СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XVIII, № 1 Январь — Февраль 1977

Б. С. КАШИН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ ПО ПОЛНЫМ СИСТЕМАМ

При каждом целом $N>1$ определим на отрезке $[0, 1]$ набор непрерывных функций $\{\chi_j(x)\}_{j=1}^N$ следующим образом:

$$\chi_j^N(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant (j-1)/N,\\ 1, & x\geqslant j/N,\\ \text{линейна на } [(j-1)/N,\ j/N].\end{cases}$$

$j=1, 2, \ldots, N$.

С. В. Бочкаревым в работе ([1]) была доказана следующая

Теорема А. *Пусть* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *— ортонормированная, полная в* $L_2[0, 1]$ *система функций (О. Н. П. С), ограниченная в совокупности, т. е.* $|\psi_k(x)|\leqslant M$ *при* $x\in[0, 1]$ *и* $k=1, 2, \ldots$ *Тогда, если* $\chi_j^N(x)\overset{L_2}{=}\sum\limits_{k=1}^\infty a_{k,j}\psi_k(x)$ *и* $S_j^N=\sum\limits_{k=1}^\infty |a_{kj}|$, $j=1, \ldots, N$, *то*

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^N S_j^N\right)\geqslant c\ln N$$

при всех $N=2^r$, $1<r<0$, *где* $c>0$ *— некоторая абсолютная постоянная.*

В том случае, когда $\{\psi_k(x)\}$ — тригонометрическая система, справедливость неравества (1) и его точность проверяются непосредственно.

Доказательство С. В. Бочкарева основано на некоторых неравенствах для системы Хаара.

Цель этой работы — получить неравенства, не столь сильные, как (1), но при более слабых требованиях на систему $\{\psi_k(x)\}$. Кроме того, мы докажем одно неравенство, из которого, как следствие, вытекает оценка (1).

Неравенство (1), а также неравенства из теоремы 1 этой работы останутся верными (как будет видно из доказательства), если систему $\{\chi_j^N(x)\}$ заменить на систему функций, в определенном смысле похожую на нее (см. замечание 1). Неравенства для коэффициентов разложения определенных выше функций по полным системам позволяют получить достаточно точные утверждения в ряде задач теории функций. В частности, из неравенства, аналогичного неравенству (1) для коэффициентов Фурье функций $\{\chi_j^{N,m}(x)\}$, довольно просто можно вывести следующий результат.

Для любой О. Н. П. С. $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $|\psi_k(x)|\leqslant M$ *при* $k=1, 2, \ldots$, $x\in[0, 1]$, *найдется функция ограниченной вариации с модулем непрерывности* $\omega(\delta, f)=o(\log^{-2}\delta^{-1})$ *такая, что ряд ее коэффициентов Фурье по системе* $\{\psi_k(x)\}$ *не сходится абсолютно.*

Этот результат был впервые получен С. В. Бочкаревым в работе ([2]), в которой содержится история указанной задачи и дано ее полное решение в классе О. Н. П. систем.

Основную роль в этой работе играют свойства матрицы Гильберта. При каждом N определим набор кусочно-постоянных (с интервалом постоянства $A_i = ((i-1)/N,\ i/N)$) функций следующим образом:

$$f_j^N(x) = \begin{cases} 1/(i-j) & \text{при} \quad x \in A_i \quad \text{и} \quad i \neq j, \\ 0 \quad \text{при} \quad x \in A_i \quad \text{и} \quad i = j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant N. \end{cases} \tag{2}$$

В дальнейшем индекс зависимости от N мы будем иногда опускать.

Хорошо известно следующее свойство матрицы Гильберта (см. ([3]), с. 271, теорема 314): при $1 < p < \infty$, $1/q = 1 - 1/p$

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{a_j b_i}{i-j} \right| \leqslant C_p^{1)} \left(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

Поэтому при любом $p > 1$ и любом наборе чисел $\{a_j\}_{j=1}^N$ имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} a_j f_j^N(x) \right\|_{L_p} = \frac{1}{N^{1/p}} \left(\sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} a_j f_j^N \left(\frac{i-1/2}{N} \right) \right|^p \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{N^{1/p}} \sup_{\sum_{i=1}^{N} |b_i|^q = 1} \sum_{i=1}^{N} b_i \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} \frac{a_j}{i-j} \right) \leqslant C_p \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} |a_j|^p}{N} \right)^{1/p}. \tag{3}$$

