ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1997, т. 218, с. 7–19

УДК 511

О математических работах профессора А. А. Карацубы[1]

©1997 г. Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков

Поступило в феврале 1997 г.

31 января 1997 г. исполнилось 60 лет со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. Настоящую статью мы посвящаем математическим работам юбиляра.

При изложении трудов замечательных ученых естественно выделить какие-нибудь наиболее характерные и яркие черты их творчества. Такими отличительными чертами в научной деятельности профессора Карацубы являются комбинаторная изобретательность, основательность и определенная законченность результатов. Разумеется, в одной статье нет возможности коснуться каждого из них. Будущее, на наш взгляд, даст истинную оценку их значимости. Здесь мы остановимся только на некоторых важных аспектах его математических работ.

Перечислим основные направления исследований А. А. Карацубы. Данная классификация носит, конечно, в определенной степени условный характер, так как отражает субъективную точку зрения авторов статьи. А. А. Карацуба опубликовал 115 научных работ по математике. Он внес фундаментальный и основополагающий вклад в следующие разделы теории чисел и смежные направления математики:

теорию тригонометрических сумм и тригонометрических интегралов (проблема Терри, p-адический метод, кратные тригонометрические суммы, оценка функции Харди в проблеме Варинга, проблема Артина о локальном представлении нуля формой, проблема Хуа Ло-кена о показателе сходимости особого интеграла, оценки неполных коротких сумм Клоостермана);

теорию дзета-функции Римана (проблема Сельберга, распределение нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, распределение нулей дзета-функции Римана на коротких отрезках критической прямой);

теорию характеров Дирихле (оценки сумм характеров по "сдвинутым" простым числам и сумм характеров от многочленов с простым аргументом);

теорию конечных автоматов (проблема точной оценки наименьшей длины эксперимента для распознавания состояний автомата);

теорию быстрых вычислений (первый общий метод и алгоритм быстрого умножения многозначных чисел, историческое исследование возникновения арифметических операций, сложность вычислений функций).

К этому добавим, что А. А. Карацуба является автором известного учебника "Основы аналитической теории чисел" (1975, 1983), а также монографий "Кратные тригонометрические суммы" (1980, совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым), "Теория кратных тригонометрических сумм" (1987, совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым), "Дзета-функция Римана" (1994, совм. с С.М. Ворониным), "Complex Analysis in Number Theory" (1995). Исследования А. А. Карацубы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00721).

по многомерной проблеме делителей Дирихле были отмечены премией имени П. Л. Чебышева Академии наук СССР.

Мы не будем подробно останавливаться на циклах работ, связанных с теорией конечных автоматов [1, 42] и с теорией быстрых вычислений [4, 43, 111]. Скажем только, что результаты их давно вошли в учебники и университетские курсы и они открыли новые направления исследований.

Начальный период деятельности А. А. Карацубы в теории тригонометрических сумм завершился разработкой p-адического метода. В работе [3] им были даны новые оценки сумм вида

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(a_1x/p^n + \cdots + a_nx^n/p)}, \qquad (a_s, p) = 1, \quad 1 \le s \le n,$$

так называемых L-сумм, которые впервые возникли в связи с оценкой сумм характеров Дирихле в исследованиях А. Г. Постникова. Эти оценки привели к новым границам нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа, к выводу асимптотической формулы для числа решений варинговского сравнения вида

$$x_1^n + \cdots + x_t^n \equiv N \pmod{p^k}, \qquad 1 \le x_s \le P, \quad 1 \le s \le n, \quad P < p^k,$$

решению проблемы распределения дробных долей значений многочлена с целыми коэффициентами по модулю p^k. В работе [7] А. А. Карацуба впервые реализует в p-адической форме “принцип вложения” Эйлера–Виноградова и строит p-адический аналог u-чисел И.М. Виноградова при оценке числа решений сравнения варинговского типа. Приведем формулировку результата.

Теорема. *Пусть*

$$x_1^n + \cdots + x_t^n \equiv N \pmod{Q}, \qquad 1 \le x_s \le P, \quad 1 \le s \le t, \tag{1}$$

причем $P^r \le Q < P^{r+1}$, $1 \le r \le \frac{1}{12}\sqrt{n}$, $Q = p^k$, $k \ge 4(r+1)n$, p *— простое число. Тогда для всякого натурального числа* $n \ge 144$ *существует* $p_0 = p_0(n)$ *такое, что для любого* $p > p_0$ *всякое натуральное число* N *представимо в виде* (1) *при* $t \ge 20r + 1$, *а при* $t < r$ *существуют* N *такие, что сравнение* (1) *неразрешимо.*

Этот новый подход привел к новому p-адическому доказательству теоремы о среднем И.М. Виноградова, играющей центральную роль в методе тригонометрических сумм Виноградова. А.А. Карацуба неоднократно возвращался к этой теореме и совершенствовал ее доказательство. В наиболее общем виде результат выглядит так [49, 50].

