СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 41, № 2, 1977

УДК 517.5

Б. С. КАШИН

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ И КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Введение и формулировка основных теорем *

Пусть X — банахово пространство, K — компактное, центрально-симметричное подмножество в X. Величину

$$d_n(K, X) = \inf \sup_{x \in K} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|,$$

где inf берется по всем подпространствам X—L_n размерности $\leqslant n$, называется n-поперечником по Колмогорову множества K в X.

Далее, через l_p^n обозначается пространство R^n, снабженное нормой:

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Через B_p^n обозначается единичный шар в l_p^n, через W_p^r $(r \geqslant 1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обозначается известный класс r-гладких функций, заданных на отрезке $[0, 1]$ (при целых r он состоит из функций, у которых r—1-ая производная абсолютно непрерывна и

$$\|f(x)\|_{L^p} + \|f^{(r)}(x)\|_{L^p} \leqslant 1;$$

при нецелом r определение класса W_p^r см. в ([18])).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $1 \leqslant n < m < \infty$. *Справедливо неравенство*:

$$d_n(B_2^m, l_\infty^m) \leqslant \frac{C^{**}}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{3/2}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $q > 2$, $rp > 1$. *Тогда*

$$d_n(W_p^r, L^q(0, 1)) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p > 2, \\ n^{-\left(r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)}, & \text{если } p \leqslant 2. \end{cases}$$

---

* Некоторые теоремы этой работы анонсированы ранее в ([7]).

** Через C, C', B в дальнейшем обозначаются различные абсолютные положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $1 \leqslant p < g \leqslant \infty$. *Тогда*

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} 1, & \text{если } q \leqslant 2, \\ n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}, & \text{если } p \leqslant 2,\ q > 2, \\ n^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, & \text{если } p > 2. \end{cases}$$

(Утверждение теоремы 3 при $p=1$ или $q \leqslant 2$ не ново, оно сразу вытекает из оценок (2) и (3').)

Кроме этих теорем, относящихся к поперечникам, мы докажем следующий результат:

ТЕОРЕМА 4. *Для любого* $n \geqslant 1$ *в пространстве* R^n *существует ортогональное преобразование* T *такое, что*

$$C \cdot \|x\|_{l_2^n} \leqslant \frac{n^{-1/2}}{2}(\|Tx\|_{l_1^n} + \|x\|_{l_1^n}) \leqslant \|x\|_{l_2^n}, \qquad x \in R^n.$$

Теорема 2 завершает решение задачи об определении порядков величин $d_n(W_p^r, L^q)$ и в объединении с известными ранее результатами дает, что при $r > 1$

$$d_n(W_p^r, L^q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p \geqslant q \text{ или } 2 < p < q, \\ n^{-r-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}, & \text{если } p \leqslant 2 < q, \\ n^{-r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}, & \text{если } p < q \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Первые результаты, касающиеся поперечников классов гладких функций, были получены А. Н. Колмогоровым ([8]) ($p=q=2$). С. Б. Стечкиным в работе ([9]) для оценки поперечников W_1^r в L^2 и W_∞^r в L^∞ было получено равенство ($n \leqslant m$)

$$d_n(B_1^m, l_2^m) = \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

В 1960 г. В. М. Тихомиров вычислил точные значения поперечников $d_n(W_\infty^r, C)$, а затем в работах В. М. Тихомирова, С. Б. Бабаджанова и В. М. Тихомирова, Ю. И. Маковоза [см. ([5]), ([10])—([12])] были доказаны неравенства (1) в случае $p \geqslant q$. При $1 \leqslant p < q \leqslant 2$ соотношения (1) были получены Р. С. Исмагиловым ([13]); им же было обнаружено, что эквивалентность $d_n(W_p^r, L^q) \asymp n^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ нарушается при $p=1$, $q=\infty$. До настоящей работы асимптотика $d_n(W_p^r, L^q)$, $p<q$, $q>2$, была известна только при $p=1$, $r \geqslant 2$ (Е. Д. Глускин ([14])). В работе ([14]) было показано, что для точной оценки величины $d_n(W_1^r, C)$ достаточно хорошо оценить поперечники $d_n(B_1^m, l_\infty^m)$. Позднее В. Е. Майоровым ([15]) это сведение задачи об определении порядка величины $d_n(W_p^r, L^q)$ к соответствующей «конечномерной» задаче было проведено при всех p и q $(p<q)$.

«Конечномерная» задача об оценке поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$, $p<q$, представляет и самостоятельный интерес. Достаточно точная оценка для $d_n(B_p^m, l_q^m)$ была известна только при $1\leqslant p<q\leqslant 2$ и при $1=p<q\leqslant\infty$. В первом случае она непосредственно вытекает из равенства (2), а во втором случае из следующего результата автора [см. ([16])]:

$$d_n(B_1^m, l_\infty^m)\leqslant\frac{C_\lambda}{\sqrt{n}},\qquad m^\lambda\leqslant n\leqslant m,\qquad \lambda>0. \tag{3}$$

Отметим, что для приложений к оценке поперечников $d_n(W_1^r, C)$ при $r\geqslant 2$ достаточно и более ранней оценки Р. С. Исмагилова ([13]):

$$d_n(B_1^m, l_\infty^m)\leqslant\frac{C\sqrt{m}}{n}. \tag{3'}$$

При доказательстве теоремы 2 мы воспользуемся следующим очевидным следствием теоремы 1:

Следствие 1. *При $m\geqslant n$ и $1\leqslant p\leqslant 2$*

$$d_n(B_p^m, l_\infty^m)\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{3/2}. \tag{4}$$

При применении следствия 1 нам неважно, в какой степени входит в оценку (4) множитель $\left(1+\ln\dfrac{m}{n}\right)$, мы не занимаемся определением точного значения этой степени, отметим только (см. ([17]), а также оценку (3)), что при $p=1$

$$d_n(B_1^m, l_\infty^m)\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 1. Нам достаточно доказать теорему 1 лишь в случае, когда

$$\sqrt{n}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}>C, \tag{5}$$

где постоянная C сколь угодно велика, так как если неравенство (5) не выполнено, то теорема вытекает из очевидной оценки $d_n(B_2^m, l_\infty^m)\leqslant 1$.

