический класс на поверхности X численно эффективен, то поверхность X минимальна.*

Доказательство. Если X не минимальна, то на ней есть рациональная (-1)-кривая E. По формуле присоединения $-2 = 2g(E) - 2 = K \cdot E + E^2 = K \cdot E - 1$, откуда $K \cdot E = -1$, то есть K не является численно эффективным. □

Теорема 20.12. *Если $f : X \to Y$ — бирациональный отображение и K_Y численно эффективен, то f — регулярно. В частности, если X — минимальная, то f — изоморфизм.*

Доказательство. Выберем минимальное представление f в виде композиции раздутий и стягиваний

$$X \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_{n-1} \leftarrow X_n = Y_m \to Y_{m-1} \to \dots \to Y_1 \to Y$$

и пусть E — исключительный дивизор раздутия $X_n \to X_{n-1}$. Покажем, что кривая E не стягивается морфизмом $g : X_n \to Y$. Действительно, предположим, что $g(E)$ — точка. Пусть H — очень обильный дивизор на Y. Тогда $g^*H \cdot E = 0$ (выберем дивизор в линейной системе $|H|$, не проходящий через точку $g(E)$). Из теоремы 20.1 следует, что $g^*H = \pi^*D$, где $\pi : X_n \to X_{n-1}$, а D — некоторый дивизор на X_{n-1}. Заметим, что

$$\begin{aligned} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H)) \subset H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(g^*H)) = H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(\pi^*D)) \cong \\ \cong H^0(X_{n-1}, \pi_*\pi^*\mathcal{O}_{X_{n-1}}(D)) = H^0(X_{n-1}, \mathcal{O}_{X_{n-1}}(D)) \end{aligned}$$

в силу упражнения 20.3. Рассмотрим отображение $X_n \to \mathbb{P}^N$, заданное пространством глобальных сечений $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H))$ пучка $\mathcal{O}_{X_n}(g^*H) = \mathcal{O}_{X_n}(\pi^*D)$. С одной стороны, оно раскладывается в композицию проекции $X_n \to Y$ и вложения Y, заданного линейной системой $|H|$. С другой стороны, оно раскладывается в композицию проекции $X_n \to X_{n-1}$ и морфизма, заданного на X_{n-1} некоторой подсистемой линейной системы $|D|$. Отсюда следует, что последняя линейная система не имеет базисных точек и задает отображение X_{n-1} в проективное пространство, образ которого содержится в Y, в это проективное пространство вложенном. В частности, мы получаем морфизм $g' : X_{n-1} \to Y$, такой что $g = g' \circ \pi$. Следовательно, представление морфизма f в виде башни раздутий не минимально, что противоречит нашему предположению.

Итак, мы показали, что $g(E)$ — кривая. Так как K_Y — численно эффективен, получаем $g(E) \cdot K_Y \geq 0$. Докажем по индукции, что $g_k(E) \cdot K_{Y_k} \geq 0$, где $g_k : X_n \to Y_k$ — проекция. Действительно, пусть $\sigma : Y_k \to Y_{k-1}$ — раздутие. Тогда $g_k(E) \cdot \sigma^*K_{Y_{k-1}} = \sigma(g_k(E)) \cdot K_{Y_{k-1}} = g_{k-1}(E) \cdot K_{Y_{k-1}} \geq 0$ по предположению индукции, значит $g_k(E) \cdot K_{Y_k} = g_k(E) \cdot (\sigma^*K_{Y_{k-1}} + E_k) = g_k(E) \cdot \sigma^*K_{Y_{k-1}} + g_k(E) \cdot E_k$, причем первое слагаемое неотрицательно как доказано выше, а второе — индекс пересечения различных неприводимых кривых (если $g_k(E) = E_k$, то $g(E)$ — точка).

Итак, по индукции мы получаем $E \cdot K_{Y_m} = E \cdot K_{X_n} \geq 0$. Но $K_{X_n} = \pi^*K_{X_{n-1}} + E$, откуда $E \cdot K_{X_n} = E \cdot (\pi^*K_{X_{n-1}} + E) = E \cdot \pi^*K_{X_{n-1}} + E^2 = E^2 = -1$. Полученное противоречие показывает, что $X = X_n$, значит морфизм f регулярен. □

Таким образом, если канонический класс на минимальной поверхности численно эффективен, то она единственна в своем бирациональном классе. Тем не менее, бывают разные бирациональные минимальные поверхности.