Для получения следствия из доказанной ниже теоремы нам понадобятся хорошо известные свойства системы функций Радемахера. Именно, пусть дан полином по системе Радемахера $P(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k r_k(t)$. Известно (см. ([4]), с. 347), что существуют абсолютные постоянные $C_1 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что мера

$$\mu \left\{ t : \left| \sum_{k=1}^{N} c_k r_k(t) \right| \geqslant C_1 \sqrt{\sum_{k=1}^{N} c_k^2} \right\} > \alpha. \tag{4}$$

Далее, для любого $y > 0$ справедливо следующее неравенство (см. ([5]), с. 73):

$$\mu \left\{ t : \left| \sum_{k=1}^{N} c_k r_k(t) \right| \geqslant y \left(\sum_{k=1}^{N} c_k^2 \right)^{1/2} \right\} \leqslant 2e^{-y^2/4}. \tag{5}$$

Из (5) сразу следует, что существует постоянная C_2 больше нуля, для которой

$$\mu \left\{ t : \sup_{1 \leqslant r < r' \leqslant N} \left\{ \left| \sum_{k=r}^{r'} r_k(t) \right| \Big/ (r'-r)^{1/2} \log^{1/2} N \right\} < C_2 \right\} \geqslant 1 - \alpha/10, \tag{6}$$

где постоянная α в формуле (6) та же, что и в (4).

Нам понадобится также следующий простой факт.

Пусть задан набор измеримых функций $\{a_k(t)\}_{k=1}^R$ *таких, что:*

1) $a_k(t) \geqslant 0$ *при* $t \in [0, 1]$, 2) $\mu\{t : t \in [0, 1],\ a_k(t) \geqslant \beta_k\} \geqslant \alpha$,

---

[1]) Через C_p обозначаются постоянные, зависящие лишь от указанных параметров и различные в разных формулах.

где β_k — *неотрицательные числа, а* $\alpha>0$. *Тогда*

$$\mu\left\{t:\sum_{k=1}^{R} a_k(t)\geqslant\left(\sum_{k=1}^{R}\beta_k\right)\frac{\alpha}{2}\right\}\geqslant\alpha/2. \tag{7}$$

В самом деле, пусть

$$\bar{a}_k(t)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad a_k(t)<\beta_k,\\ \beta_k, & \text{если} \quad a_k(t)\geqslant\beta_k.\end{cases}$$

Рассмотрим множество $E=\{t:t\in[0,1]$ и $\sum_{k=1}^{R}\bar{a}_k(t)\geqslant\left(\sum_{k=1}^{R}\beta_k\right)\frac{\alpha}{2}\}$.

Так как $\bar{a}_k(t)\leqslant a_k(t)$, то нам достаточно показать, что $\mu E\geqslant\alpha/2$. Так как $\mu\{t:\bar{a}_k(t)\geqslant\beta_k\}\geqslant\alpha$ при $k=1, 2, \ldots, R_1$, то мы имеем

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{R}\beta_k\right)\leqslant\int_0^1\sum_{k=1}^{R}\bar{a}_k(t)\,dt=\int_E\sum_{k=1}^{R}a_k(t)\,dt+\int_{[0,1]\setminus E}\sum_{k=1}^{R}\bar{a}_k(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\mu E\left(\sum_{k=1}^{R}\beta_k\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{R}\beta_k\right).$$

Из последнего неравенства следует, что $\mu E\geqslant\alpha-\alpha/2\geqslant\alpha/2$. Оценка (7) доказана.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $q^{-1}+p^{-1}=1$, $\{\psi_k(x)\}$ — *некоторая система функций, удовлетворяющая условиям:* $\psi_k(x)\in L_p(0,1)$ *и* $\|\psi_k(x)\|_{L_p}=1$ *при всех* $k\geqslant1$. *Пусть, далее, при некоторых* M *и* $N>1$ *функции* $\chi_j^N(x)=\sum_{k=1}^{M}a_{k,j}\psi_k(x)+\Delta_j^N(x)$, *где* $\|\Delta_j^N(x)\|_{L_1}\leqslant1/N$ *при* $j=1, 2, \ldots, N$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{j=1}^{N}|a_{k,j}|^q\right)^{1/q}\geqslant C_q\ln N.$$

Доказательство. При малых N теорема верна, потому что

$$\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{j=1}^{N}|a_{k,j}|^q\right)^{1/q}\geqslant\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{|a_{k,j}|}{N},$$