Пусть $A'=\{a_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\,n}$ — матрица с n строками и m столбцами $(n<m)$. Обозначим через e_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ столбцы матрицы A'.

Важное место в доказательстве теоремы занимает построение матрицы A', удовлетворяющей следующим двум свойствам:

*) Любые n столбцов $e_{i_1},\ldots,e_{i_n}$ матрицы A' линейно независимы.

**) Для любого набора $e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}}$ $(1\leqslant i_k\leqslant m)$ коэффициенты разложения

$$e_{i_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_{i_k}$$

удовлетворяют неравенству ($\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$):

$$\frac{\|\lambda\|_{l_2^n}}{\|\lambda\|_{l_1^n}}\cdot\left(1+\frac{1}{\|\lambda\|_{l_2^n}}\right)\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{3/2}. \qquad (6)$$

Докажем теорему 1, предполагая, что матрица A', удовлетворяющая $*$) и $**$), построена. Далее, через $(x)_i$ для $x\in R^m$ и $1\leqslant i\leqslant m$ обозначается i-ая координата вектора x.

Рассмотрим n-мерное подпространство $L\subset R^m$, натянутое на векторы-строки матрицы A' — $\{y_j\}_{j=1}^n$, и покажем, что для любой точки $z\in B_2^m$ найдется такой элемент $y\in L$, что

$$\|z-y\|_{l_\infty^m}\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{3/2}. \qquad (7)$$

Воспользуемся следующим известным следствием теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств (доказательство см. в ([2]), стр. 32—33): пусть $y_1', y_2', \ldots, y_n', z$ — векторы пространства R^m, $m>n$, тогда для того чтобы расстояние в метрике l_∞^m от z до подпространства, порожденного $y_1', \ldots y_n'$, было не больше ρ_0, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора $i_1, \ldots, i_{n+1}$, $1\leqslant i_k\leqslant m$, нашлась бы линейная комбинация $\sum_{r=1}^{n}\beta_r y_r'$ такая, что

$$\left|\left(z-\sum_{r=1}^{n}\beta_r y_r'\right)_{i_k}\right|\leqslant\rho_0, \quad 1\leqslant k\leqslant n+1. \qquad (8)$$

Выберем теперь произвольный набор столбцов $\{e_{i_k}\}_{k=1}^{n+1}$ матрицы A'. Пусть при этом

$$e_{i_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_{i_k}, \quad \lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \qquad (9)$$

Подберем невырожденную матрицу $\{b_{rj}\}_{r,j=1}^n$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{rj}y_j)_{i_k}=\begin{cases}0, & r\neq k\\ 1, & r=k\end{cases} \quad (1\leqslant r,\ k\leqslant n) \qquad (10)$$

(это возможно, так как в силу свойства $*$) матрицы A' $\det\{(y_j)_{i_k}\}\neq 0$).

Определим теперь в подпространстве L новый базис $\{y_r'\}_{r=1}^n$, положив

$$y_r'=\sum_{j=1}^{n}b_{rj}y_j.$$

В силу (10)

$$(y'_r)_{i_k}=\begin{cases}0, & r\neq k\\ 1, & r=k\end{cases} \quad (1\leqslant r,\ k\leqslant n).$$

Найдем значение величин $(y'_r)_{i_{n+1}}$. Используя (9), (10), имеем:

$$(y'_r)_{i_{n+1}}=\left(\sum_{j=1}^{n} b_{rj}y_j\right)_{i_{n+1}}=\sum_{j=1}^{n} b_{rj}(y_j)_{i_{n+1}}=\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k (y_j)_{i_k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{n} b_{rj}y_j\right)_{i_k}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k (y'_r)_{i_k}=\lambda_r.$$

Следовательно, в $m\times n$ матрице $\tilde{A}$, которой задается базис $\{y'_r\}_{r=1}^{n}$, вырезается столбцами с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ следующая $n+1\times n$ матрица: первые ее n столбцов образуют единичную матрицу, а $n+1$-й столбец — это столбец $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Пусть $z\in B_2^m$. Положим при $1\leqslant r\leqslant n$

$$\beta_r=(z)_{i_r}+\left(-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k (z)_{i_k}}{\|\lambda\|_{l_1^n}}+\frac{(z)_{i_{n+1}}}{\|\lambda\|_{l_1^n}}\right)\operatorname{sign}\lambda_r.$$

Оценим величины $\left|\left(z-\sum\limits_{r=1}^{n}\beta_r y'_r\right)_{i_k}\right|$, $1\leqslant k\leqslant n+1$. Используя равенство (9) и оценку (6) при $1\leqslant k\leqslant n$, имеем:

$$\left|\left(z-\sum_{r=1}^{n}\beta_r y'_r\right)_{i_k}\right|\leqslant\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k (z)_{i_k}\right|}{\|\lambda\|_{l_1^n}}+\frac{|(z)_{i_{n+1}}|}{\|\lambda\|_{l_1^n}}\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{k=1}\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(z)_{i_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|\lambda\|_{l_1^n}}+$$

$$+\frac{|(z)_{i_{n+1}}|}{\|\lambda\|_{l_1^n}}\leqslant\frac{\|\lambda\|_{l_2^n}}{\|\lambda\|_{l_1^n}}+\frac{1}{\|\lambda\|_{l_1^n}}\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{3/2}. \tag{11}$$

При $k=n+1$ легко проверить, что

$$\left(z-\sum_{r=1}^{n}\beta_r y'_r\right)_{i_{n+1}}=0. \tag{11'}$$

Так как набор столбцов $\{e_{i_k}\}_{k=1}^{n+1}$ мы выбирали произвольным образом, то из оценок (11), (11') и сформулированного ранее следствия теоремы Хелли вытекает оценка (7). Итак, теорема 1 вытекает из существования матрицы A', удовлетворяющей условиям *) и **).