Пусть $J = J(P, n, k)$ — число решений в целых числах системы уравнений вида (интеграл И.М. Виноградова)

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = y_1 + \cdots + y_k, \\ x_1^2 + \cdots + x_k^2 = y_1^2 + \cdots + y_k^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = y_1^n + \cdots + y_k^n, \end{cases} \qquad 1 \le x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \le P. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть* τ, $r_1, \dots, r_\tau$, n, k *— натуральные числа, причем* $\tau \geq 1$, $1 = r_1 \leq r_2 \leq \cdots \cdots \leq r_\tau \leq n$. *Положим далее*

$$\Delta(\tau) = \left(n - \frac{r_\tau - 1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(n - \frac{r_{\tau-1} - 1}{2}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{r_{\tau-1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{r_2}\right)\left(n - \frac{r_1 - 1}{2}\right),$$
$$\varkappa_\tau = \sum_{j=1}^{\tau}\bigl(r_j^2 + \Delta(j)\bigr).$$

Тогда при $k \geq n\tau$, $P \geq 1$ *имеет место оценка*

$$J = J(P; n, k) \leq n^{2\Delta(\tau) r_\tau} 2^{\varkappa_\tau} (8k)^{2n\tau} P^{2k - \Delta(\tau)}.$$

Если в этой теореме положить $r_2 = r_3 = \cdots = r_\tau = n$, то получается формулировка теоремы о среднем И. М. Виноградова в более традиционном виде:

$$J(P; n, k) \leq n^{2\Delta n} 2^{\varkappa} (8k)^{2n\tau} P^{2k - \Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}, \qquad \varkappa = n^2\tau + \frac{n(n+1)}{2}\tau - \frac{n(n-1)}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}\right) < \frac{3(n+1)^2\tau}{2}.$$

Система уравнений (2) называется *полной*. Если из нее опустить некоторые уравнения, то она называется *неполной* или “*выщербленной*”.

Еще одним элементом p-адического метода А. А. Карацубы является переход от “выщербленных” систем уравнений к полным системам за счет локального p-адического изменения неизвестных [13, 14]. Важную роль в этих исследованиях играет p-адическая трактовка метода И. М. Виноградова сглаживания в теории двойных тригонометрических сумм.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{m_1} + \cdots + x_k^{m_1} = y_1^{m_1} + \cdots + y_k^{m_1}, & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \leq x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \leq P, \\ x_1^{m_s} + \cdots + x_k^{m_s} = y_1^{m_s} + \cdots + y_k^{m_s}, & 1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_s < m_{s+1} = n. \\ \quad x_1^{n} + \cdots + x_k^{n} = y_1^{n} + \cdots + y_k^{n}, & \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим через I_k число решений этой системы уравнений.

Имеет место [13] следующая

Теорема. *Пусть* r *— произвольное натуральное число,* $1 \leq r \leq n$, *и целое число* t *определяется неравенствами* $m_t \leq r \leq m_{t+1}$. *Тогда при* $k \geq 6rn \ln n$ *справедлива оценка*

$$I_k \ll P^{2k - \delta}, \qquad \delta = m_1 + \cdots + m_t + (s - t + 1)r.$$

Для неполных систем уравнений, в которых переменные пробегают числа с малыми простыми делителями, А. А. Карацуба применил мультипликативный сдвиг переменных. Это привело к качественно новой оценке тригонометрических сумм и новой теореме о среднем для таких систем уравнений.

Пусть $g(x)$ — монотонно возрастающая функция, причем $g(x) \geq \ln\ln x$ при достаточно больших значениях x и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\ln x} = 0.$$

Натуральное число m называется *числом с малыми простыми делителями класса* E_g, если для каждого простого делителя p числа m выполняется неравенство $\ln p \leq g(m)$.

Пусть $\mathbf{P}$ — количество чисел из класса E_g, не превосходящих P. Тогда имеет место асимптотика

$$\mathbf{P} \sim Pe^{-\omega\ln\omega} \quad \text{при} \quad P\to\infty, \qquad \omega = \frac{\ln P}{g(P)}.$$

Теорема. *Пусть* $1 \leq r < \cdots < m < \cdots < t \leq n$,

$$f(x) = \alpha_r x^r + \cdots + \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_t x^t,$$

причем

$$\alpha_m = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \quad |\theta| \leq 1,$$

и при некотором положительном ε, $\varepsilon < 1/2$,

$$P^{\varepsilon m} \leq q \leq P^{(1-\varepsilon)m}.$$

Пусть, далее,

$$S = \sum_{\substack{x\leq P\\ x\in E_g}} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда

$$|S| \ll \mathbf{P}^{1-\gamma/(k\ln k)},$$

где $k = r + \cdots + m + \cdots + t$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ *и постоянная в знаке* $\ll$ *абсолютная.*

Далее отметим, что p-адический метод А. А. Карацубы включает в себя способы оценок меры множества точек с малыми значениями функций через значения их параметров (коэффициенты и т.п.) и, обратно, оценок этих параметров через меру множества в вещественной и p-адической метриках. Наиболее ярко эта сторона p-адического метода проявилась при оценках тригонометрических интегралов, что привело к решению проблемы Хуа Ло-кена о показателе сходимости несобственного интеграла в проблеме Терри [54, 55].