где последняя сумма в силу условий теоремы не меньше C_q. При $\ln N>20$ имеем

$$\int_0^1\sum_{j=1}^{N}\chi_j^N(x)f_j^N(x)\,dx=\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\chi_j^N(x)f_j^N(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=j+1}^{N}\frac{1}{i-j}=\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{N}\left(\sum_{r=1}^{N-j}\frac{1}{r}\right)\geqslant\frac{\ln N}{10}.$$

Но

$$\sum_{j=1}^{N}\chi_j^N(x)f_j(x)=\sum_{j=1}^{N}f_j(x)\left[\sum_{k=1}^{M}a_{k,j}\psi_k(x)+\Delta_j(x)\right],$$

а $|f_j^N(x)|\leqslant1$, $j=1, 2, \ldots, N$, поэтому $\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 f_j^N(x)\Delta_j^N(x)dx\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|\Delta_j^N(x)\|_{L_1}\leqslant1$.

Таким образом,

$$\frac{\ln N}{20} \leqslant \frac{\ln N}{10} - 1 \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 f_j^N(x) \left(\sum_{k=1}^{M} a_{k,j} \psi_k(x) \right) dx \leqslant \sum_{k=1}^{M} \int_0^1 \psi_k(x) \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{N} a_{k,j} f_j(x) \right) dx \leqslant \sum_{k=1}^{M} \left(\int_0^1 |\psi_k(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{N} a_{kj} f_j \right|^q dx \right)^{1/q}.$$

В силу (3) и нормированности системы $\{\psi_k(x)\}$ последняя сумма не превосходит $C_q \left(\sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{kj}|^q \right)^{1/q} \right)$, что и доказывает теорему.

Из теоремы 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Если $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$ при некотором $1<p<\infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{kj}|^q \right)^{1/q} \geqslant C_q \ln N$ при всех $N>1$, где a_{kj} — коэффициенты разложения χ_j^N по базису $\{\psi_k(x)\}$.*

Замечание 1. При $N>1$, $1<m<N/2$ определим на $[0, 1]$ последовательность функций $\{\chi_j^{N,m}(x)\}_{j=1}^{N}$ следующим образом: пусть $\alpha_j^{N,m} = N^{-1} \min(N-1, j+m)$, тогда

$$\chi_j^{N,m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [j/N, \alpha_j^{N,m}], \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant (j-1)/N \text{ или } x \geqslant \alpha_j^{N,m} + 1/N, \\ \text{линейна} & \text{при } x \in [(j-1)/N, j/N] \text{ и } x \in [\alpha_j, \alpha_j + 1/N]. \end{cases}$$

Так же, как и теорема 1, доказывается следующее неравенство: пусть $\{\psi_k(x)\}$ — базис пространства L_p, $\|\psi_k\|_{L_p} = 1$, $k=1, 2, \ldots$, $1<p<\infty$,

$$\chi_j^{m,N}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}^{m,N} \psi_k(x), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{kj}^{m,N}|^q \right)^{1/q} \geqslant C_q \ln m. \tag{7'}$$

Покажем, как может применяться следствие 1.

Следствие 2. *Пусть $\{\psi_k(x)\}$ — базис пространства $L_p(0, 1)$ $(p \geqslant 2)$ и $\|\psi_k(x)\|_{L_p} = 1$, $k=1, 2, \ldots$ Тогда существует функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1/2$ такая, что $f(x) \overset{L_p}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$*

Доказательство. Положим

$$g_t^N(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{j=1}^{N} r_j(t) \chi_j^N(x) \right),$$

где $r_j(t)$ — функции Радемахера.

Пусть

$$g_t^N(x) \overset{L_p}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^t \psi_k(x).$$

Ясно, что

$$a_k^t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} r_j(t) a_{k,j}.$$

Из определения функций $\chi_j^N(x)$ следует, что при $|x-y|\leqslant 2/N$ имеем

$$|g_t^N(x)-g_t^N(y)|\leqslant 2|x-y|\sqrt{N}\leqslant 2\sqrt{2}\,|x-y|^{1/2}.$$

Далее, в силу кусочной линейности функций $g_t^N(x)$

$$\sup_{\substack{|x-y|>2/N\\ x,y\in[0,1]}}\left|\frac{g_t^N(x)-g_t^N(y)}{|x-y|^{1/2}}\right|\leqslant 3\sup_{1\leqslant r<r'\leqslant N}\left|\frac{g_t^N\left(\frac{r}{N}\right)-g_t^N\left(\frac{r'}{N}\right)}{\left(\frac{r'}{N}-\frac{r}{N}\right)^{1/2}}\right|.$$