При построении такой матрицы A' нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *При любых целом n и $\alpha>0$ можно определить набор векторов $\Omega_n(\alpha)=\{z_i\}_{i=1}^{k}$ с $z_i\in S^n$ *, $1\leqslant i\leqslant k$, такой, что $k\leqslant(C\cdot\alpha^{-1})^n$ и для любого $y\in S^n$ найдется число i такое, что*

$$\|y-z_i\|_{l_2^n}\leqslant\alpha.$$

Не заботясь о величине постоянной C, лемму 1 легко доказать непосредственно; ради экономии места мы сошлемся на работу ([6]), где рассматривается вопрос о величине C.

Пусть даны целые числа q, m $(1\leqslant q\leqslant m)$ и число $\alpha>0$. Определим в пространстве R^m систему векторов $\Omega_m(q,\alpha)$ следующим образом:

существует C_m^q q-мерных подпространств L пространства R^m, задающихся так:

$$x=\{x_i\}_{i=1}^{m}\in L\leftrightarrow x_{i_1}=x_{i_2}=\ldots=x_{i_{m-q}}=0\quad(1\leqslant i_1<\ldots<i_{m-q}\leqslant m).$$

На единичной эвклидовой сфере каждого такого подпространства L по данному числу α определим систему векторов $\Omega_q(\alpha)$, удовлетворяющую условию леммы 1. Объединение всех векторов этих систем и задает множество $\Omega_m(q,\alpha)$. Ясно, что число элементов в системе $\Omega_m(q,\alpha)$ не более $\mathrm{C}_m^q\cdot(C\cdot\alpha^{-1})^q$.

ЛЕММА 2. *Для всякой билинейной формы $A(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$ $(x=\{x_i\}$, $y=\{y_j\})$ мы имеем:*

$$\sup_{\|x\|_{l_2^n}=\|y\|_{l_2^n}=1}A(x,y)\equiv\|A\|\leqslant2\cdot\sup_{x,y\in\Omega_n(1/6)}A(x,y),$$

где множество $\Omega_n(1/6)$ определено по числу $\alpha=1/6$ в лемме 1 (поэтому $|\Omega_n(1/6)|\leqslant C^n$).

В самом деле, пусть $\|A\|=A(x_0,y_0)$; $x_0,y_0\in S^n$. Используя свойство системы векторов $\Omega_n(1/6)$ (см. лемму 1), найдем векторы $x\in\Omega_n(1/6)$ и $y\in\Omega_n(1/6)$ такие, что $\|x-x_0\|_{l_2^n}\leqslant1/6$, $\|y-y_0\|_{l_2^n}\leqslant1/6$. Тогда

$$\begin{aligned}A(x,y)&=A(x_0+(x-x_0),\,y_0+(y-y_0))=A(x_0,y_0)+A(x_0,y-y_0)+\\&+A(x-x_0,y_0)+A(x-x_0,y-y_0)\geqslant A(x_0,y_0)-\\&-\|A\|\cdot\frac{1}{6}-\|A\|\frac{1}{6}-\|A\|\cdot\frac{1}{36}\geqslant\|A\|\cdot\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3 [см. ([1]), стр. 347, и ([3]), стр. 76, теорема 8]. *Пусть $P(x)=\sum_{k=1}^{l}c_kr_k(x)$ — любой полином по системе Радемахера, тогда:*

---

* Через S^n мы обозначаем единичную сферу в l_2^n.

1) *существует абсолютная постоянная* $C_0>0$ *такая, что*

$$\mu\left\{x\in[0,1]:|P(x)|\geqslant C_0\left(\sum_{k=1}^{l}c_k^2\right)^{1/2}\right\}\geqslant C_0;$$

2) *для любого* $y\geqslant 0$

$$\mu\left\{x\in[0,1]:|P(x)|\geqslant y\left(\sum_{k=1}^{l}c_k^2\right)^{1/2}\right\}\leqslant 2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Далее мы будем через $|E|$ обозначать число элементов любого конечного множества E, а через $N(x)$, $x=\{x_i\}\in R^n$,— множество всех таких чисел i, $1\leqslant i\leqslant n$, что $x_i\neq 0$.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\{a_i\}_{i=1}^n$ — *набор действительных чисел,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}=v,\qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right)\leqslant\gamma\cdot v,$$

тогда для любого $t\geqslant 1$ *найдется такое множество целых чисел* E_t *с* $E_t\subset[1,n]$, $|E_t|\leqslant n\cdot(2t\gamma)^2$, *что*

$$\sum_{i\in E_t}a_i^2\geqslant t\sum_{i\notin E_t}a_i^2.$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1,\qquad n^{-1/2}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\gamma.$$

Положим

$$E_t=\{i:1\leqslant i\leqslant n,\ a_i^2\geqslant n^{-1}\cdot(2t\gamma)^{-2}\}.$$

Тогда

$$|E_t|\cdot(2t\gamma)^{-2}n^{-1}\equiv\sum_{i\in E_t}n^{-1}(2t\gamma)^{-2}\leqslant\sum_{i\in E_t}a_i^2\leqslant 1,$$

а поэтому

$$|E_t|\leqslant n(2t\gamma)^2.$$

Далее,

$$\sum_{i\notin E_t}a_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|(2t\gamma\sqrt{n})^{-1}\leqslant(2t)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\in E_t}a_i^2\geqslant 1-(2t)^{-1}\geqslant\frac{1}{2}\geqslant t\sum_{i\notin E_t}a_i^2.$$

Лемма доказана.