Теорема. *Интеграл*

$$\theta_0 = \theta(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)}\,dx\right|^{2k} d\alpha_1\cdots d\alpha_n,$$

сходится при $2k > (n^2+n)/2+1$ *и расходится при* $2k \leq (n^2+n)/2+1$.

Теорема. *Предположим, что натуральные $r,\dots,n$ такие, что*

$$1 \le r < \dots < n, \qquad r+\dots+n < \frac{n^2+n}{2},$$

$$\theta_0' = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 e^{2\pi i(\alpha_r x^r+\dots+\alpha_n x^n)}\,dx\right|^{2k} d\alpha_r\cdots d\alpha_n.$$

Тогда интеграл θ_0' сходится при $2k > r+\dots+n$ и расходится при $2k \le r+\dots+n$.

Все эти исследования А. А. Карацубы включают в себя p-адическую форму кругового метода Харди–Литтлвуда–Рамануджана–Виноградова. Ярким примером применения этого метода явилась работа [78]. Здесь, продолжая свои исследования по оценкам тригонометрических сумм, в которых суммирование ведется по числам с малыми простыми делителями, он получил новую оценку известной функции Харди $G(n)$ в проблеме Варинга (при $n \ge 400$):

$$G(n) < 2n\ln n + 2n\ln\ln n + 12n.$$

В 1970–71 гг. А. А. Карацуба, развивая метод И. М. Виноградова оценок сумм с простыми числами, получил степенное уменьшение длины промежутка изменения переменной суммирования, на котором имеет место нетривиальная оценка суммы значений неглавного характера Дирихле на последовательности сдвинутых простых чисел. Постановка этой проблемы и наилучшие результаты в ней принадлежали И. М. Виноградову. Приведем точную формулировку результата [26].

Теорема. *Пусть q — простое число, $(k,q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, ω — произвольное число из интервала $0<\omega\le 1/4$ и $q^{1/2+\omega} \le N < q$. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$S_N = \sum_{p\le N}\chi(p+k) \ll Nq^{-\rho}, \qquad \rho = \frac{\omega^2}{1024},$$

причем постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω.

Здесь будет уместным привести слова Ю. В. Линника, сказанные им в 1971 г. по поводу данного направления исследований на Международной конференции по теории чисел, посвященной 80-летию со дня рождения И. М. Виноградова: “Весьма важны исследования И. М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $\sum_{p\le N}\chi(p+k)$, которая давала степенное понижение по сравнению с N уже при $N > q^{0.75+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, где q — модуль характера. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что дает непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной, более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А. А. Карацубе”.

В работе [48] А. А. Карацуба получил закон распределения пар квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ в случае, когда длина промежутка существенно меньше модуля символа Лежандра.

Теорема. *Пусть $\tau_1=\pm1$, $\tau_2=\pm1$, q — простое число, k_1 и k_2 — целые числа такие, что $k_1k_2(k_1-k_2)$ несравнимо с нулем по модулю q, ω — вещественное число с условием $0<\omega<0.5$, $N>q^{0.75+\omega}$. Тогда количество T простых чисел p, не превосходящих N, таких, что*

$$\left(\frac{p+k_1}{q}\right)=\tau_1, \qquad \left(\frac{p+k_2}{q}\right)=\tau_2,$$

равно

$$T=\frac{1}{4}\pi(N)+O\bigl(Nq^{-0.01\omega^2}\bigr),$$

где постоянная в знаке O зависит только от ω.

В 1970 г. А. А. Карацуба предложил метод решения тернарных мультипликативных задач [27]. Этот метод в настоящее время широко используют многие специалисты в аналитической теории чисел. В качестве приложения своего метода Анатолий Алексеевич рассмотрел задачу о распределении произведения сдвинутых простых чисел в арифметической прогрессии.

Пусть $\omega\in(0,1/4]$, n — достаточно большое положительное число, D — простое число, $D\le$ $\le n^{\varkappa_0}$, где $\varkappa_0=1/(4.6+\omega)$,

$$(a,D)=(l,D)=1,\qquad \alpha\in\left[\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\frac{\ln D}{\ln n},1-4.1\frac{\ln D}{\ln n}\right],$$

$n_1\ge n^{1-\alpha}$, $n_2\ge n^{\alpha}$, p,p' — простые числа,

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1,\qquad \pi_2=\pi_2(n_1,n_2,a,l)=\sum_{\substack{p(p'+a)\equiv l\ (\mathrm{mod}\,D)\\ p\le n_1,\ p'\le n_2}}1.$$

Теорема. *Существует абсолютная постоянная $\gamma>0$ такая, что*

$$\pi_2=\frac{1}{\varphi(D)}\pi(n_1)\pi(n_2)+O\bigl((n_1n_2)^{1+\varepsilon}D^{-1-\gamma\omega^2}\bigr),$$

где постоянная в знаке O зависит только от ω и $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число.