Но

$$\left|g_t^N\left(\frac{r'}{N}\right)-g_t^N\left(\frac{r}{N}\right)\right|=\left|\sum_{j=r}^{r'}r_j(t)\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{N}},$$

и остается только воспользоваться оценкой (6), чтобы убедиться в том, что

$$\mu\left\{t:\sup_{x,y\in[0,1]}\left|\frac{g_t^N(x)-g_t^N(y)}{|x-y|^{1/2}}\right|\leqslant C_3\log^{1/2}N\right\}\geqslant 1-\alpha/10. \tag{8}$$

Далее, пусть

$$\beta_k=\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}a_{kj}^2\right)^{1/2}.$$

Тогда из (4) непосредственно следует, что

$$\mu\{t:|a_k^t|\geqslant C_1\beta_k\}>\alpha \quad \text{при всех} \quad k\geqslant 1.$$

Из последнего неравенства и оценки (7) получаем, что

$$\mu\left\{t:\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^t|\geqslant C_1\frac{\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\right)\right\}\geqslant\alpha/2.$$

Так как $p\geqslant 2$, то $q=1/(1-1/p)\leqslant 2$, и поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|a_{k,j}|^q\right)^{1/q}.$$

В силу следствия 1 последняя сумма не меньше $C_q\ln N$ и, следовательно,

$$\mu\left\{t:\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^t|\geqslant C_q\frac{\alpha}{2}\ln N\right\}\geqslant\alpha/2. \tag{8'}$$

Из (8) и (8′) получаем, что найдется точка t_0 и функция $F_N(x)=g_{t_0}^N(x)/\ln^{1/2}N$ такая, что

1) $F_N(x)\overset{L_p}{=}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\geqslant A_q\log^{1/2}N$;

2) $|F_N(x)-F_N(y)|\leqslant B|x-y|^{1/2}$ при $x,\ y\in[0,\ 1]$ ($A_q>0$, B — абсолютная постоянная). Из того, что в соотношениях 1 и 2 число N можно брать сколь угодно большим, сразу вытекает утверждение следствия 2.

Замечание 2. В утверждении следствия 2 можно накладывать дополнительное условие на функцию $f(x):f(0)=f(1)=0$.

Утверждение следствия 2 было установлено С. Н. Бернштейном в случае, когда $\{\psi_k(x)\}$ — тригонометрическая система, Б. И. Голубовым в случае, когда $\{\psi_k(x)\}$ — система Хаара, а затем распространено Б. С. Митягиным ([6]) на произвольные полные в $L_2(0,\ 1)$ ортонормированные системы.

Замечание 3. Рассуждениями, близкими к доказательству следствия 2 (используя неравенство (7′) и оценку (7)), можно показать, что если $\psi_k(x)$ — нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $1<p<2$, то существует функция $f(x)\in \mathrm{Lip}\, 1/q\,(q^{-1}+p^{-1}=1)$ такая, что

$$f(x) \overset{L_p}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x), \quad f(0)=f(1)=0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty.$$

Показатель $1/q$ нельзя улучшить, что проверяется на примере

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\|\chi_k\|_{L_p}}\cdot \chi_k(x), \quad k=1, 2, \ldots,$$

где $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Хаара.

Легко видеть, что неравенство С. В. Бочкарева (см. (1)) есть предельный (при $p\to\infty$) случай теоремы 1. Однако доказательство в предельном случае сложнее (так как мы не можем применять оценку (3)) и, главное, необходимо налагать дополнительное условие на систему $\{\psi_k(x)\}$, например, требовать ортогональность системы $\{\psi_k(x)\}$. Здесь мы докажем несколько более сильный, чем неравенство (1), результат (см. следствие 3). Он легко выводится из доказываемого ниже утверждения.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — О. Н. П. С. и $|\psi_k(x)|\leqslant M$ при $k=1, 2, \ldots$ Пусть, как и раньше, $\chi_j^N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\psi_k(x)$, $S_j \equiv S_j^N = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|$, для каждого $\alpha>0$ обозначим

$$S_\alpha^j = \sum_{\substack{k \\ \alpha/2<|a_{k,j}|\leqslant\alpha}} |a_{k,j}|; \quad j=1, 2, \ldots, N.$$

Ясно, что $S_\alpha^j=0$, если $\alpha\geqslant 2M$. Справедливо следующее утверждение.