Введем следующие определения: пусть $A=\{\varepsilon_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n}$ $(m\geqslant n)$ — действительная матрица. Положим

$$F(A)=\sup_{\substack{\|x\|_{l_2^m}\leqslant 1,\ |N(x)|\leqslant n\\ \|y\|_{l_2^n}\leqslant 1}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}x_iy_j=\sup_{\|x\|_{l_2^m}\leqslant 1,\ |N(x)|\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_{ij}x_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Из определения ясно, что при $m=n$ $F(A)=\|A\|$. При $\frac{1}{n}\leqslant\theta\leqslant 1$ положим

$$G(A,\theta)=\inf_{\|x\|_{l_2^m}=1,|N(x)|\leqslant n\cdot\theta}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|. \qquad (13)$$

ЛЕММА 5. *Для любых чисел* $\alpha>0$, $\frac{1}{n}\leqslant\theta\leqslant 1$ *и матрицы* $A=\{\varepsilon_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n}$ *справедливо неравенство*

$$G(A,\theta)\geqslant\inf_{x\in\Omega_m([n\theta],\alpha)}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|-\sqrt{n}F(A)\cdot\alpha.$$

Доказательство. Пусть

$$G(A,\theta)=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i^0\varepsilon_{ij}\right|,\qquad x_0=\{x_i^0\}\in S^m,\qquad |N(x_0)|\leqslant[n\theta].$$

Найдем в множестве $\Omega_m([n\theta],\alpha)$ такой вектор $x=\{x_i\}_{i=1}^m$, что $\|x-x_0\|_{l_2^m}\leqslant\alpha$ и $|N(x-x_0)|\leqslant[n\theta]\leqslant n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i^0\varepsilon_{ij}\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)\varepsilon_{ij}\right|\leqslant$$

$$\leqslant G(A,\theta)+\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)\varepsilon_{ij}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant G(A,\theta)+\sqrt{n}F(A)\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\right)^{1/2}\leqslant G(A,\theta)+\sqrt{n}F(A)\cdot\alpha.$$

Лемма доказана.

Мы будем пользоваться следующей простой оценкой для числа сочетаний C_m^n:

$$C_m^n\leqslant C^n\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^n. \qquad (14)$$

Действительно,

$$C_m^n=\frac{m\cdots(m-n+1)}{n!}\leqslant\frac{m^n}{n!}.$$

В силу формулы Стирлинга, $n!\geqslant n^n\cdot C^{-n}$, что доказывает (14).

Перейдем к построению матрицы A', удовлетворяющей условиям *) и **). При этом мы воспользуемся вероятностными соображениями.

На множестве D_{mn} всех $m\times n$ матриц $A=\{\varepsilon_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\,n}$, элементы которых равны ± 1, введем меру, приписав каждой матрице A меру $2^{-m\cdot n}$. Тогда $\mu D_{mn}=1$.

Пусть при $y>0$ (см. (12))

$$f(y)=\mu\{A\in D_{mn}: F(A)\geqslant y\}. \tag{15}$$

В силу леммы 2 и определения множества $\Omega_m(n, \alpha)$,

$$f(y)\leqslant \mu\{A\in D_{mn}: \sup_{x\in\Omega_m\left(n,\frac{1}{6}\right),\, y\in\Omega_n\left(\frac{1}{6}\right)} A(x, y)\geqslant 2^{-1}\cdot y\}\leqslant$$

$$\leqslant C_m^n\cdot C^n\cdot \sup_{x,y\in S^n}\mu\left\{A\in D_{nn}: \left|\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}x_iy_j\right|\geqslant 2^{-1}\cdot y\right\}. \tag{16}$$

Оценим правую часть неравенства (16). Так как при $x, y\in S^n$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{j=1}^{n}y_j^2=1,$$

то

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)=1.$$

Пусть $\{c_k\}_{k=1}^{n^2}$ — занумерованные в любом порядке числа $x_i\cdot y_j$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$. Тогда легко видеть, что

$$\mu\left\{A\in D_{nn}: \left|\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}x_iy_j\right|\geqslant 2^{-1}y\right\}=\mu\left\{t\in[0, 1]: \left|\sum_{k=1}^{n^2}c_kr_k(t)\right|\geqslant 2^{-1}y\right\}. \tag{17}$$

В силу пункта 2) из леммы 3 и соотношения $\sum_{k=1}^{n^2}c_k^2=1$, правая часть равенства (17) не превосходит $2\cdot e^{-\frac{1}{8}y^2}$. Окончательно, для функции $f(y)$ получаем оценку (см. (16)):

$$f(y)\leqslant C_m^n\cdot C^n\cdot e^{-\frac{1}{8}y^2}. \tag{18}$$

Из оценки (18) непосредственно вытекает, что при $y=C'(n+\ln C_m^n)^{\frac{1}{2}}$ $f(y)\leqslant\frac{1}{100}$, где C' — достаточно большая абсолютная постоянная.