В 1971–72 гг. Анатолий Алексеевич провел исследования по многомерной проблеме делителей Дирихле. Как известно, наилучшие на сегодняшний день оценки порядка роста дзета-функции Римана в критической полосе вблизи прямой $\mathrm{Re}\,s=1$ получаются методом Виноградова. Эти оценки позволили А. А. Карацубе получить существенно более точную оценку остаточного члена в проблеме делителей Дирихле для k-мерной функции делителей в случае, когда число k велико [31, 33]. Наиболее замечательным результатом здесь является оценка остатка $R_k(x)$ в этой проблеме, равномерная по отношению ко всем параметрам:

$$R_k(x)\le x^{1-ck^{-2/3}}(c_1\ln x)^k,$$

где $c>0$, $c_1>0$ — абсолютные постоянные.

Отметим еще, что в работе [31] доказан один общий результат, из которого следует

Теорема. *Пусть $c_0>0$ — произвольное фиксированное число, γ — постоянная, $1<\gamma<$ $<3/2$, $F(x)=e^{c_0(\ln x)^\gamma}$. Рассмотрим при целом $m\ne0$ сумму*

$$T_m=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imF(x)}.$$

Если $|m|\le e^{(\ln P)^{3-2\gamma-\varepsilon_0}}$, где ε_0 — фиксированное число из интервала $(0,3-2\gamma)$, то имеет место оценка

$$|T_m|\le APe^{-\alpha(\ln P)^{3-2\gamma}},$$

где A и α — некоторые абсолютные положительные постоянные.

Это дает пример функции, растущей быстрее многочлена, для которой последовательность дробных долей $\{F(n)\}$ равномерно распределена по модулю единица.

Несколько особняком стоят исследования А. А. Карацубы по проблеме Артина о p-адическом представлении нуля формой произвольной степени. Здесь вместо предполагавшегося степенного роста числа переменных для нетривиального представления нуля формой было показано, что это число переменных должно расти почти экспоненциальным образом в зависимости от степени [62–64]. Имеет место следующая

Теорема. *Для любого натурального числа r существует такое $n_0 = n_0(r)$, что для любого $n \ge n_0$ существует форма $F(x_1, \dots, x_k)$ степени, меньшей n, с целыми коэффициентами, число переменных которой k,*

$$k \ge 2^u, \qquad u = \frac{n}{(\log_2 n)(\log_2\log_2 n)\cdots\underbrace{(\log_2\cdots\log_2 n)}_{r}\underbrace{(\log_2\cdots\log_2 n)^3}_{r+1}},$$

и имеющая только тривиальное представление нуля в 2-адических числах.

Там же был доказан аналогичный результат для произвольного нечетного простого модуля p.

В 1968 г. А. А. Карацуба поставил задачу о создании теории кратных тригонометрических сумм Г. Вейля, подобной теории И. М. Виноградова. Имеются в виду суммы

$$S = S(A) = \sum_{x_1=1}^{P_1}\cdots\sum_{x_r=1}^{P_r} e^{2\pi i F(x_1,\dots,x_r)},$$

где

$$F(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=1}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r},$$

A — набор вещественных коэффициентов $\alpha(t_1,\dots,t_r)$.

Остановимся только на некоторых основных результатах теории. Центральным моментом ее является теорема о среднем, подобная теореме И. М. Виноградова в случае однократных сумм. Приведем наиболее совершенную формулировку ее [59].

Теорема. *Пусть $n_1,\dots,n_r$, $P_1,\dots,P_r$ — натуральные числа, $P_1 = \min(P_1,\dots,P_r)$, $m = (n_1+1)\cdots(n_r+1)$. Пусть, далее, Ω — m-мерный куб в евклидовом пространстве вида*

$$0 \le \alpha(t_1,\dots,t_r) < 1, \qquad 0 \le t_1 \le n_1, \quad \dots, \quad 0 \le t_r \le n_r,$$

и

$$J = J(P_1,\dots,P_r; n_1,\dots,n_r; K, r) = \int\limits_{\Omega}\cdots\int |S(A)|^{2K}\,dA.$$

Тогда при любом $\tau \ge 0$ и $K \ge K_\tau = m\tau$ для величины J имеет место оценка

$$J \le K_\tau^{2m\tau}\varkappa^{4\varkappa^2\Delta(\tau)}2^{8m\varkappa\tau}(P_1\cdots P_r)^{2K}P^{-\varkappa\Delta(\tau)},$$

где $\varkappa = n_1\nu_1 + \dots + n_r\nu_r$, $\gamma\varkappa = 1$,

$$\Delta(\tau) = \frac{m}{2}\bigl(1-(1-\gamma)^\tau\bigr), \qquad P = (P_1^{n_1}\cdots P_r^{n_r})^\gamma,$$

натуральные числа $\nu_1, \dots, \nu_r$ таковы, что

$$-1 < \frac{\ln P_s}{\ln P_1} - \nu_s \le 0, \qquad s = 1, \dots, r.$$

Теорема о среднем и лемма о кратности пересечения специальных многомерных параллелепипедов лежат в основе оценки кратной тригонометрической суммы [57].