Существует абсолютная постоянная $C_0>0$ такая, что при любом $m=2, 4, 8, \ldots, 2^{[\log_2 N-3]}$ и $\alpha_m=mM/N$, имеем

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\frac{S_{\alpha_m\cdot 2^r}^j}{2^r} + \sum_{r=0}^{2[\log N]+1}\sum_{j=1}^{N}\sqrt{\frac{S_{\alpha_m\cdot 2^{-r}}^j}{2^r}}\right) + \left(\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sqrt{S_j}\right) \geqslant C_0. \tag{9}$$

Доказательство. (Отметим, что проводимые здесь рассуждения имеют общие черты с доказательством неравенства слабого типа для преобразования Гильберта, см. ([7]), с. 42.)

Пусть m фиксировано. Рассмотрим систему кусочно-постоянных с интервалом постоянства $1/N$ функций $\{f_j^m(x)\}_{j=1}^N$, определяемую так:

$$f_j^m\left(\frac{r-1/2}{N}\right) = \begin{cases} -1/m \text{ при } m\leqslant r-j<2m, \ 2m<r<N-2m, \\ 1/m \text{ при } m\leqslant j-r<2m, \ 2m<r<N-2m, \\ 0 \text{ при других } j \text{ и } r, \end{cases}$$
$$r, j=1, 2, \ldots, N.$$

Из определения системы $\{f_j^m(x)\}_{j=1}^N$ следует, что:

а) носитель функции $f_j^m(x)$ лежит на отрезке

$$[(j-2m)/N, \ (j+2m)/N];$$

$$\text{б)} \quad \sum_{j=1}^{N} f_j^m(x) \equiv 0; \tag{10}$$

$$\text{в)} \quad \|f_j^m(x)\|_{L_1}\leqslant 2/N; \quad \|f_j^m(x)\|_{L_2}\leqslant 2\sqrt{1/mN}.$$

Нам понадобится еще неравенство

$$|a_{k,j}-a_{k,j+1}|\leqslant M/N, \tag{11}$$

которое вытекает из оценки

$$|a_{k,j}-a_{k,j+1}|=\left|\int_0^1 \psi_k(x)(\chi_j(x)-\chi_{j+1}(x))\,dx\right|\leqslant M\int_{\frac{j-1}{N}}^{\frac{j}{N}} 1dx\leqslant\frac{M}{N}.$$

Легко видеть, что при любом из допустимых значений m

$$\frac{1}{20}\leqslant\int_0^1\sum_{j=1}^N f_j^m\chi_j(x)\,dx=\int_0^1\sum_{j=1}^N f_j^m(x)\left(\sum_{k=1}^\infty a_{k,j}\psi_k(x)\right)dx=$$

$$=\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^N\int_0^1 a_{k,j}f_j^m(x)\psi_k(x)\,dx=R_1^m+R_2^m,$$

где

$$R_1^m=\sum_{k=1}^\infty\int_0^1\psi_k(x)\left(\sum_{\substack{j\\|a_{k,j}|>\alpha_m}}a_{k,j}f_j^m(x)\right)dx,$$

$$R_2^m=\sum_{j=1}^N\left(\sum_{\substack{k\\|a_{k,j}|\leqslant\alpha_m}}a_{k,j}\int_0^1\psi_k(x)f_j^m(x)\,dx\right).$$

Оценим сумму R_1^m. Пусть $F_k^m(x)=\sum\limits_{\substack{j\in[1,N]\\|a_{k,j}|>\alpha_m}}a_{kj}f_j^m(x)$. Тогда в силу того, что $|\psi_k(x)|\leqslant M$, имеем

$$R_1^m\leqslant M\sum_{k=1}^\infty\int_0^1|F_k^m(x)|\,dx. \tag{12}$$

Теперь оценим порознь каждый член суммы (12)

$$\int_0^1|F_k^m(x)|\,dx=\int_{E_1^k}|F_k^m(x)|\,dx+\int_{E_2^k}|F_k^m(x)|\,dx,$$

где

$$\begin{cases}E_1^k=\{x:(r-1)/N<x<r/N,\ \max\limits_{j\in[r-2m,r+2m]}|a_{kj}|>8\alpha_m\},\\ E_2^k=[0,1]/E_1^k.\end{cases} \tag{13}$$

