Труды Математического института АН СССР
1977, том 143

Б. С. КАШИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ СХОДИМОСТИ

Ортонормированная система (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенная на отрезке $[0, 1]$, называется системой сходимости, если всякий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty, \tag{2}$$

сходится почти всюду (п. в.) на отрезке $[0, 1]$. ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой строгой сходимости, если для сходимости п. в. ряда (1) необходимо и достаточно выполнение условия (2).

Хорошо известными примерами систем строгой сходимости являются система Радемахера (см. [2, с. 55]) и система функций $\{\sin 2^k \pi x\}_{k=1}^{\infty}$.

Если задана некоторая система сходимости $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то можно определить оператор мажоранты частных сумм T_Φ, действующий из пространства l_2 в пространство L^0 всех измеримых и конечных п. в. функций следующим образом: если $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$, то

$$T_\Phi(a) = f(x) = \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left| \sum_{n=1}^{k} a_n \varphi_n(x) \right|.$$

В первом параграфе этой работы изучаются свойства оператора T_Φ. Во втором — доказывается следующая

Теорема 1. *Существует полная в пространстве $L^2(0, 1)$ ОНС строгой сходимости $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.*

Теорема 1 дает ответ на задачу, поставленную П. Л. Ульяновым в работе [3], и является усилением результата, полученного автором в [5]. Система, построенная в теореме 1, обладает тем свойством, что для любой функции $f(x) \in L^2(0, 1)$ существует единственный ряд по системе $\{\psi_n(x)\}$ такой, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \text{ п. в.}$$

При доказательстве теоремы 1 используется следующий результат, имеющий и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть* L — *произвольное замкнутое линейное многообразие в* $L^2(0, 1)$. *Тогда в* L *можно выбрать такой ортонормированный базис* $\{\varphi_k(x)\}$, *что* $\{\varphi_k(x)\}$ — *система сходимости.*

Результаты этой работы опубликованы без доказательства в заметке автора [11].

§ 1. Справедлива

Теорема 3. *Существует определенная на отрезке* $[0, 1]$ *ортонормированная система сходимости* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что для любого множества* $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$

$$T_\Phi(a) \equiv \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left| \sum_{n=1}^{k} a_n \varphi_n(x) \right| \notin L^2(E)$$

при некотором, зависящем от множества E *элементе* $a = \{a_n\} \in l_2$.

Прежде чем доказывать теорему 3, сформулируем некоторые связанные с ней результаты. Для этого нам потребуется несколько определений.

Пусть B — банахово пространство. Оператор $G: B \to L^0(0, 1)$ назовем выпуклым, если для любых a и $b \in B$ и числа $\lambda \in (-\infty, \infty)$ выполняются соотношения:

1) $|G(a+b)| \leqslant |G(a)| + |G(b)|$ п. в. на $[0, 1]$;

2) $|G(\lambda a)| = |\lambda| \cdot |G(a)|$ п. в. на $[0, 1]$.

Множество функций $Q \subset L^0(0, 1)$ назовем ограниченным по мере, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $R > 0$ такое, что

$$\mu\{x : |f(x)| \geqslant R\} \leqslant \varepsilon$$

для любой функции $f(x) \in Q$.

Оператор $G: B \to L^0(0, 1)$ назовем ограниченным, если образ $G(S)$ единичного шара S пространства B есть ограниченное по мере множество.

Типичным примером выпуклого ограниченного оператора является оператор мажоранты частных сумм T_Φ ($\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система сходимости).

А. М. Олевский [6] показал, что найдутся система сходимости $\Phi_0 = \{\varphi_n(x)\}$ и элемент $a \in l_2$ такие, что

$$T_{\Phi_0}(a) \notin \bigcup_{p>0} L^p(0, 1).$$

Е. М. Никишиным (см. [7], а также [8]) была доказана следующая

Теорема А. *Пусть* $G: l_p \to L^0(0, 1)$ — *выпуклый*[1] *ограниченный оператор. Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое множество* $E_\varepsilon \subset [0, 1]$ *с* $\mu E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, *что оператор* G *имеет слабый тип* (p, q) *на множестве* E_ε *при* $q = \min(2, p)$.

Из теоремы А непосредственно вытекает, что для любой ОНС сходимости $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ оператор T_Φ есть ограниченный оператор из l_2 в пространство $L_p(E_\varepsilon)$ ($E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $\mu E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$) при любом $p < 2$.

---

[1] Е. М. Никишин называл выпуклые, в нашем определении, операторы — надлинейными.

Е. М. Никишиным [7] для всякого числа p, $1 \leqslant p < 2$, был построен линейный ограниченный оператор $G: l_p \to L^0(0, 1)$ такой, что для любого множества E с $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$

$$\sup_{\|a\|_{l_p}=1} \left(\int_E (G(a))^p \, dx \right)^{1/p} = \infty.$$

Тем самым теорема А при $1 \leqslant p < 2$ не может быть усилена даже для линейных операторов.