Теорема. *Разобьем точки куба Ω на два класса Ω_1 и Ω_2. В класс Ω_1 отнесем те точки A с координатами $\alpha(t_1, \dots, t_r)$, для которых*

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \beta(t_1, \dots, t_r),$$

где $0 \le a(t_1, \dots, t_r) < q(t_1, \dots, t_r)$, $\big(a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)\big) = 1$,

$$|\beta(t_1, \dots, t_r)| \le P_1^{-t_1} \cdots P_r^{-t_r} P^{0.1}, \qquad 0 \le t_1 \le n_1, \quad \dots, \quad 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + \dots + t_r \ge 1,$$

и общее наименьшее кратное Q чисел $q(t_1, \dots, t_r)$, $t_1 + \dots + t_r \ge 1$, не превосходит $P^{0.1}$. В класс Ω_2 отнесем все остальные точки куба Ω. Пусть точка $A \in \Omega_1$.

Тогда имеет место оценка

$$|S(A)| \le 2^{6r}(5n^{2n})^{r\nu(Q)}\big(\tau(Q)\big)^{r-1} P_1 \cdots P_r Q^{-\mu}, \qquad \mu \max(n_1, \dots, n_r) = 1.$$

Если, кроме того, положить

$$\delta(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1} \cdots P_r^{t_r} \beta(t_1, \dots, t_r), \qquad \delta = \max_{t_1, \dots, t_r} |\delta(t_1, \dots, t_r)|,$$

то при $\delta > 1$ справедлива и такая оценка:

$$|S(A)| \le 2^{6r}(5n^{2n})^{r\nu(Q)}\big(\tau(Q)\big)^{r-1} P_1 \cdots P_r (\delta Q)^{-\mu}\big(\ln(\delta + 2)\big)^{r-1}.$$

Пусть точка $A \in \Omega_2$. Положим $\tau(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1} \cdots P_r^{t_r} P^{-1/6}$ и представим координаты $\alpha(t_1, \dots, t_r)$ точки A в виде

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \frac{\theta(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)\tau(t_1, \dots, t_r)},$$
$$\big(a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)\big) = 1, \quad 1 \le q(t_1, \dots, t_r) \le \tau(t_1, \dots, t_r), \quad |\theta(t_1, \dots, t_r)| \le 1,$$
$$0 \le t_1 \le n_1, \quad \dots, \quad 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + \dots + t_r \ge 1.$$

Обозначим через Q_0 наименьшее общее кратное чисел $q(t_1, \dots, t_r)$ с условием $t_1 + \dots + t_r \ge 2$.

Тогда при $Q_0 \ge P^{1/6}$ справедлива оценка

$$|S(A)| \le (5n^{2n})^{r\nu(Q_0)}\big(\tau(Q_0)\big)^{r-1} P_1 \cdots P_r Q^{-0.1\mu} + 2^{8r}(r\mu^{-1})^{r-1} P_1 \cdots P_r P^{-0.05\mu}.$$

Здесь $\tau(Q)$ — количество делителей числа Q, а $\nu(Q)$ — количество различных простых делителей числа Q.

Завершая тему, связанную с тригонометрическими суммами, скажем об исследованиях А. А. Карацубы последнего времени по оценкам сумм Клоостермана. В работе [109] доказаны следующие две теоремы.

Теорема. *Пусть $m > 1$ — целое, k — натуральное число, X, X_1 таковы, что $X \geq 3$, $k < X < X_1 \leq 2X$, $k2^{2k-1}X^{2k-1} < m$. Рассмотрим сравнение*

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod{m},$$

где $X < x_j \leq X_1$, $(x_j, m) = 1$, $x_j x_j^* \equiv 1 \pmod{m}$, $j = 1, \dots, 2k$. Тогда для количества $I = I_k(X)$ его решений справедлива оценка

$$I \leq (2k)^{80k^3} X^k (\log X)^{4k^2}.$$

Эта теорема утверждает по существу, что верхняя граница для числа решений сравнения I лишь на множитель $(\log X)^{4k^2}$ больше, чем количество всех тех наборов $(x_1, \dots, x_{2k})$, для которых $(x_1, \dots, x_k)$ является перестановкой набора $(x_{k+1}, \dots, x_{2k})$.