Так как (см. (14)) $\ln C_m^n\leqslant C\left(n+n\ln\frac{m}{n}\right)$, то

$$f(y)\leqslant\frac{1}{100},\quad y=B\sqrt{n}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Далее, при $\alpha>0$, $1/n\leqslant\theta\leqslant1$, $z>0$ положим

$$g(\theta,\alpha,z)=\mu\left\{A\in D_{mn}:\ \inf_{x\in\Omega_m([n\theta],\alpha)}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|\leqslant zn\right\}. \qquad (20)$$

Оценим величину функции $g(\theta,\alpha,z)$; для этого оценим сначала при любом фиксированном $x\in S^m$ меру

$$\mu\left\{A\in D_{mn}:\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x\,\varepsilon_{ij}\right|\leqslant zn\right\}.$$

В силу пункта 1) из леммы 3 при каждом j $(1\leqslant j\leqslant n)$

$$\mu\left\{A\in D_{mn}:\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|\geqslant C_0\right\}\geqslant C_0.$$

Следовательно, при $z<{}^1/_2$

$$\mu\left\{A\in D_{mn}:\sum_{j:\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|\geqslant C_0}1\leqslant zn\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}_n^{n-[nz]}\cdot\mu\left\{A\in D_{mn}:\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|\leqslant C_0;\ j=1,2,\ \dots,\ n-[zn]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}_n^{n-[nz]}\cdot(1-C_0)^{n-[nz]}\leqslant \mathrm{C}_n^{[zn]}\cdot(1-C_0)^{\frac{n}{2}}. \qquad (21)$$

Из оценки (21) вытекает, что при любом $x\in S^m$

$$\mu\left\{A\in D_{mn}:\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_{ij}\right|\leqslant C_0zn\right\}\leqslant \mathrm{C}_n^{[zn]}\cdot(\sqrt{1-C_0})^n. \qquad (22)$$

Так как множество $\Omega_m([n\theta],\alpha)$ содержит не более $\mathrm{C}_m^{[n\theta]}(C\cdot\alpha^{-1})^{n\theta}$ элементов, то из неравенства (22) следует такая оценка для функции $g(\theta,\alpha,z)$ (см. (20)):

$$g(\theta,\alpha,C_0z)\leqslant \mathrm{C}_m^{[n\theta]}\cdot(C\cdot\alpha^{-1})^{n\theta}\cdot \mathrm{C}_n^{[zn]}\cdot(\sqrt{1-C_0})^n. \qquad (23)$$

Упростим правую часть неравенства (23). Пользуясь тем, что $\lim\limits_{z\to0}(Cz^{-1})^z=1$, найдем такое число z_0, что при $z\leqslant z_0$

$$\left(\frac{C}{z}\right)^z\leqslant\left(1-\frac{1}{2}C_0\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где C в данном случае — это постоянная из оценки (14). Тогда в силу (14) при $z\leqslant z_0$

$$\mathrm{C}_n^{[zn]}\leqslant(Cz^{-1})^{nz}\leqslant\left(1-\frac{1}{2}C_0\right)^{-\frac{1}{2}n}. \qquad (24)$$

Следовательно, при $z \leqslant z_0$ неравенство (23) можно записать так:

$$g(\theta, \alpha, C_0 \cdot z) \leqslant \mathrm{C}_m^{[n\theta]} \cdot (C\alpha^{-1})^{n\theta} \cdot (\widetilde{C})^n, \tag{25}$$

где $\widetilde{C}=(1-C_0)^{1/2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}C_0\right)^{-1/2} < 1$ — абсолютная постоянная.

Фиксируем теперь числа α и θ, положив

$$\alpha = z_0 C_0 \left(2B\sqrt{1+\ln\frac{m}{n}}\right)^{-1} \tag{26}$$

(при этом постоянная B — та же, что и в (19), а z_0 определено формулой (20)),

$$\theta = B' \cdot \left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}. \tag{27}$$

Покажем, что если абсолютная постоянная B' достаточно мала, то (см. (25))

$$g(\theta, \alpha, C_0 \cdot z) \leqslant \mathrm{C}_m^{[n\theta]} (C\alpha^{-1})^{n\theta} (\widetilde{C})^n \leqslant \frac{1}{10} \quad (\text{при } z \leqslant z_0 \text{ и } n > n_0).$$

В самом деле (см. (14), учитывается также (5)),

$$\mathrm{C}_m^{[n\theta]} \leqslant C^{n\theta}\left(\frac{m}{n\theta}\right)^{n\theta} \leqslant C^{n\theta} \cdot \exp\left\{\ln\frac{m}{n\theta}\cdot n\theta\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C^{n\theta} \cdot \exp\left\{\left(\ln\frac{m}{n} - \ln\theta\right) n\theta\right\} \leqslant C^{B'\cdot n} \cdot e^{B'\cdot n} \cdot e^{(-\theta\ln\theta)n} \leqslant u^n,$$

где $u < (\widetilde{C})^{-1/3}$, если число B' в (27) достаточно мало. Далее,

$$\left(\frac{C}{\alpha}\right)^{n\theta} \leqslant (C')^{n\theta} \cdot \left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{n\theta}{2}} \leqslant (C')^{n\theta} \cdot \exp\left\{\ln\left(\ln\left(\frac{m}{n}\right)+1\right) \cdot B'\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}\right\} \leqslant u^n,$$

где $u < (\widetilde{C})^{-1/3}$, если число B' в (27) достаточно мало. Следовательно, при числах α и θ, определенных формулами (26) и (27), и $z \leqslant z_0$ (см. (25))

$$g(\theta, \alpha, C_0 z) \leqslant (\widetilde{C})^{-\frac{1}{3}n} (\widetilde{C})^{-\frac{1}{3}n} (\widetilde{C})^n \leqslant (\widetilde{C})^{\frac{1}{3}n} \leqslant \frac{1}{10} \tag{28}$$

