## ПОРЯДКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Б. С. Кашин

Через $W_p^r (r \geqslant 1;\ p \geqslant 1)$ будем обозначать единичный шар пространства Соболева:

$$W_p^r = \{x(t);\ \|x(t)\|_{L_p(0,\,1)} + \|x^{(r)}(t)\|_{L_p(0,\,1)} \leqslant 1\}.$$

Через $l_p^n\ (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обозначим множество элементов $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ $n$-мерного пространства, для которых

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant 1, \quad \text{если} \quad p < \infty,$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant 1, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

Пусть $d_m(W_p^r, L_q)$ — это $m$-й поперечник по Колмогорову [1]) множества функций $W_p^r$, которое рассматривается как компакт в пространстве $L_q(0, 1)$ $(L_\infty(0, 1) = C(0, 1))$.

Наконец, через $d_m(l_p^n, l_q^n)$ обозначим $m$-й поперечник множества $l_p^n$ в банаховом пространстве $l_q(R^n)$. Поведение поперечников $d_m(W_p^r, L_q)$ рассматривалось в работах различных авторов (см., в частности, [1]—[8]). Оказалось, что в этом вопросе многое зависит от того, какое из неравенств верно, $p \geqslant q$ или $p < q$ (см. [4]).

В первом случае для всех $p$ и $q$ известны порядки (при $m \to \infty$) величин $d_m(W_p^r, L_q)$, а в ряде случаев известно и их точное значение (см. подробнее [3], [2]). В случае $p < q$ далеко не всегда были известны даже порядки величин $d_m(W_p^r; L_q)$. В этой работе они определяются полностью.

Е. Глускиным [7] было показано, что для точной оценки поперечника $d_m(W_1^r, C)$ достаточно хорошо оценить величину $d_m(l_1^n, l_\infty^n)$. Этот факт позволил Е. Глускину показать, что $d_m(W_1^2, C) \asymp m^{-3/2}$.

Позднее, В. Е. Майоровым [8], это сведение задачи об оценке $d_m(W_p^r, L_q)$ к «конечномерной» задаче, было произведено при любых $p$ и $q$.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ — любые фиксированные числа. Справедливы оценки*

$$d_m(l_p^{2m}, l_q^{2m}) \asymp \begin{cases} 1, & \text{если } q \leqslant 2, \\ m^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } q > 2,\ p \leqslant 2, \\ m^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } p > 2. \end{cases}$$

Отметим, что при $1 = p$ или $q \leqslant 2$ утверждение теоремы 1 не ново; при $q \leqslant r$ оно сразу вытекает из известного равенства

$$d_m(l_1^{2m}, l_2^{2m}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(см. [5])}.$$

Теорема 1 — частный случай оценок, которые можно получить для величины $d_m(l_p^n, l_q^n)$ при любых $m$ и $n$. Из этих оценок, принимая во внимание результаты работы [8], выводится

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $q > 2$, $r \cdot p > 1$. Справедливы оценки*

$$d_m(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} m^{-r} & \text{если } p > 2, \\ m^{-\left(r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)}, & \text{если } p \leqslant 2. \end{cases}$$

При $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$ порядок величины $d_m(W_p^r, L_q)$ был определен Р. С. Исмагиловым [4].

---

[1]) Определение поперечника см. [1].

Сформулируем еще один результат, который доказывается во многом аналогично теореме 1.

Теорема 3. *Для любого* $N \geqslant 1$ *в пространстве* $R^N$ *можно определить ортогональный оператор* $T(\|T(x)\|_{l_2} = \|x\|_{l_2}$ *при всех* $x \in R^N$) *такой, что*

$$\alpha \cdot \|x\|_{l_2} \leqslant \left(\frac{\|x\|_{l_1} + \|T(x)\|_{l_1}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \|x\|_{l_2},$$

*где* $\alpha > 0$ *не зависит ни от* $x$, *ни от* $N$.

Множество тех операторов, которые не удовлетворяют теореме 3, имеет меру Хаара (на группе ортогональных преобразований пространства $R^N$) меньшую, чем $2^{-N}$, если $\alpha$ мало́.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Тихомиров, Поперечники множеств в функциональных пространствах, УМН 15:3 (1960), 81—120.

[2] Н. П. Корнейчук, О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения, УМН 29:3 (1974), 162—178.

[3] В. М. Тихомиров, Некоторые вопросы теории приближений, Докторская диссертация, М., 1969.

[4] Р. С. Исмагилов, Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближения функций тригонометрическими многочленами, УМН 29:3 (1974), 162—178.

[5] С. Б. Стечкин, О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, УМН 9:1 (1954).

[6] М. З. Соломяк, В. М. Тихомиров, О геометрических характеристиках вложения классов $W_p^\alpha$ в $C$, Изв. вузов, Математика, № 10 (1967), 76—81.

[7] Е. Д. Глускин, Об одной задаче о поперечниках, ДАН 219:3 (1974).

[8] В. Е. Майоров, Дискретизация задачи о поперечниках, УМН 30:6 (1975), 179—180.

Поступило в Правление общества 29 января 1976 г.