Теорема. *Пусть $m > 1$ — целое число, k и s — натуральные числа, и вещественные числа X, X_1, Y, Y_1 удовлетворяют неравенствам*

$$3 \leq X, \quad k < X < X_1 \leq 2X, \quad k2^{2k-1}X^{2k-1} < m,$$
$$3 \leq Y, \quad s < Y < Y_1 \leq 2Y, \quad s2^{2s-1}Y^{2s-1} < m,$$

a и b — целые числа, причем $(a, m) = d \geq 1$. Обозначим через A множество натуральных чисел n вида $n = xy$, где $X < x \leq X_1$, $Y < y \leq Y_1$, $(xy, m) = 1$. Тогда для тригонометрической суммы

$$S = \sum_{n \in A} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right)$$

справедлива оценка $|S| \leq XY\Delta$, где

$$\Delta = (2s)^{40s^2/k}(2k)^{40k^2/s}(smdY)^{1/2ks}(\log Y)^{2s/k}(\log X)^{2k/s}X^{-1/2s}Y^{-1/2k}.$$

В заключение обратимся к работам А. А. Карацубы по теории дзета-функции Римана и по исследованиям других арифметических рядов Дирихле.

Как известно, центральной задачей современной теории дзета-функции Римана является гипотеза Римана. Отметим, что дзета-функция обладает рядом замечательных свойств: эйлеровским произведением, функциональным уравнением. Если же рассматривать ряды Дирихле, то многое будет зависеть от арифметической природы последовательности коэффициентов этих рядов. В работах А. А. Карацубы проводятся исследования самой дзета-функции Римана, а также рядов Дирихле, у которых указанные выше характеристические свойства как имеются, так и отсутствуют.

Пусть $N(T)$ обозначает количество нулей дзета-функции в критической полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, и пусть $N_0(T)$ — число нулей $\zeta(1/2 + it)$ при $0 < t \leq T$. Известная теорема Римана–Мангольдта дает асимптотическую формулу при $T \to +\infty$ величины $N(T)$:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Заметим, что гипотеза Римана утверждает справедливость при всех $T > 0$ равенства $N_0(T) = N(T)$.

В 1914 г. Г. Харди доказал бесконечность количества нулей дзета-функции Римана на критической прямой, а в 1921 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд получили более точный результат:

а) при $H = T^a$, $a > 1/2$, и при некоторой положительной постоянной c имеем

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH; \tag{4}$$

б) при $H = T^{1/4}\log^2 T$ справедливо неравенство

$$N_0(T+H) - N_0(T) > 0. \tag{5}$$

В 1942 г. А. Сельберг доказал, что при $H \geq T^{0.5+\varepsilon}$ имеет место оценка

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH\log T, \tag{6}$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная.

Тогда же А. Сельберг высказал гипотезу, что неравенство (6) имеет место при $H > T^a$, где $a < 1/2$.

В 1974–76 гг. Я. Мозер показал, что

$$N_0(T+H) - N_0(T) > 0$$

при $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{1/6}\log^2 T$, а неравенство

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH$$

имеет место при $H = T^{5/12}\log T$.

В 1983 г. А. А. Карацуба доказал гипотезу А. Сельберга [68, 70; 105, p. 38–39]. Более того, он установил, что неравенство (6) имеет место при $H \geq T^a$, $a > 27/82$. Отметим также, что в 1981 г. за счет принципиально нового метода оценок тригонометрических сумм А. А. Карацуба доказал, что на отрезке критической прямой длины $H \geq T^{5/32}\log^2 T$ лежит хотя бы один нуль нечетного порядка дзета-функции Римана, т.е. при таких H доказана справедливость неравенства (5).

Пусть $\chi_1(n)$ — комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$. Функцией Дэвенпорта–Хейльбронна называют функцию

$$\frac{1-i\varkappa}{2}L(s,\chi_1) + \frac{1+i\varkappa}{2}L(s,\overline{\chi}_1),$$

где

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \varkappa = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}.$$

Эта функция удовлетворяет функциональному уравнению риманового типа, но не имеет эйлерова произведения. Аналог гипотезы Римана для $f(s)$ не имеет места, т.е. утверждение о том, что все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, неверно. Тем не менее в 1980 г. С. М. Воронин доказал, что прямая $\operatorname{Re} s = 1/2$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, т.е. если $N_0(T)$ — количество нулей нечетного порядка функции $f(s)$ с условиями $\operatorname{Re} s = 1/2$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, то при $T > T_0$ имеем

$$N_0(T) \geq T\exp\Big(\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\Big).$$

А. А. Карацуба в [89] получил существенно более сильный результат.