при $n \geqslant n_0$. Из оценок (19) и (28) следует, что при некоторых постоянных B, B', $0 < z_0 < 1$, $0 < C_0 < 1$ и $n \geqslant n_0$ существует матрица $A = \{\varepsilon_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m\ n} \in D_{mn}$ такая, что:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ F(A) \leqslant B \cdot \sqrt{n}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\\
&2)\ \inf_{x\in\Omega_m([n\theta],\alpha)} \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m} x_i\varepsilon_{ij}\right| \geqslant C_0 \cdot z_0 \cdot n,\\
&\theta = B'\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}, \quad \alpha = z_0 \cdot C_0 \cdot \left(2B\sqrt{1+\ln\frac{m}{n}}\right)^{-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Применив лемму 5 для этой матрицы A и числа θ (см. также (13)), получим (см. (29)):

$$G(A, \theta) \geqslant \inf_{x \in \Omega_m([n\theta], \alpha)} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{m} x_i \varepsilon_{ij} \right| - \sqrt{n} F(A) \cdot \alpha \geqslant$$

$$\geqslant C_0 \cdot z_0 \cdot n - \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot B \left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot z_0 \cdot C_0 \left(2B \sqrt{1 + \ln \frac{m}{n}}\right)^{-1} \geqslant \frac{C_0 z_0}{2} \cdot n. \tag{30}$$

Легко видеть (см. (29) и (30)), что очень малым изменением элементов матрицы $A = \{\varepsilon_{ij}\}$ можно получить $m \times n$ матрицу $A' = \{\varepsilon'_{ij}\}$, для которой:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1) } |\varepsilon'_{ij}| \geqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \\
\text{2) } F(A') \leqslant 2B\sqrt{n}\left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B \text{ — абсолютная постоянная;} \\
\text{очевидно, можно считать } B \geqslant 1. \\
\text{3) } G(A', \theta) \geqslant Q \cdot n, \quad \theta = B'\left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{-1}, \quad Q > 0 \text{ — абсолютная по-} \\
\text{стоянная; очевидно, что можно взять } Q \text{ столь малой, чтобы } Q \leqslant \frac{1}{2}. \\
\text{4) Если } e_i\,(1 \leqslant i \leqslant m,\ e_i \in R^n) \text{ — } i\text{-ый вектор-столбец матрицы} \\
A', \text{ то любой набор } \{e_{i_k}\}_{k=1}^{n} \text{ из } n \text{ столбцов образует линейно неза-} \\
\text{висимую систему векторов в } R^n.
\end{array}\right\} \tag{31}$$

Построенная матрица A' является искомой, т. е. удовлетворяет условиям*) и **).

Условие *) выполнено в силу (31), п. 4). Докажем выполнение условия **). При этом в силу (5) можно считать, что

$$\frac{B'}{2} \cdot \left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{-1} \cdot n > 1. \tag{32}$$

Выберем произвольный набор $\{e_{i_k}\}_{k=1}^{n+1}$ из $n+1$ столбцов матрицы A'. Так как $e_i \in R^n$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, то между этими векторами существует линейная зависимость:

$$e_{i_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} \tag{33}$$

(в силу (31), пункт 4), коэффициент при $e_{i_{n+1}}$ в равенстве (33) не может быть равен нулю).

Пусть

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)^{1/2} = v, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right) = u, \qquad \gamma = \frac{u}{v}.$$

Докажем, что справедливы оценки:

$$\left.\begin{aligned} &\text{а) } v\geqslant\frac{1}{4B}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1/2},\\ &\text{б) } \gamma\geqslant\frac{1}{32}\cdot\frac{Q^2}{B^2}\cdot\sqrt{\frac{B'}{2}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-3/2}\left(\frac{v^2}{1+v^2}\right)^{-1},\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где постоянные Q, B, B' в неравенствах (34) — те же, что и в (31). Из оценок (34) уже легко вытекает выполнение оценки (6) для вектора $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, определяемого соотношением (33). В самом деле, пусть неравенства (34) доказаны, тогда

$$\frac{\sqrt{n}\|\lambda\|_{l_2^n}}{\|\lambda\|_{l_1^n}}\left(1+\frac{1}{\|\lambda\|_{l_2^n}}\right)=\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{v}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{v^2}{1+v^2}+C\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{v}{1+v^2}\leqslant C\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Так как набор $\{e_{i_k}\}_{k=1}^{n+1}$ мы выбирали произвольным образом, то из последней оценки непосредственно вытекает выполнение условия $**$) для матрицы A'. Тем самым для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать неравенства (34).

Так как (см. (31), пункт 1)) $\|e_i\|_{l_2^n}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{n}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, то (см. (33), (12), (31), п. 2))

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\leqslant\|e_{i_{n+1}}\|_{l_2}=\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_{i_k}\right\|_{l_2}\leqslant F(A')\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2B\cdot\sqrt{n}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot v,$$

т. е.

$$v\geqslant\frac{1}{4B}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

что доказывает неравенство (34), а).

Допустим теперь, что оценка (34), б) не имеет места. Тогда система неравенств

$$\begin{cases} 4\gamma^2t^2\leqslant\dfrac{B'}{2}\left(1+\ln\dfrac{m}{n}\right)^{-1},\\[2ex] \sqrt{t}\geqslant\dfrac{1}{Q}\cdot 4B\left(1+\ln\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{v^2}{1+v^2}\right)^{1/2}\end{cases} \tag{35}$$

имеет решение $t=t_0$, где

$$\sqrt{t_0}=\frac{1}{Q}\cdot 4B\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{v^2}{1+v^2}\right)^{1/2}. \tag{35'}$$

Так как при $0<v_1<v_2$

$$\frac{v_1^2}{1+v_1^2}<\frac{v_2^2}{1+v_2^2},$$

то (см. (34), а), (31) 2))

$$\left(\frac{v^2}{1+v^2}\right)^{1/2}\geqslant\frac{1}{4B}\cdot\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4B}\right)^2\cdot\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}}\right)^{1/2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{4B}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{1}{1+(16)^{-1}}\right)^{1/2}.$$