Если же $p \geqslant 2$ и $G: l_p \to L^0(0, 1)$ — линейный ограниченный оператор, то известно (см. [14, 13]), что теорему А можно усилить, а именно справедлива

Теорема Б. *Пусть $p \geqslant 2$ и $G: l_p \to L^0(0, 1)$ — линейный ограниченный оператор, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $E_\varepsilon \subset [0, 1]$ с $\mu E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ и постоянная C_ε такие, что*

$$\|G(a)\|_{L^2(E_\varepsilon)} \leqslant C_\varepsilon \|a\|_{l_p}.$$

Теорему Б можно получить последовательным применением теоремы А и теоремы А. Гротендика [4], согласно которой для любого линейного ограниченного оператора $G: l_p \to L^1(0, 1)$ $(p \geqslant 2)$ справедливо равенство $G(a) = H(a) f_0(x)$, где $H: l_p \to L^2(0, 1)$ — ограниченный оператор, а функция $f_0(x)$ не зависит от a.

Из теоремы Б следует, что примеры, построенные Е. М. Никишиным при $1 \leqslant p < 2$, по существу не переносятся на случай $p \geqslant 2$. Особый интерес представляет случай $p = 2$. Вопрос об окончательности теоремы А уже при $p = 2$ оставался открытым. Из теоремы 3 этой работы непосредственно следует, что теорема А не усиляема и потому требование линейности оператора G в теореме Б (и теореме А. Гротендика) существенно.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Для построения искомой системы $\{\varphi_n(x)\}$ нам понадобятся некоторые вспомогательные системы функций.

Пусть $N = 2^{2q} > 100$ (q — целое число). Определим систему функций $\{f_j^N(x)\}_{j=1}^N$ на отрезке $[0, 1 - N^{-1/2}]$, положив при $x \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, N - \sqrt{N}$:

$$f_j^N(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant 2\sqrt{N}, \quad N - 2\sqrt{N} \leqslant j \leqslant N, \\ \sqrt{N}/(i-j) & \text{при } 2\sqrt{N} < j < N - 2\sqrt{N}, \quad i \neq j \text{ и } |i-j| < \sqrt{N}, \\ 0 & \text{при } 2\sqrt{N} < j < N - 2\sqrt{N}, \quad i = j \text{ или } |i-j| \geqslant \sqrt{N}. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим некоторые свойства системы $\{f_j^N(x)\}$. Из равенства (3) непосредственно вытекает, что

$$\int_0^{1-N^{-1/2}} f_j^N(x) \, dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

$$\mu \left\{ x \in [0, 1]: \sum_{j=1}^N f_j^N(x) \neq 0 \right\} < \frac{10}{\sqrt{N}}. \tag{5}$$

Несложно проверить, что

$$\mu \left\{ x \in [0, 1]: \sup_{1 \leqslant r \leqslant N} \left| \sum_{j=1}^r \frac{1}{\sqrt{N}} f_j^N(x) \right| \geqslant \frac{1}{4} \ln N \right\} \geqslant 1 - \frac{10}{\sqrt{N}}. \tag{6}$$

Хорошо известно (см., например, [5]), что система $\{f_j^N(x)\}$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} c_j f_j^N(x)\right\|_{L^2(0,\,1)} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{N} c_j^2\right)^{1/2},$$

где постоянная C не зависит от N.

Из этой оценки и теоремы И. Шура (см. [2, с. 84]) следует, что можно доопределить функции $f_j^N(x)$ на отрезке $[1-N^{-1/2},\ 1]$ так, чтобы

$$\int_0^1 f_i^N(x) f_j^N(x)\,dx = \begin{cases} B & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j\end{cases} \tag{7}$$

(постоянная B не зависит от N).

Кроме того, легко видеть, что доопределение можно провести так, чтобы

а)

$$\int_0^1 f_j^N(x)\,dx = 0 \text{ при } j=1,\ 2,\ldots,N; \tag{8}$$

б) функции $f_j^N(x)$ были кусочно постоянны на отрезке $[0,\ 1]$ с интервалом постоянства длины $(2N)^{-2}$.

Определим на прямой $-\infty < x < +\infty$ еще одну систему функций $\{g_j^N(x)\}_{j=1}^N$, положив сначала при $x\in[0,\ 1]$ и $j=1,\ 2,\ldots,N$

$$g_j^N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{B}\,\log_2 N}\, 2^{k/2} f_j^N\left(2^k\left(x-\dfrac{1}{2^k}\right)\right) \quad \text{при}\\ 2^{-k} < x \leqslant 2^{-(k-1)}, \qquad 1\leqslant k\leqslant (\log_2 N)^2;\\ 0 \quad \text{при } 0< x\leqslant 2^{-(\log_2 N)^2}, \end{cases} \tag{9}$$

затем положив $g_j^N(x+r) = g_j^N(x)$, если число r целое.