Далее, так как при $x_0=(r-1/2)/N$ и $|j-r|>2m$ имеем

$$f_j^m(x_0)=0, \tag{14}$$

то

$$\int_{E_2^k}|F_k^m(x)|\,dx\leqslant\int_0^1\sum_{\alpha_m\leqslant|a_{kj}|\leqslant8\alpha_m}|a_{kj}|\cdot|f_j^m(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\alpha_m\leqslant|a_{kj}|\leqslant8\alpha_m}|a_{kj}|\int_0^1|f_j^m(x)|\,dx\leqslant\frac{2}{N}\sum_{\substack{k\\\alpha_m\leqslant|a_{kj}|\leqslant8\alpha_m}}|a_{kj}|. \tag{15}$$

Если точка $x_0 = (r - 1/2)/N \in E_1^k$, то из (13) и (11) следует, что

$$\min_{j \in [r-2m,\ r+2m]} |a_{kj}| \geqslant 2mM/N \geqslant 2\alpha_m. \tag{16}$$

Используя (14) и (16), получим

$$F_k^m\left(\frac{r-1/2}{N}\right) = \sum_{j=1}^{N} a_{kj} f_j^m(x_0) = \sum_{j=r-2m}^{r+2m} a_{kj} f_j^m(x_0) = \sum_{j=r-2m}^{r+2m} (a_{kj} -$$

$$- a_{k,r-2m}) f_j^m(x_0) + a_{k,r-2m} \sum_{j=r-2m}^{r+2m} f_j^m(x_0).$$

Последняя сумма в силу (14) и (10) п. б) равна нулю. Далее, в силу (11) при $|j-(r-2m)| \leqslant 4m$ справедливо неравенство $|a_{kj} - a_{k,\,r-2m}| \leqslant 4\alpha_m$. Кроме того, $|f_j^m(x_0)| \leqslant 1/m$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Поэтому при $x_0 = (r-1/2)/N \in E_1^k$ верна оценка $|F_k^m(x_0)| \leqslant 4\alpha_m \cdot \frac{1}{m}\left(\sum_{j \in [r-2m, r+2m]} 1\right)$ и в силу (16)

$$|F_k^m(x_0)| \leqslant \frac{4\alpha_m}{m}\left(\sum_{\substack{j \in [r-2m, r+2m] \\ |a_{kj}| \geqslant 2\alpha_m}} 1\right). \tag{17}$$

Из неравенства (17) сразу следует, что

$$\int_{E_1} |F_k^m(x)|\, dx \leqslant \frac{16\alpha_m}{N}\left(\sum_{|a_{k,j}| \geqslant 2\alpha_m} 1\right).$$

Объединяя последнюю оценку с (15), получаем, что $\int_0^1 |F_k^m(x)|\, dx \leqslant$

$\leqslant \frac{20\alpha_m}{N}\left(\sum_{|a_{kj}| \geqslant \alpha_m} 1\right)$ и, следовательно (см. (12)),

$$R_1^m \leqslant \frac{20M}{N}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ |a_{kj}| \geqslant \alpha_m}}^{N} \alpha_m\right) \leqslant \frac{40M}{N}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{S_{\alpha_m \cdot 2^r}^j}{2^r}\right). \tag{18}$$

Оценим теперь сумму R_2^m, ее можно оценивать грубо. Разобьем сумму R_2^m на группы

$$R_2^m \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=0}^{2[\log N]+1} \sum_{\alpha_m \cdot 2^{-r-1} < |a_{kj}| \leqslant \alpha_m \cdot 2^{-r}} |a_{kj}| \left| \int_0^1 \psi_k(x) f_j^m(x)\, dx \right| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k \\ |a_{kj}| \leqslant \alpha_m/N^2}} |a_{kj}| \left| \int_0^1 \psi_k f_j^m(x)\, dx \right|.$$

В первом члене при фиксированных j и r применим неравенство Коши и используем ортогональность функции $\psi_k(x)$

$$A_{jr} \equiv \sum_{\alpha_m \cdot 2^{-r-1} \leqslant |a_{kj}| \leqslant \alpha_m \cdot 2^{-r}} |a_{kj}| \cdot \left| \int_0^1 \psi_k(x) f_j^m(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{\substack{k\\ \alpha_m\cdot 2^{-r-1}<|a_{kj}|\leqslant\alpha_m\cdot 2^{-r}}} a_{kj}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1\psi_k(x)f_j^m(x)\,dx\right)^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\alpha_m\cdot 2^{-r}S^j_{\alpha_m\cdot 2^{-r}}\right)^{1/2}\cdot\|f_j^m(x)\|_{L_2};$$