Используя последнее неравенство, а также неравенство (см. (31), пункт 3)) $Q\leqslant 1/2$, получаем, что

$$\sqrt{t_0}\geqslant\left(\frac{Q}{2}\right)^{-1}\geqslant 1.$$

Если применить теперь лемму 4 при этом значении $t=t_0\geqslant 1$ к набору чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, то получим, что все числа $\{i_k\}_{k=1}^n$ можно разбить на две группы E и $\widetilde{E}$ так, что:

1) $|E|\leqslant n\cdot 4\gamma^2 t^2$, а следовательно (см. (35) и (32)), и

$$|E|\leqslant\frac{B'}{2}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}n<B'\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{-1}n-1; \tag{36}$$

2) $$\frac{v^2}{2}\leqslant\sum_{k:i_k\in E}\lambda_k^2\geqslant t_0\cdot\sum_{k:i_k\in\widetilde{E}}\lambda_k^2=\left(\frac{4B}{Q}\right)^2\cdot\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{v^2}{1+v^2}\cdot\sum_{k:i_k\in\widetilde{E}}\lambda_k^2. \tag{37}$$

Из неравенств (36) и (37) вытекает (см. также (13) и (31), пункт 3)), что

$$\left\|e_{i_{n+1}}-\sum_{k:i_k\in E}\lambda_k e_{i_k}\right\|_{l_2^n}\geqslant n^{-\frac{1}{2}}\cdot\left\|e_{i_{n+1}}-\sum_{k:i_k\in E}\lambda_k e_{i_k}\right\|_{l_1^n}\geqslant$$

$$\geqslant n^{-\frac{1}{2}}\cdot G(A',\theta)\cdot\left(1+\sum_{k:i_k\in E}\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant Q\sqrt{n}\left(\frac{v^2}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее (см. (12), (34), (31), п. 3), (35')), имеем:

$$\left\|\sum_{k:i_k\in\widetilde{E}}\lambda_k e_{i_k}\right\|_{l_2^n}\leqslant F(A')\cdot\left(\sum_{k:i_k\in\widetilde{E}}\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant F(A')\cdot\left(\frac{1}{t_0}\sum_{k:i_k\in E}\lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant F(A')\cdot\frac{1}{\sqrt{t_0}}\cdot v\leqslant\frac{2B}{4B}\cdot\frac{\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{n}\cdot Q\cdot\frac{v}{v}\cdot(1+v^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Q}{2}\sqrt{n}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}<Q\sqrt{n}\left(\frac{v^2}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тем самым, исходя из предположения, что оценка (34) б) не верна, мы получили, что

$$\left\| e_{i_{n+1}} - \sum_{k: i_k \in E} \lambda_k e_{i_k} \right\|_{l_2^n} \geqslant Q\sqrt{n}\left(\frac{v^2}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}} > \left\| \sum_{k: i_k \in \widetilde{E}} \lambda_k e_{i_k} \right\|_{l_2^n},$$

но последние оценки противоречат равенству (33). Полученное противоречие доказывает неравенство (34) б), а следовательно, и всю теорему 1.

Доказательство теоремы 3. Мы будем пользоваться следующим простым неравенством: при $x \in R^{2n}$, $p<q$

$$\|x\|_{l_p} \leqslant (2n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_{l_q}. \tag{38}$$

Дадим сначала оценки сверху для величин $d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n})$.

1) При $1 \leqslant p \leqslant 2$, используя теорему 1 и (38), имеем:

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \leqslant d_n(B_2^{2n}, l_q^{2n}) \leqslant d_n(B_2^{2n}, l_\infty^{2n}) \cdot (2n)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \cdot n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}.$$

2) При $2<p<\infty$, опять используя теорему 1 и (38), имеем:

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \leqslant (2n)^{\frac{1}{q}} \cdot d_n(B_p^{2n}, l_\infty^{2n}) \leqslant (2n)^{\frac{1}{q}} \cdot (2n)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot d_n(B_2^{2n}, l_\infty^{2n}) \leqslant C \cdot n^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

Теперь установим оценки снизу.

1) При $p>2$ мы воспользуемся тем, что в силу (38) шар B_p^{2n} содержит множество

$$E_{pq} = \{x \in R^{2n} : \|x\|_{l_q} \leqslant (2n)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\}.$$

Следовательно,

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \geqslant d_n(E_{pq}, l_q^{2n}) \geqslant (2n)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d_n(B_q^{2n}, l_q^{2n}) = (2n)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

2) При $1 \leqslant p \leqslant 2$ мы воспользуемся, кроме оценки (38), еще и равенством (2):

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \geqslant d_n(B_1^{2n}, l_q^{2n}) \geqslant n^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} d_n(B_1^{2n}, l_2^{2n}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \quad (q \geqslant 2).$$

Полученные оценки и составляют утверждение теоремы 3.

Отметим еще, что для любого $\gamma>1$ поперечник $d_n(B_p^{[\gamma n]}, l_q^{[\gamma n]})$, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, имеет тот же порядок (при $n \to \infty$), что и $d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n})$.

Доказательство теоремы 2. Учитывая результаты работы ([15]), теорема 2 легко вытекает из оценок, полученных в этой работе для поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$.

Используя неравенство [см. ([15])]

$$d_n(W_p^r, L^q) \geqslant C_{p,r,q}\cdot n^{-\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\cdot d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n})$$

и теорему 3, получаем при $q\geqslant 2$:

$$d_n(W_p^r, L^q) \geqslant \begin{cases} C_{p,r,q}n^{-r}, & \text{если } p>2, \\ C_{p,r,q}n^{-\left(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}, & \text{если } 1\leqslant p\leqslant 2. \end{cases}$$

Теперь оценим поперечник $d_n(W_p^r, L^q)$ сверху. Отметим сначала, что при $p>2$

$$d_n(W_p^r, L^q)\leqslant d_n(W_p^r, C)\leqslant d_n(W_2^r, C).$$

Поэтому нам достаточно получить требуемые в теореме 2 оценки сверху только при $1\leqslant p\leqslant 2$, $q=\infty$. Если в теорему 2 работы ([15]) подставить оценку для поперечника $d_n(B_p^m, l_\infty^m)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, полученную в следствии 1 этой работы, то получим при $1\leqslant p\leqslant 2$:

$$d_n(W_p^r, C)\leqslant C_{p,r}\cdot n^{-\left(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

В силу сделанного выше замечания, последнее неравенство завершает доказательство теоремы 2.