Имеем (см. (7), (9)) при $j=1,\ 2,\ldots,N$

$$\text{а) } \int_0^1 g_j^N(x)\,dx = 0;$$

$$\text{б) } \int_0^1 g_i^N(x)\, g_j^N(x)\,dx = 0 \qquad \text{при } i\neq j; \tag{10}$$

$$\text{в) } \int_0^1 (g_j^N(x))^2\,dx = \sum_{k=1}^{\log_2^2 N} (\log_2 N)^{-2} = 1.$$

Из формул (7) и (9) следует также, что при $k=1,\ 2,\ldots,(\log_2^2 N$

$$\int_{(2^{-k},\ 2^{-k+1}]} \left(\sum_{j=1}^{N} c_j g_j^N(x)\right)^2 dx \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} c_j^2\right)(\log_2 N)^{-2}. \tag{11}$$

Кроме того, если положить

$$g_0^N(x) = \sup_{1\leqslant r\leqslant N}\left|\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{N^{1/2}}\, g_j^N(x)\right|,$$

то, используя (6), легко убедиться, что для любого множества $A \subset (2^{-k}, 2^{-k+1}]$ с мерой $|A| \leqslant 2^{-(k+1)}$ интеграл [2]

$$\int\limits_{(2^{-k},\,2^{-k+1}]-A} (g_0^N(x))^2\,dx \geqslant C > 0 \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant \log_2^2 N \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\left(\int\limits_0^1 (g_0^N(x))^2\,dx\right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{\log_2^2 N} \int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} (g_0^N(x))^2\,dx\right)^{1/2} \geqslant C \log_2 N. \tag{12'}$$

Докажем еще одно свойство системы функций $\{g_j^N(x)\}$.

Лемма 1. *Для любых чисел $N = 2^{2^q}$, $y > 0$ и любой последовательности $a = \{a_j\}_{j=1}^N$* мера

$$\mu\left\{x \in [0,\ 1] : g_a(x) \equiv \sup_{1\leqslant r\leqslant N} \left|\sum_{j=1}^r a_j g_j^N(x)\right| \geqslant y\right\} \leqslant \frac{C}{y^2}\left(\sum_{j=1}^N a_j^2\right) + \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

Доказательство. Пусть набор отрезков Δ_{ik} с $1 \leqslant i \leqslant N - \sqrt{N}$, $1 \leqslant k \leqslant (\log_2 N)^2$ определяется так:

$$\Delta_{ik} = \left(\frac{1}{2^k} + \frac{i-1}{2^k N},\ \frac{1}{2^k} + \frac{i}{2^k N}\right].$$

Тогда

$$[0,\ 1] = \bigcup_{k,\,i} \Delta_{ik} + E, \qquad \mu E \leqslant \frac{2}{\sqrt{N}}. \tag{13}$$

Положим при $x \in [0,\ 1]$

$$F_a(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{B}\log_2 N} \sup_{1\leqslant r\leqslant N} \left|\sum_{j=1}^r a_j f_j^N(x)\right|.$$

В силу (7) и известной леммы Меньшова—Радемахера (см. [2, с. 188])

$$\int\limits_0^1 (F_a(x))^2\,dx \leqslant C \sum_{j=1}^N a_j^2. \tag{14}$$

Из определения функций $\{g_j^N(x)\}_{j=1}^N$ (см. (9)) следует, что при $x \in \Delta_{ik}$

$$g_j^N(x) = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{B}\log_2 N} f_j\left(\frac{i - 1/2}{N}\right)$$

и поэтому при $x \in \Delta_{ik}$

$$g_a(x) = 2^{k/2} F_a\left(\frac{i - 1/2}{N}\right).$$

Следовательно, для всякого фиксированного i мера

$$\mu\left\{x : x \in \bigcup_{1\leqslant k\leqslant \log_2^2 N} \Delta_{ik},\quad g_a(x) \geqslant y\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k:\,2^{k/2}F_a\left(\frac{i-1/2}{N}\right)\geqslant y} \frac{1}{N\cdot 2^k} \leqslant \frac{2}{N}\,\frac{F_a^2\left(\frac{i-1/2}{N}\right)}{y^2}. \tag{15}$$

[2] Через C, C', c в дальнейшем обозначаются, вообще говоря, различные абсолютные положительные постоянные.

Из оценки (14) следует, что

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F_a^2\left(\frac{i-1/2}{N}\right) \leqslant C \sum_{j=1}^{N} a_j^2,$$

поэтому, просуммировав неравенства (15) по всем $i\,(1 \leqslant i \leqslant N-\sqrt{N})$, получим

$$\mu\left\{x : x \in \bigcup_{k,i} \Delta_{ik},\ g_a(x) > y\right\} \leqslant \frac{C}{y^2}\sum_{j=1}^{N} a_j^2,$$

что вместе с (13) доказывает лемму 1.

Построим теперь ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет теореме 3. Для этого возьмем последовательность натуральных чисел $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $s_1 = 0$, числа $N_k = s_{k+1} - s_k\,(k=1,\ 2,\ \ldots)$ представимы в виде $N_k = 2^{2^q}\,(q > 10$ — целое) и при каждом k

$$N_k^3 \cdot 2^{(\log_2 N_k)^2} < N_{k+1}. \tag{16}$$

Затем при $x \in [0,\ 1]$ и $s_k < n \leqslant s_{k+1}$ положим

$$\varphi_n(x) = g_{n-s_k}^{N_k}(N_k x). \tag{17}$$

В силу пункта а) формулы (10) интеграл

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0.$$

Кроме того (см. (16), (17), (8), (9)), при $s_k < n \leqslant s_{k+1}$ функции $\varphi_n(x)$ кусочно постоянны с интервалом постоянства длины

$$\frac{1}{N_k}\,\frac{1}{N_k^2}\,2^{-(\log_2 N_k)^2},$$

в то время как период функции $\varphi_n(x)$ с $s_{k+1} < n \leqslant s_{k+2}$ равен N_{k+1}^{-1}. Из сказанного следует (учитывая (16), см. также (10), пункт б)), что функции $\{\varphi_n(x)\}$ образуют ортонормированную систему на отрезке $[0,\ 1]$.