Упражнение 20.5. *Покажите, что $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ минимальны и бирациональны.*

Однако таких примеров немного. А именно, выполняется

Теорема 20.13. *Если X — минимальная поверхность, а K_X — не численно эффективен, то либо $X \cong \mathbb{P}_B(\mathcal{E})$, где B — кривая, а $\mathcal{E}$ — расслоение ранга 2 на B, либо $X \cong \mathbb{P}^2$.*

К сожалению, полное и строгое доказательство этого утверждения весьма длинно, поэтому приведем лишь его набросок. Рассмотрим группу дивизоров по модулю численной эквивалентности $\mathsf{Num}(X)$ (дивизор D численно эквивалентен нулю, если $D \cdot C = 0$ для любой кривой C). Это конечно порожденная свободная абелева группа. Рассмотрим в $\mathsf{Num}(X) \otimes \mathbb{Q}$

множество $\mathsf{Eff}(X)$ всех элементов, представимых эффективными дивизорами с рациональными коэффициентами. Ясно, что это конус. Он называется конусом эффективных кривых.

Конус $\mathsf{Eff}(X)$ устроен весьма сложно. Однако кое-что сказать о нем можно. Во-первых, если H — обильный дивизор на X, то $\mathsf{Eff}(X)$ лежит в полупространстве $\{D \mid D \cdot H \ > 0\}$. Во-вторых, он содержит полуконус $\{D \mid D^2 > 0,\ D \cdot H > 0\}$. Действительно, если $D \cdot H > 0$, то $(K - nD) \cdot H < 0$ для $n \gg 0$, поэтому $H^2(X, \mathcal{O}_X(nD)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(K - nD)) = 0$, и по теореме Римана–Роха $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \geq \chi(\mathcal{O}_X(nD)) = \frac{1}{2}n^2D^2 + \cdots > 0$ при $n \gg 0$. Таким образом nD эффективен при $n \gg 0$, а значит $D \in \mathsf{Eff}(X)$. При этом конус $\mathsf{Eff}(X)$ может содержать и векторы с отрицательным квадратом. Заметим, однако, что пересечение $\mathsf{Eff}(X) \cap \{D \mid D \cdot K < 0\}$ не содержит векторов с отрицательным квадратом, если поверхность X минимальна. Действительно, если $D^2 < 0$, то найдется неприводимая компонента E дивизора D, такая что $E \cdot K < 0$ и $E^2 < 0$. Из формулы присоединения тогда следует, что E — рациональная (-1)-кривая, что противоречит минимальности поверхности X.

Итак, $\overline{\mathsf{Eff}(X)} \cap \{D \mid D \cdot K < 0\} = \{D \mid D \cdot H > 0,\ D \cdot K < 0,\ D^2 \geq 0\}$. Можно показать, что если $\mathsf{rk}(\mathsf{Num}(X)) \geq 2$, то найдется целочисленный дивизор D на границе, то есть $D^2 = 0$, $D \cdot H > 0$, $D \cdot K < 0$. Рассуждая как и выше, получаем $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \geq \chi(\mathcal{O}_X(nD)) = -\frac{1}{2}nD \cdot K + \cdots > 0$ при $n \gg 0$. Значит nD эффективен и даже подвижен. Так как $(nD)^2 = 0$, линейная система $|nD|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $f : X \to \mathbb{P}^N$. Пусть $X \to B \to \mathbb{P}^N$ — факторизация Штейна морфизма f. Ясно, что B — кривая. Пусть F — слой морфизма $X \to B$. Ясно, что $mF = D$, поэтому $F^2 = 0$, $F \cdot K < 0$. Кроме того, F неприводим (если $F = F_1 \cup F_2$, то $0 = F_i \cdot F = F_i^2 + F_i \cdot F_j > F_1^2$, то есть $F_1^2 < 0$ или $F_2^2 < 0$, что невозможно, так как F_i эффективны и либо $F_1 \cdot K < 0$, либо $F_2 \cdot K < 0$). Применяя к F формулу присоединения заключаем, что F — гладкая рациональная кривая. Итак, мы построили гладкий морфизм $X \to B$ со слоем $\mathbb{P}^1$. Можно показать, что всякий такой морфизм есть проективизация векторного расслоения ранга 2.