учитывая определение числа α_m и (10) п. в), получим

$$A_{jr}\leqslant C\left(S^j_{\alpha_m\cdot 2^{-r}}\right)^{1/2}\Big/N\sqrt{2^r}. \tag{19}$$

Аналогично

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k\\ |a_{kj}|\leqslant\alpha_m/N^2}}|a_{kj}|\left|\int_0^1\psi_k(x)f_j^m(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\substack{k\\ |a_{kj}|<mM/N^3}} a_{kj}^2\right)^{1/2}\|f_j^m(x)\|_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}C\left(S_j\frac{mM}{N^3}\cdot\frac{1}{mN}\right)^{1/2}\leqslant\frac{C}{N^2}\left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{S_j}\right).$$

Складывая по j и r неравенства (19), найдем

$$R_2^m\leqslant\frac{C}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=0}^{2[\log N]+1}\sqrt{\frac{S^j_{\alpha_m\cdot 2^{-r}}}{2^r}}\right)+\frac{C}{N^2}\left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{S_j}\right).$$

Объединяя оценки, полученные для R_2^m и R_1^m (см. (18)), и вспоминая что $R_1^m+R_2^m\geqslant 1/20$, получим нужную нам оценку (9). Утверждение доказано.

Если сложить неравенства (9) при $m=2, 4, \ldots, 2^{[\log N]-3}$, то получим, что при $\alpha=[M/N]\cdot 2^{[\log N]}\geqslant M/2$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=0}^{3[\log N]}S^j_{2^{-r}\alpha}+\sqrt{S^j_{2^{-r}\alpha}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{S_j}\right)\frac{3\log N}{N^2}\geqslant C\log N. \tag{20}$$

Можно считать, что $C<1$.

Из неравенства (20) легко следует неравенство (1). В самом деле, покажем, что неравенство

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}S_j\leqslant\frac{C^2}{27}\log N \tag{21}$$

противоречит неравенству (20). Предположим, что оценка (21) верна. Тогда и

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=0}^{3[\log N]}S^j_{2^{-r}\alpha}\right)\leqslant\frac{C^2}{27}\log N. \tag{22}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=0}^{3[\log N]}\frac{C}{8}\right)\leqslant\frac{C}{8}(3\log N+1),$$

и так как $\sqrt{S}\leqslant S\cdot(8/C)+C/8$, то

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=0}^{3[\log N]}\sqrt{S^j_{2^{-r}\alpha}}\leqslant\frac{8}{27}C\log N+\frac{3}{8}C\log N+\frac{3}{8}C. \tag{23}$$

Если сложить неравенства (22) и (23) и учесть, что из (21) следует, что $\frac{\log N}{N^2}\left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{S_j}\right)=O(1)$, то получим неравенство, противоречащее оценке (20). Следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}S_j\geqslant\frac{C^2}{27}\log N.$$

Аналогично из (9) выводится и более сильное, чем неравенство (1),

Следствие 3. *Пусть при некоторых $p\geqslant 1$ и $N\geqslant 2$*

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}S_j\right)\leqslant(\log N)^p. \tag{24}$$

Тогда существуют положительные постоянные A и B, зависящие только от p, но не от N, такие, что при $1<Y<\widetilde{Y}=Y(\log N)^B<N$ имеем

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{k,j\\ 1/\widetilde{Y}\leqslant|a_{kj}|\leqslant 1/Y}}|a_{kj}|\right)\geqslant A\log\log N.$$

Следствие 3 показывает, что при условии (24) коэффициенты функций $\chi_j^N(x)$ по произвольной ортонормированной ограниченной системе ведут себя в среднем по j во многом так же, как по тригонометрической системе.

Поступила в редакцию
2 апреля 1975 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бочкарев С. В.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным системам. Мат. заметки, 15, № 3 (1974), 363—370.
[2] *Бочкарев С. В.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам функций. Мат. сб., 93, № 2 (1974), 203—217.
[3] *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
[4] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. 1. М., «Мир», 1965.
[5] *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972.
[6] *Митягин Б. С.* Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье. Докл. АН СССР, 157, № 5 (1964), 1047—1050.
[7] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., «Мир», 1973.