Теорема. *Пусть* ε *и* ε_1 *— произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.01. *Тогда при* $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, *выполняется неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{1/2-\varepsilon_1}.$$

Следует отметить, что работы, рассмотренные в этой статье, не охватывают полностью всех направлений математической деятельности А. А. Карацубы. В связи с этим мы приводим полный список его математических трудов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ А. А. КАРАЦУБЫ

1. Решение одной задачи из теории конечных автоматов // УМН. 1960. Т. 15, № 3. С. 157–159.
2. Проблема Терри для системы сравнений // Мат. сб. 1961. Т. 55, № 2. С. 209–220.
3. Оценки тригонометрических сумм особого вида и их приложения // ДАН СССР. 1961. Т. 137, № 3. С. 513–514.
4. Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 293–294. (Совм. с Ю. П. Офманом).
5. Аналог проблемы Варинга // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1962. № 1. С. 38–46.
6. Распределение дробных долей многочленов специального вида // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1962. № 3. С. 34–38.
7. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1962. № 4. С. 28–38.
8. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения: Канд. дис. М.: МГУ, 1962.
9. О теореме о среднем // ДАН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 245–248. (Совм. с Н. М. Коробовым).
10. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 1. С. 237–248.
11. Приложение № 4 // *Хуа Ло-кен.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964. С. 180–187.
12. О системах сравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 4. С. 935–944.
13. Об оценке решений некоторых уравнений // ДАН СССР. 1965. Т. 165, № 1. С. 31–32.
14. Системы сравнений и уравнения варинговского типа // ДАН СССР. 1965. Т. 165, № 2. С. 274–276.
15. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30, № 1. С. 183–206.
16. Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем: Докт. дис. М.: МГУ, 1966.
17. Асимптотические формулы для некоторого класса тригонометрических сумм // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 9–11.
18. Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 99–110.
19. Об оценках полных тригонометрических сумм // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 199–208.
20. Об одной системе неопределенных уравнений // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 125–128.
21. Об одной асимптотической формуле // Тр. Моск. мат. о-ва. 1968. Т. 18, № 1. С. 77–82.
22. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // ДАН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1287–1289.
23. О тригонометрических суммах // ДАН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 31–34.
24. О суммах характеров с простыми числами // ДАН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 517–518.
25. Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 1. С. 20–30.
26. Суммы характеров с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 2. С. 299–321.
27. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 724–727.
28. Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях // ДАН СССР. 1970. Т. 196, № 4. С. 759–760.
29. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35, № 3. С. 469–484.
30. Об одной арифметической сумме // ДАН СССР. 1971. Т. 199, № 4. С. 770–772.
31. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 241–255.
32. Проблема делителей Дирихле в числовых полях // ДАН СССР. 1972. Т. 204, № 3. С. 540–541.
33. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 3. С. 475–483.
34. О некоторых проблемах теории простых чисел, связанных с методом И. М. Виноградова, и их применения // Тр. МИАН. 1973. Т. 132. С. 257–262.
35. Об оценках снизу сумм характеров от многочленов // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 1. С. 67–72.

36. Среднее значение модуля тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 6. С. 1203–1227.
37. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 155–159.
38. О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 2. С. 341–350.
39. О некоторых арифметических задачах с числами, имеющими малые простые делители // Acta arith. 1975. V. 27. P. 489–492.
40. Тригонометрические суммы и их применения // Proc. Intern. Congr. Math. Vankuver, 1975. V. 1. P. 365–368.
41. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1970.
42. Experimente mit Automaten // Elektronische Information Verarbeitung und Kybernetic. 1975. Bd. 11. S. 611.
43. Berechnungen und die Kompliziertheit von Beziehungen // Elektronische Information Verarbeitung und Kybernetic. 1975. Bd. 11. S. 603–606.
44. Об одной системе сравнений // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 3. С. 389–392.
45. О распределении значений неглавных характеров // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 156–164.
46. Верхняя граница модуля кратной тригонометрической суммы // Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 3–31. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
47. Распределение значений символа Лежандра от многочленов с простыми числами // ДАН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 524–526.
48. Суммы символа Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 2. С. 315–324.
49. Об интеграле И.М. Виноградова // ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 764–765. (Совм. с Г.И. Архиповым).
50. Новая оценка интеграла И.М. Виноградова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 4. С. 751–762. (Совм. с Г.И. Архиповым).
51. Точная оценка числа решений одной системы диофантовых уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 6. С. 1187–1226. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
52. Асимптотика одной арифметической суммы // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 737–740.
53. Распределение дробных долей многочленов от нескольких переменных // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 3–14. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
54. Показатель сходимости особого интеграла проблемы Терри // ДАН СССР. 1979. Т. 248, № 2. С. 268–272. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
55. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 5. С. 971–1003. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
56. Об одной системе диофантовых уравнений // ДАН СССР. 1980. Т. 252, № 2. С. 275–276. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
57. Кратные тригонометрические суммы. М.: Наука, 1980. (Тр. МИАН; Т. 151). (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
58. Равномерные оценки кратных тригонометрических сумм // ДАН СССР. 1980. Т. 252, № 6. С. 1289–1291. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
59. Кратные тригонометрические суммы и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 4. С. 723–781. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
60. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Тр. МИАН. 1981. Т. 157. С. 49–63.
61. Об одной задаче с простыми числами // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 6. С. 1291–1293.
62. О локальном представлении нуля формой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 5. С. 948–961. (Совм. с Г.И. Архиповым).
63. О представлении нуля формой в поле p-адических чисел // ДАН СССР. 1982. Т. 262, № 1. С. 11–13. (Совм. с Г.И. Архиповым).
64. Об одной задаче теории сравнений // УМН. 1982. Т. 37, № 5. С. 161–162. (Совм. с Г.И. Архиповым).
65. Особые случаи теории кратных тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 4. С. 707–784. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
66. Новые равномерные оценки кратных тригонометрических сумм // ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 1. С. 11–12. (Совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым).
67. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
68. О нулях дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой // ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 6. С. 1312–1334.
69. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН. 1984. Т. 168. С. 4–30. (Совм. с И.М. Виноградовым).
70. О нулях $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 3. С. 569–584.
71. О нулях дзета-функции Римана // ДАН СССР. 1984. Т. 276, № 3. С. 535–539.
72. Квадратичные вычеты и невычеты в редких последовательностях // ДАН СССР. 1984. Т. 274, № 5. С. 1044–1046.

73. Метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова // Тр. МИАН. 1984. Т. 163. С. 97–103.
74. Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 6. С. 1214–1224.
75. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 167–178.
76. О нулях функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 5. С. 1038–1041.
77. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 2. С. 326–333.
78. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 5. С. 935–947.
79. О вещественных нулях функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ // УМН. 1985. Т. 40, № 4. С. 161–162.
80. Дзета-функции Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40, № 5. С. 19–70.
81. Проблема Гильберта–Камке в аналитической теории чисел // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 2. С. 272–284.
82. Многомерный аналог проблемы Варинга // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 3. С. 521–523. (Совм. с Г. И. Архиповым).
83. Распределение пар квадратичных вычетов и невычетов специального вида // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 5. С. 994–1009.
84. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987. (Совм. с Г. И. Архиповым, В. Н. Чубариковым).
85. Approximation of exponential sums by shorter ones // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1987. V. 97, № 1–3. P. 167–178.
86. Waring's problem in several dimension // Diophantische Approximationen. Oberwolfach: Math. Forsch. Inst. Oberwolfach, 1988. (Tagungsbericht; Bd. 42).
87. Об одном диофантовом неравенстве // Acta arith. 1989. V. 53. P. 309–324.
88. О нулях некоторых рядов Дирихле // УМН. 1990. Т. 45, № 1. С. 175–176.
89. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 303–315.
90. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45, № 5. С. 81–140.
91. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 3. С. 483–514.
92. О плотностной теореме // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 185–196.
93. Нули линейных комбинаций Z-функций, отвечающих рядам Дирихле // ДАН СССР. 1991. Т. 317, № 5. С. 1053–1054.
94. On the zeros of Riemann's Zeta-function on the critical line // Intern. Sympos. in Memory of Hua Loo Keng. 1991. V. 1. P. 117–192.
95. Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях // ДАН СССР. 1991. Т. 319, № 3. С. 543–544.
96. О распределении вещественных нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ // ДАН СССР. 1992. Т. 322, № 2. С. 217–218.
97. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 2. С. 372–397.
98. The Riemann Zeta-Function. Berlin; New York: W. de Gruyter, 1992. (Совм. с С. М. Ворониным).
99. Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на критической прямой, некоторых рядов Дирихле // УМН. 1992. Т. 47, № 2. С. 193–194.
100. On zeros of the Davenport–Heilbronn function // Proc. Amalfi Conf. on Analytic number theory. Univ. Salerno, 1992. P. 271–293.
101. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 5. С. 3–14.
102. О нулях одного класса функций, порожденных функцией Гурвица // УМН. 1993. Т. 48, № 5. С. 175–176.
103. Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 2. С. 138–139.
104. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Тр. МИАН. 1994. Т. 207. С. 180–196.
105. Complex analysis in number theory. London; Tokyo; Boca Raton; Ann Arbor: CRC Press, 1995. (Stud. Adv. Math.; V. 187).
106. Нули арифметических рядов Дирихле // Math. Slovaca. 1994. V. 44, № 5. P. 633–649.
107. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. (Совм. с С. М. Ворониным).
108. Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59, № 4. С. 61–80.
109. Аналоги сумм Клоостермана // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59, № 5. С. 93–102.
110. Об одной арифметической функции // УМН. 1995. Т. 50, № 5. С. 247–248.
111. Сложность вычислений // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 186–202.
112. Суммы дробных долей специального вида функций // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 3. С. 302.
113. О функции $S(t)$ // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 5. С. 27–56.
114. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 3. С. 448–449.
115. Аддитивные сравнения // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 2. С. 119–132.