Упражнение 20.6. *Пусть $f : X \to B$ — гладкий морфизм, каждый слой которого изоморфен $\mathbb{P}^1$, а B — кривая. Докажите, что*
(i) морфизм f представляется в виде композиции $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_B(\mathcal{V}) \to B$, где $\mathcal{V}$ — расслоение ранга 3, i — замкнутое вложение, а слои X_b — коники в $\mathbb{P}(\mathcal{V}_b)$ (указание: $\mathcal{V} = f_*(\omega_X^{-1})^*$);
(ii) если b_0 — общая точка B, то коника $X_{b_0} \subset \mathbb{P}(\mathcal{V}_{b_0})$ имеет точку (теорема Тзена);
(iii) морфизм $f : X \to B$ обладает сечением, то есть существует морфизм $s : B \to X$, такой что $f \circ s = \mathsf{id}_B$;
(iv) если $\mathcal{E} = (f_*\mathcal{O}_X(s(B)))^*$, то $X \cong \mathbb{P}_B(\mathcal{E})$.

Если же $\mathsf{rk}(\mathsf{Num}(X)) = 1$, то можно показать, что $X \cong \mathbb{P}^2$.

Линейчатые поверхности

Поверхности вида $X = \mathbb{P}_B(\mathcal{E})$, где B — кривая, а $\mathcal{E}$ — расслоение ранга 2 называются *линейчатыми*. Изучим линейчатые поверхности над кривой $B = \mathbb{P}^1$.

Предложение 20.14. *Пусть $\mathcal{E}$ — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^1$. Тогда $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$.*

Доказательство. При $n \gg 0$ расслоение $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(-n)) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}^*(2+n))^* = 0$, а при $n \ll 0$ — $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(-n)) \neq 0$. Пусть b — максимальное n, такое что $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(-n)) \neq 0$. Рассмотрим вложение $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \to \mathcal{E}$. Если бы в какой-то точке $P \in \mathbb{P}^1$ отображение φ равнялось бы нулю, то оно бы раскладывалось в композицию $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \xrightarrow{P} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b+1) \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{E}$ (локально морфизм φ — это пара функций φ_1, φ_2; если $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{m}_P$, то $\varphi_1 = \varphi_1' t$, $\varphi_2 = \varphi_2' t$, где t — униформизующая локального кольца точки P, так что $\varphi = \varphi' \circ t$). Но по определению числа b такое невозможно, поэтому в каждой точке P морфизм φ нетривиален. Рассмотрим пучок $\mathcal{L} = \mathsf{Coker}\,\varphi$. Согласно приведенному ниже упражнению пучок $\mathcal{L}$ локально свободен. При этом $\mathsf{rk}(\mathcal{L}) = 1$, значит $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$. Подкручивая точную последовательность $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \to 0$ на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b-1)$ находим $0 = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(-b-1)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-b-1))$, значит $a \le b$. Остается заметить, что $\mathsf{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-a)) = 0$, поэтому точная последовательность расщепляется и $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$. □

Упражнение 20.7. *Пусть $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ — вложение локально свободных пучков, $\mathcal{G} = \mathsf{Coker}\,\varphi$. Покажите, что $\mathcal{G}$ локально свободен тогда и только тогда, когда морфизм φ является вложением в каждой точке (указание: $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{G}, \mathcal{O}/\mathfrak{m}_P) = \mathsf{Ker}\,\varphi_P$).*

Упражнение 20.8. *Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — локально свободные пучки. Докажите, что классы изоморфизма расширений $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{G} \to 0$ находятся во взаимно однозначном соответствии с пространством $H^1(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F})/(\mathsf{Aut}\,\mathcal{F} \times \mathsf{Aut}\,\mathcal{G})$ (указание: зафиксируйте аффинное покрытие $\{U_\alpha\}$, над каждым из U_α выберите расщепление $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{E})$ и покажите, что найдутся $\epsilon_{\alpha\beta} = s_\alpha - s_\beta \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F})$).*

Замечание 20.15. Доказанная лемма является частным случаем теоремы Гротендика, утверждающей, что всякий локально свободный пучок на $\mathbb{P}^1$ является прямой суммой обратимых пучков (доказажите ее индукцией по рангу!). Другое обобщение состоит в том, что всякий локально свободный пучок на кривой является расширением обратимых пучков.

Так как $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}(m))$, можно считать, что $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$. Соответствующая поверхность $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$ называется n-ой поверхностью Хирцебруха и обозначается Σ_n. Обозначим через E — сечение проекции $\Sigma_n \to \mathbb{P}^1$, соответствующее вложению $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$, а через F — ее слой.