Докажем, что система $\{\varphi_n(x)\}$ является системой сходимости. В самом деле, пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{18}$$

Легко видеть, что последовательность $S_{s_k}(x)$, где

$$S_{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{s_k} a_n \varphi_n(x), \qquad k = 2,\ 3,\ \ldots,$$

сходится почти всюду. Поэтому нам достаточно показать, что для любого $y > 0$ сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left\{x : \sup_{s_k < r \leqslant s_{k+1}} \left|\sum_{n=s_k+1}^{r} a_n \varphi_n(x)\right| > y\right\} < \infty. \tag{19}$$

Но в силу (17) и леммы 1

$$\mu\left\{x : \sup_{s_k < r \leqslant s_{k+1}} \left|\sum_{n=s_k+1}^{r} a_n \varphi_n(x)\right| > y\right\} \leqslant \frac{C}{y^2}\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} a_n^2 + \frac{C}{N_k^{1/2}}. \tag{20}$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} N_k^{-1/2} < \infty$ (см. (16)) и по предположению

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} a_n^2\right) < \infty,$$

то из неравенства (20) следует нужная нам оценка (19).

Для завершения доказательства теоремы 3 нам нужно для всякого множества E (которое можно считать замкнутым) с $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$ определить ряд вида (18) такой, что

$$\int_E \left(\sup_{1\leqslant r<\infty}\left|\sum_{n=1}^{r} a_n\varphi_n(x)\right|\right)^2 dx = \infty. \tag{21}$$

Для данного числа $m > 10$ найдем такой конечный набор непересекающихся отрезков $\{I_l\}_{l=1}^{p}$ с двоично-рациональными концами, что

$$E \subset \bigcup_{l=1}^{p} I_l \quad \text{и} \quad \mu E\left(1 + \frac{1}{m}\right) > \sum_{l=1}^{p} \mu I_l.$$

При $k = 1, 2, \ldots$ и $\nu = 1, 2, \ldots, (\log_2 N_k)^2$ определим множество

$$J_{k,\nu} = \bigcup_{m=1}^{N_k}\left(\frac{m-1}{N_k} + \frac{1}{2^{\nu} N_k},\ \frac{m-1}{N_k} + \frac{1}{2^{\nu-1} N_k}\right]. \tag{22}$$

Ясно, что мера

$$\mu J_{k\nu} = 2^{-\nu}. \tag{23}$$

Легко видеть, что при $\nu = 1, 2, \ldots, [{}^1/_2 \log_2 m]$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mu(J_{k\nu} \cap E) \geqslant {}^2/_3 \mu J_{k\nu}\cdot \mu E.$$

Используя эту оценку, неравенство (12) и определение функций $\varphi_n(x)$ (см. (17)), несложно получить, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_{J_{k,\nu}\cap E} \sup_{s_k<r\leqslant s_{k+1}}\left(\sum_{n=s_k+1}^{r} \frac{1}{N_k^{1/2}}\varphi_n(x)\right)^2 dx \geqslant C(E) > 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, [{}^1/_2 \log_2 m].$$

Складывая последние неравенства по ν $(1 \leqslant \nu \leqslant [{}^1/_2 \log_2 m])$, получаем, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E \sup_{s_k<r\leqslant s_{k+1}}\left(\sum_{n=s_k+1}^{r} \frac{1}{N_k^{1/2}}\varphi_n(x)\right)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{[{}^1/_2\log_2 m]} \int_{E\cap J_{k,\nu}} \sup_{s_k<r\leqslant s_{k+1}}\left(\sum_{n=s_k+1}^{r} \frac{1}{N_k^{1/2}}\varphi_n(x)\right)^2 dx \geqslant C(E)\log_2 m. \tag{24}$$

Так как число m в неравенстве (24) можно взять как угодно большим, то из (24) следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E \sup_{s_k<r\leqslant s_{k+1}}\left(\sum_{n=s_k+1}^{r} \frac{1}{N_k^{1/2}}\varphi_n(x)\right)^2 dx = \infty.$$

Используя последнее равенство, не составляет труда определить числа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялось соотношение (21). Теорема 3 доказана.

Отметим в заключение одно неравенство, которым мы воспользуемся в § 2. Из оценки (11), равенства (17) и определения множеств $J_{k,\nu}$ следует, что при $\nu = 1, 2, \ldots, (\log_2 N_k)^2$

$$\int\limits_{J_{k,\nu}} \left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} c_n \varphi_n(x) \right)^2 dx \leqslant \log_2^{-2} N_k \sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} c_n^2. \tag{25}$$

§ 2. Докажем сначала теорему 1, сформулированную в начале работы. Отметим, что приводимое доказательство имеет много общего с доказательством теоремы 1 из работы автора [5]. Нам потребуется ряд лемм.