Нерассмотренной осталась только теорема 4. Мы дадим только схему доказательства этой теоремы, так как необходимые для доказательства рассуждения применялись уже в доказательстве теоремы 1. Новым, по сравнению с теоремой 1, является только тот факт, что в теореме 4 усреднения производятся по группе ортогональных матриц.

Пусть O^n — группа ортогональных матриц порядка n, μ — мера Хаара на этой группе [см. ([4])]. Через mX будем обозначать обычную меру Лебега множества X, лежащего на сфере S^n $(mS^n=1)$.

Очевидно, что при любом j $(1\leqslant j<n)$ у вектора $x=\{(x)_i\}_{i=1}^n$ с $\|x\|_{l_1^n}\leqslant \alpha\sqrt{n}$ можно выбрать $n-j$ координат $(x)_{i_k}$ так, чтобы

$$|(x)_{i_k}|\leqslant\frac{\alpha\sqrt{n}}{j}\quad(1\leqslant k\leqslant n-j). \tag{39}$$

Учитывая оценку (39) (например, при $j=[n/2]$), можно показать, что при достаточно малом $\alpha_0>0$ и любом n справедливо неравенство

$$f(\alpha_0, n)\equiv m\{x\in S^n: \|x\|_{l_1^n}\leqslant \alpha_0\sqrt{n}\}<2^{-n}. \tag{40}$$

Используя инвариантность относительно сдвигов меры μ и оценку (40), получаем, что для любого $x\in S^n$

$$\mu\{A\in O^n: \|Ax\|_{l_1^n}\leqslant\alpha_0\sqrt{n}\}=f(\alpha_0, n)<2^{-n}. \tag{41}$$

Из оценки (41), рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1 (см., в частности, лемму 5), можно получить существование матрицы $T\in O^n$ такой, что если $|N(x)|\leqslant\beta n$, то $\|Tx\|_{l_n^1}\geqslant\alpha\sqrt{n}$, где $\beta>0$, $\alpha>0$— абсолютные постоянные.

Используя затем лемму 4, нетрудно убедиться, что такая матрица T удовлетворяет требованиям теоремы 4.

Справедливо также смежное с теоремой 4, но несколько более простое утверждение:

для любого положительного числа θ существует постоянная $C_\theta>0$ такая, что при любом $n\geqslant1$ найдется такая плоскость

$$L_{n,\theta}\subset R^n,\quad \dim L_{n,\theta}\geqslant n(1-\theta),$$

что если $x\in L_{n\theta}$, то

$$C_\theta\|x\|_{l_2^n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_{l_1^n}\leqslant\|x\|_{l_2^n}.$$

Более того, если положить

$$L^0_{n,\theta}=\{x\in R^n:(x)_i=0 \text{ при } i\geqslant n(1-\theta)+1\},$$

то при достаточно малой $C_\theta>0$ мера тех T, $T\in O^n$, для которых плоскость $T(L^0_{n\theta})$ не удовлетворяет последнему утверждению, меньше, чем 2^{-n}.

Автор благодарит профессора В. М. Тихомирова за интересное обсуждение результатов работы.

Поступило
27.II.1976

Литература

[1] **Зигмунд А.**, Тригонометрические ряды, т. I, М., ИЛ, 1965.

[2] **Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.**, Теорема Хелли, М., «Мир», 1968.

[3] **Петров В. В.**, Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.

[4] **Вейль А.**, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.

[5] **Тихомиров В. М.**, Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений, Успехи матем. наук, XV, вып. 3 (1960), 81—120.

[6] **Сидельников В. М.**, Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n-мерном эвклидовом пространстве, Матем. сб., 95 (137) (1974), 148—158.

[7] **Кашин Б. С.**, Порядки поперечников некоторых классов гладких функций, Успехи матем. наук, т. XXXIII, вып. 1 (1977), 191—192.

[8] **Kolmogoroff A.**, Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, Ann. Math., 37 (1936), 107—111.

[9] **Стечкин С. Б.**, О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, Успехи матем. наук, IX, вып. 1 (1954), 133—134.

[10] **Бабаджанов С. Б., Тихомиров В. М.**, О поперечниках одного класса в пространстве L^p, Изв. АН Узб. ССР. Сер. физ.-матем., 2 (1967), 24—30.

[11] **Тихомиров В. М.**, Докторская диссертация, М., 1969.

[12] **Маковоз Ю. И.,** Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве, Матем. сб., 87 (129), № 1 (1972), 136—146.

[13] **Исмагилов Р. С.,** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами, Успехи матем. наук, XXIX, вып. 3 (1974), 161—178.

[14] **Глускин Е. Д.,** Об одной задаче о поперечниках, Докл. АН СССР, 219, № 3 (1974), 527—530.

[15] **Майоров В. Е.,** Дискретизация задачи о поперечниках, Успехи матем. наук, XXX, вып. 6 (1975), 179—180.

[16] **Кашин Б. С.,** О поперечниках октаэдров, Успехи матем. наук, XXX, вып. 4 (1975), 251—252.

[17] **Кашин Б. С.,** О колмогоровских поперечниках октаэдров, Докл. АН СССР, 214, № 5 (1974), 1024—1026.

[18] **Соболев С. Л.,** Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.