Лемма 20.16. *Имеем $\mathrm{Pic}\,\Sigma_n = \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}F$, $F^2 = 0$, $E \cdot F = 1$, $E^2 = -n$.*

Доказательство. Из точной последовательности $\mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}F \to \mathrm{Pic}\,\Sigma_n \to \mathrm{Pic}(\Sigma_n \setminus (E \cup F)) \to 0$ и изоморфизма $\Sigma_n \setminus (E \cup F) \cong \mathbb{A}^2$ видно, что группа $\mathrm{Pic}\,\Sigma_n$ порождается классами E и F, так что остается проверить их независимость. Вычислим вначале индексы пересечения. Формулы $F^2 = 0$ и $E \cdot F = 1$ очевидны (разные слои линейно эквивалентны и не пересекаются; всякий слой трансверсально пересекает E в одной точке). Далее заметим, что сечение E', соответствующее вложению $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ лежит в линейной системе $E + nF$ и при этом не пересекает E. Значит $0 = E \cdot (E + nF) = E^2 + nE \cdot F = E^2 + n$, то есть $E^2 = -n$. Покажем теперь, что E и F линейно независимы. Пусть $xE + yF = 0$. Умножая на F получаем $x = 0$, а умножая на E' получаем $y = 0$. □

Упражнение 20.9. *Покажите, что $K_{\Sigma_n} = -2E - (n+2)F$.*

Упражнение 20.10. *Пусть D — эффективный дивизор на Σ_n с $D^2 = -1$. Покажите, что*
(i) $D \sim E + \frac{n-1}{2}F$;
(ii) всякий дивизор $D \in |E + mF|$, где $0 \le m < n$, имеет вид $D = E + F_1 + \dots + F_m$;
(iii) поверхность Σ_n минимальна, если $n \ne 1$.

Таким образом, минимальные модели рациональных поверхностей исчерпываются проективной плоскостью и поверхностями Σ_n, $n \ne 1$.

Пусть теперь B — кривая рода $g > 0$, а $\mathcal{E}$ — расслоение ранга 2 на B.

Лемма 20.17. *Поверхность $X = \mathbb{P}_B(\mathcal{E})$ минимальна и бирациональна произведению $B \times \mathbb{P}^1$.*

Доказательство. Пусть C — рациональная кривая на X. Проекция $C \to B$ не может быть доминантна, так как иначе $g(B) = 0$ по теореме Люрота. Значит C — слой и $C^2 = 0$. Значит на X нет (-1)-кривых, то есть X минимальна. Второе утверждение очевидно. $\square$

Кодаирова размерность и классификация поверхностей

Кодаирова размерность $\kappa(X)$ многообразия X определяется следующим образом. Для каждого $n > 0$ рассмотрим полную линейную систему $|nK|$. Если она пуста при всех n, положим $\kappa(X) = -1$. Иначе пусть $\kappa(X)$ — максимум по n размерности образа рационального отображения $X \to \mathbb{P}^N$, задаваемого линейной системой $|nK|$. Ясно, что $-1 \le \kappa(X) \le \mathsf{dim}\, X$.

Упражнение 20.11. *Докажите, что $P_n(X) \sim Cn^{\kappa(X)}$ при $n \to \infty$.*

Упражнение 20.12. *Пусть C — кривая рода g. Докажите, что $\kappa(C) = -1$, если $g = 0$; $\kappa(C) = 0$, если $g = 1$; и $\kappa(C) = 1$, если $g \ge 2$.*

Теорема 20.18. *Пусть X — минимальная поверхность кодаировой размерности κ. Тогда*

- *если $\kappa = -1$, то $X = \mathbb{P}^2$ или X — линейчатая;*
- *если $\kappa = 0$, то либо*
  - *X — поверхность типа $K3$, т.е. $K_X = 0$, $q = 0$;*
  - *X — абелева поверхность, т.е. $K_X = 0$, $q = 2$;*
  - *X — фактор абелевой или $K3$-поверхности по свободному действию конечной группы;*
- *если $\kappa = 1$, то X — эллиптическая поверхность, т.е. существует морфизм $X \to B$, все слои которого — гладкие эллиптические кривые;*
- *если $\kappa = 2$, то X — поверхность общего типа.*

Упражнение 20.13. *Покажите, что следующие поверхности имеют тип $K3$:*
(i) двулистное накрытие $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в кривой степени 6;
(ii) квартика в $\mathbb{P}^3$;
(iii) пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$;
(iv) пересечение трех квадрик в $\mathbb{P}^5$.

Упражнение 20.14. *Пусть $X = B \times C$ — произведение кривых. Покажите, что*
(i) если $g(B) = g(C) = 0$, то $X = \Sigma_0$;
(ii) если $g(B) = 0 < g(C)$, то X — линейчатая;
(iii) если $g(B) = g(C) = 1$, то X — абелева поверхность;
(iv) если $g(B) = 1 < g(C)$, то X — эллиптическая поверхность, $\kappa(X) = 1$;
(v) если $g(B), g(C) \ge 2$, то X — поверхность общего типа.