Лемма 2 (см., например, [15, с. 36]). *Пусть множества E_k с $E_k \subset [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$, независимы и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k = \infty.$$

Тогда, если обозначить

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \text{ то } \mu \overline{\lim_{k\to\infty}} E_k = 1.$$

Лемма 3 (см. [1, с 347]). *Существуют абсолютные постоянные $0 < C_1 < 1$, $0 < C_2 < 1$ такие, что для любого полинома по системе Радемахера $P(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k r_k(x)$ мера*

$$\mu \left\{ x \in [0, 1] : |P(x)| \geqslant C_1 \left(\int\limits_0^1 P^2(x)\, dx \right)^{1/2} \right\} \geqslant C_2.$$

Пусть далее

$$P'(x) = u(x) + Q(x),$$

где $Q(x) = \sum_{k=p}^{p'} c_k r_k(x)$, а $u(x)$ — некоторая функция из системы Уолша с $u(x) \not\equiv 1$ и

$$u(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (r_i)^{\varepsilon_i} \quad (\varepsilon_i = 0, 1;\ i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Тогда мера

$$\mu \left\{ x \in [0, 1] : |P'(x)| \geqslant C_1 \left(\int\limits_0^1 (P'(x))^2\, dx \right)^{1/2} \right\} \geqslant C_2. \tag{26}$$

В самом деле, оценка (26) легко следует из леммы 3 и того факта, что существует такое сохраняющее меру преобразование $\tau(x)$ отрезка $[0, 1]$, что

$$u(\tau(x)) = r_1(x), \qquad r_k(\tau(x)) = r_k(x) \qquad \text{при } k \geqslant p.$$

Лемма 4 (см. [1, с, 347]). *Пусть $C \geqslant 1$. Для любой функции $f(x)$ такой, что*

$$\int\limits_0^1 |f(x)|\, dx \geqslant 1, \qquad \left(\int\limits_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \leqslant C,$$

справедлива оценка

$$\mu \left\{ x : |f(x)| \geqslant \frac{1}{4} \right\} \geqslant \frac{1}{8C^2}.$$

Определим при каждом $N \geqslant 10$ ортонормированную матрицу $A_N = \{a_{ji}\}_{i,j=1}^{N}$ следующим образом:

$$a_{ji} = \begin{cases} 1-(N-1)^{-1} & \text{при } i=j<N, \\ 0 & \text{при } i=j=N, \\ -(N-1)^{-1} & \text{при } i\neq j, \quad i,\ j<N, \\ (N-1)^{-1/2} & \text{при } i=N \quad \text{или } j=N, \quad i\neq j. \end{cases} \tag{27}$$

Матрицы A_N применялись впервые А. М. Олевским в работе [9] для преобразования не ограниченных в совокупности ортонормированных систем с сохранением их основных свойств в ограниченные системы.

Нам потребуются некоторые новые свойства системы $\{f_j^N(x)\}_{j=1}^N$, которая была определена в § 1.

Во-первых, непосредственным подсчетом легко проверить, что при $2\sqrt{N} < j < k < N - 2\sqrt{N}$

$$\int_{j/N}^{1-N^{-1/2}} f_j^N(x)\,dx = \int_{k/N}^{1-N^{-1/2}} f_k^N(x)\,dx \geqslant C\frac{\log_2 N}{N^{1/2}}. \tag{28}$$

Лемма 5. *Пусть дан набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$ и пусть*

$$\frac{1}{N^{1/2}}\left|\sum_{j=1}^N a_j\right| \geqslant \gamma\left(\sum_{j=1}^N a_j^2\right)^{1/2}, \tag{29}$$

тогда при $N > N(\gamma)$

$$\mu\left\{x \in [0,\ 1-N^{-1/2}]: \left|\sum_{j=1}^{M(x)} a_j f_j^N(x)\right| \geqslant C_\gamma \log_2 N \cdot \left(\sum_{j=1}^N a_j^2\right)^{1/2}\right\} \geqslant C'_\gamma,$$

где постоянные C_γ, C'_γ, N_γ зависят только от числа γ, а

$$M(x) = i \quad \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N - \sqrt{N}.$$

Доказательство. Используя (29) и определение функций $M(x)$ и $f_j^N(x)$ (см. (3)), имеем

$$\int_0^{1-N^{-1/2}} \left|\sum_{j=1}^{M(x)} a_j f_j^N(x)\right| dx \geqslant \left|\int_0^{1-N^{-1/2}} \sum_{j=1}^{M(x)} a_j f_j^N(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=2\sqrt{N}+1}^{N-2\sqrt{N}-1} a_j \int_{j/N}^{1-N^{-1/2}} f_j^N(x)\,dx\right| \geqslant C\left|\sum_{j=2\sqrt{N}+1}^{N-2\sqrt{N}-1} a_j\right| \frac{\log_2 N}{N}. \tag{30}$$

Так как по неравенству Коши

$$\left|\sum_{j=1}^{2\sqrt{N}} a_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{2\sqrt{N}} a_j^2\right)^{1/2} (2\sqrt{N})^{1/2} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} (2\sqrt{N})^{1/2}$$

и аналогично

$$\left|\sum_{j=N-2\sqrt{N}}^{N} a_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} (2\sqrt{N})^{1/2},$$

то (см. (29))

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left|\sum_{j=2\sqrt{N}+1}^{N-2\sqrt{N}-1} a_j\right| \geqslant \left|\sum_{j=1}^{N} a_j\right| \frac{1}{\sqrt{N}} - 4N^{-1/4}\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant (\gamma - 4N^{-1/4})\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} \quad \text{при } N > N_\gamma.$$

Следовательно, из оценки (30) вытекает, что при $N > N_\gamma$

$$\int_0^{1-N^{-1/2}} \left|\sum_{j=1}^{M(x)} a_j f_j^N(x)\right| dx \geqslant C\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} \log_2 N. \tag{31}$$

Так как функции $\left\{\frac{1}{B^{1/2}} f_j^N(x)\right\}_{j=1}^N$ (B — абсолютная постоянная) ортонормированны на отрезке $[0, 1]$ (см. (7)), то можно воспользоваться известной леммой Меньшова—Радемахера (см. [2, с. 188]) и получить, что

$$\left(\int_0^{1-N^{-1/2}} \left(\sum_{j=1}^{M(x)} a_j f_j^N(x)\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} \log_2 N. \tag{32}$$

Применяя теперь лемму 4 к функции

$$f(x) = \left|\sum_{j=1}^{M(x)} a_j f_j^N(x)\right| \left[C\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2} \log_2 N\right]^{-1},$$

получим благодаря оценкам (31) и (32) утверждение леммы 5.

Пусть C_γ и C'_γ — постоянные из леммы 5, $k=1, 2, \ldots, 1 \leqslant \nu \leqslant \log_2^2 N_k$. Определим множество

$$E(k, \nu, \{a_n\}) \equiv \left\{x : x \in J_{k,\nu}, \sup_{s_k < r \leqslant s_{k+1}} \left|\sum_{n=s_k+1}^{r} a_n \varphi_n(x)\right| \geqslant C_\gamma 2^{\nu/2}\left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} a_n^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Из леммы 5, определения функций $\{g_j^N(x)\}_{j=1}^N$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ (см. (9), (17), (22)) получаем при $k=1, 2, \ldots$ и

$$\frac{1}{N_k^{1/2}}\left|\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} a_n\right| \geqslant \gamma\left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} a_n^2\right)^{1/2}, \tag{33}$$

что мера

$$\mu E(k, \nu, \{a_n\}) \geqslant C'_\gamma \mu J_{k,\nu}. \tag{34}$$

Отметим, что так как функции $\varphi_n(x)$, $s_k < n \leqslant s_{k+1}$, имеют период N_k^{-1} и постоянны на интервалах вида

$$\left(\frac{p-1}{N_{k+1}}, \frac{p}{N_{k+1}}\right), \quad 1 \leqslant p \leqslant N_{k+1}$$

(см. (16), (17)), то

а) множество $E(k, \nu, \{a_n\})$ периодично на отрезке $[0, 1]$ с периодом N_k^{-1};

б) $$E(k, \nu, \{a_n\}) = \bigcup_{i=1}^{i_0}\left(\frac{p_i - 1}{N_{k+1}}, \frac{p_i}{N_{k+1}}\right), \quad 1 < p_1 < \ldots < p_{i_0} \leqslant N_{k+1}. \tag{35}$$

Перейдем к построению искомой системы $\{\psi_n(x)\}$. Прежде всего продолжим систему $\{\varphi_n(x)\}$ (определенную в § 1 на отрезке $[0, 1]$) на отрезок $[0, 2]$, положив

$$\varphi_n(x)=r_n(x),\quad x\in[1, 2],\quad n=1, 2, \ldots, \tag{36}$$

где $r_n(x)$, как и прежде, система Радемахера, продолженная с периодом 1 с отрезка $[0, 1]$ на всю ось. Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Уолша—Пэли ($u_k(x)=u_k(x+1)$). Известно (см. [16]), что система $\{u_k(x)\}$ — система сходимости. Удалим из системы $\{u_k(x)\}$ функции Радемахера $r_n(x)$ $(1\leqslant n<\infty)$, занумеруем подряд оставшиеся функции и обозначим полученную систему через $\{u'_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Ясно, что $\{u'_k(x)\}$, так же как и система Уолша—Пэли, — система сходимости.

Далее, из теоремы 2, которая была сформулирована во введении (доказательство теоремы 2 см. в конце статьи), сразу следует, что существует такая ортонормированная система сходимости $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x\in[0, 1])$, что система $\{\varphi_n(x)\}\cup\{y_k(x)\}$ образует полную ОНС на отрезке $[0, 1]$.

Сейчас мы, используя функции $\{y_k(x)\}$ и $\{u'_k(x)\}$, пополним специальным образом систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x\in[0, 2])$. Для этого мы добавим к функциям $\varphi_n(x)$ функции $v_k(x)$, $1\leqslant k<\infty$, которые при $j=1, 2, \ldots$ определяются так:

$$v_{3j}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi_j(x), & x\in[0, 1],\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}r_j(x), & x\in(1, 2],\end{cases}\qquad v_{3j-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_j(x), & x\in[0, 1],\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}u'_j(x), & x\in(1, 2],\end{cases}$$

$$v_{3j-2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_j(x), & x\in[0, 1],\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}u'_j(x), & x\in(1, 2].\end{cases}$$

Легко видеть, что функции $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\cup\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированную полную в пространстве $L^2(0, 1)$ систему. Определим, наконец, искомую систему функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ [3]. Пусть последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(N_k=s_{k+1}-s_k)$ те же, что и в § 1 (см. (16)), и положим

$$Q_1=0,\qquad Q_{k+1}=Q_k+N_k+1,\qquad k=1, 2, \ldots$$

Функции $\psi_n(x)$ с $Q_k<n\leqslant Q_{k+1}$ определим следующим образом: рассмотрим матрицу $A_{N_k+1}=\{a_{ji}\}$ (см. (27)) и положим при $x\in[0, 2]$ и $n=Q_k+q$ $(1\leqslant q\leqslant N_k+1)$

$$\psi_n(x)=\sum_{r=1}^{N_k}a_{qr}\varphi_{s_k+r}(x)+a_{q,N_k+1}v_k(x). \tag{37}$$

Построенная система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную ОНС на отрезке $[0, 2]$, так как матрицы A_{N_k+1} ортонормированны и все функции $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ можно выразить через функции $\{\psi_n(x)\}$.

Используя вид матриц A_{N_k+1} (см. (27)) и то, что системы $\varphi_n(x)$ и $v_k(x)$ являются системами сходимости, легко показать, что система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ также

[3] Мы определим систему $\{\psi_n(x)\}$ на отрезке $[0, 2]$, ее можно затем перенести преобразованием подобия на отрезок $[0, 1]$.

является системой сходимости. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что любой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty, \tag{38}$$

расходится на множестве положительной меры.

Фиксируем ряд вида (38) и положим при $k=1, 2, \ldots$

$$\beta_k = \left(\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n^2\right)^{1/2}, \qquad d_k = \frac{1}{(N_k+1)^{1/2}} \left|\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\right|.$$

По неравенству Коши $\beta_k \geqslant d_k$. Пусть абсолютная постоянная $C_0 = C_1 C_2^{1/2}(1/20)$, где C_1, C_2 — постоянные из леммы 3.

Разобьем все натуральные числа $k \geqslant 1$ на две группы. В первую группу S_1 отнесем те числа k, для которых

$$C_0 \beta_k \leqslant d_k. \tag{39}$$

Остальные числа k отнесем к группе S_2.

Покажем прежде всего, что если

$$\overline{\lim_{k\to\infty,\, k\in S_1}} \beta_k > 0, \tag{40}$$

то ряд (38) не сходится по мере на отрезке [1, 2].

В самом деле, из свойств матрицы $A_{N_{k+1}}$ и равенства (37) вытекает, что

$$\left|\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n \psi_n(x) - \frac{1}{(N_k+1)^{1/2}} \left(\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\right) v_k(x) - P(x)\right| \leqslant \frac{C\beta_k}{(N_k+1)^{1/2}}, \tag{41}$$

где при $x \in [1, 2]$, $P(x) = \sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} \alpha_n r_n(x)$ — полином по системе Радемахера, а

$$v(x) = r_{n_1}(x) \cdot r_{n_2}(x) \cdot \ldots \cdot r_{n_j}(x)$$

— некоторая функция из системы Уолша, при этом из построения системы $\{\psi_n(x)\}$ ясно, что при достаточно больших k число $n_j < s_k$.

Следовательно, в силу (26)

$$\mu\left\{x \in [1, 2] : \left|\frac{1}{(N_k+1)^{1/2}} \left(\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\right) \cdot v_k(x) - P(x)\right| > C_1 d_k\right\} \geqslant C_2. \tag{42}$$

Так как при $k \in S_1$ $C_0\beta_k \leqslant d_k$, то из оценок (41) и (42) при достаточно больших k $(k \in S_1)$ имеем

$$\mu\left\{x \in [1, 2] : \left|\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n \psi_n(x)\right| \geqslant C\beta_k\right\} \geqslant C'.$$

Из последнего неравенства непосредственно вытекает расходимость ряда (38) при условии (40). Поэтому нам достаточно теперь доказать расходимость ряда (38) при условии

$$\lim_{k\to\infty,\, k\in S_1} \beta_k = 0. \tag{43}$$

Для данного ряда вида (38) возможны два случая:

$$1)\ \sum_{k\in S_1}\beta_k^2=\infty,\qquad 2)\ \sum_{k\in S_1}\beta_k^2<\infty.$$

Пусть выполнен случай 1). Тогда если положить

$$S_1'=\{k: k\in S_1,\ \beta_k\geqslant 1/k\},$$

то

$$\sum_{k\in S_1'}\beta_k^2=\infty. \tag{44}$$

Пусть при $k\in S_1'$

$$H_k(x)=\frac{v_k(x)}{N_k^{1/2}}\left|\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}-1}c_n\right|,\qquad \tilde H_k(x)=\frac{v_k(x)}{N_k^{1/2}}\sup_{Q_k<r\leqslant Q_{k+1}}\left|\sum_{n=Q_k+1}^{r}c_n\right|.$$

Так как при $k\in S_1'$

$$\frac{1}{N_k^{1/2}}\sup_{Q_k<r\leqslant Q_{k+1}}\left|\sum_{n=Q_k+1}^{r}c_n\right|\leqslant\frac{1}{N_k^{1/2}}\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}}|c_n|\leqslant 2\beta_k\leqslant\frac{2d_k}{C_0}\leqslant C\frac{1}{N_k^{1/2}}\left|\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}}c_n\right|,$$

то

$$|H_k(x)|\leqslant|\tilde H_k(x)|\leqslant C|H_k(x)|. \tag{45}$$

Возьмем число ν_k $(k\in S_1')$ так, чтобы

$$\sqrt{2^{\nu_k-1}}\leqslant\frac{1}{\beta_k}\leqslant\sqrt{2^{\nu_k}}. \tag{46}$$

В силу (44)

$$\lim_{k\to\infty,\ k\in S_1'}\nu_k=\infty.$$

Кроме того, так как $\beta_k\geqslant 1/k$ при $k\in S_1'$, то

$$\nu_k\leqslant C\log_2 k\leqslant\log_2 N_k\qquad\text{при } k\geqslant k_0.$$

Следовательно, можно рассмотреть множество J_{k,ν_k} (множества $J_{k,\nu}$ определены равенством (22) при $k=1, 2, \ldots, 1\leqslant\nu\leqslant\log_2^2 N_k$).

Пусть существует такое число $y>0$, что

$$\mu\left[\overline{\lim_{k\to\infty,\ k\in S_1'}}\{x\in J_{k,\nu_k}: |H_k(x)|>y\}\right]>0. \tag{47}$$

Покажем, что в этом случае последовательность частных сумм $\sum_{n=1}^{Q_k-1}c_n\psi_n(x)$ расходится на множестве положительной меры.

Положим далее при $k=1, 2, \ldots, 1\leqslant m\leqslant N_k+1=Q_{k+1}-Q_k$

$$\alpha_m^k=c_{Q_k+m}. \tag{48}$$

Используя свойства матрицы A_{N_k+1} (см. (27)), имеем

$$\sum_{m=1}^{N_k}\alpha_m^k\psi_{m+Q_k}(x)=\sum_{m=1}^{N_k}\alpha_m^k\varphi_{m+s_k}(x)+H_k(x)+\Delta_k(x), \tag{49}$$

где

$$|\Delta_k(x)|\leqslant\left|\frac{C}{N_k}\left(\sum_{m=1}^{N_k}\alpha_m^k\right)\sum_{m=1}^{N_k}\varphi_{m+s_k}(x)\right|\leqslant C\frac{1}{\sqrt{N_k}}\left(\sum_{m=1}^{N_k}|\alpha_m^k|\right)\left|\sum_{m=1}^{N_k}\frac{1}{\sqrt{N_k}}\varphi_{m+s_k}(x)\right|.$$

В силу оценки (25) и того, что $\lim\limits_{k\in S_1,\ k\to\infty} \beta_k = 0$ (см. (43)), имеем

$$\sum_{k\in S_1'} \int\limits_{J_{k\nu}} |\Delta_k(x)|\,dx + \int\limits_{J_{k\nu}} \left|\sum_{m=1}^{N_k} \alpha_m^k \varphi_{m+s_k}(x)\right| dx \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} (\log_2 N_k)^{-1} < \infty .$$

Поэтому для любого $y > 0$ мера

$$\mu\left[\overline{\lim_{k\in S_1'}} \left\{x\colon \left|\sum_{m=1}^{N_k} \alpha_m^k \varphi_{m+s_k}(x) + \Delta_k(x)\right| > \frac{y}{2},\ x \in J_{k,\nu_k}\right\}\right] = 0. \tag{50}$$

Из формул (49) и (50) (см. также (47)) вытекает расходимость ряда (38) в случае 1) при условии, что выполнено неравенство (47). Если же выполнен случай 1), но при любом $y > 0$

$$\mu\,[\overline{\lim_{k\to\infty,\ k\in S_1'}} \{x \in J_{k,\nu_k}\colon |H_k(x)| > y\}] = 0, \tag{51}$$

то опять же из определения матриц $A_{N_{k+1}}$ следует, что

$$\sup_{1\leqslant r\leqslant N_k} \left|\sum_{m=1}^{r} \alpha_m^k \psi_{Q_k+m}(x)\right| = \sup_{1\leqslant r\leqslant N_k} \left|\sum_{m=1}^{r} \alpha_m^k \varphi_{s_k+m}(x)\right| + \Delta_k'(x),$$

где

$$|\Delta_k'(x)| \leqslant |\tilde H_k(x)| + C\left(\sum_{m=1}^{N_k} |\alpha_m^k|\right) \frac{1}{N_k^{1/2}} \left|\sum_{n=s_k}^{s_{k+1}-1} \frac{1}{N_k^{1/2}} \varphi_n(x)\right| \equiv |\tilde H_k(x)| + F_k(x). \tag{52}$$

Пользуясь оценкой (25) и тем, что в силу (43), (48)

$$\frac{1}{N_k^{1/2}} \sum_{m=1}^{N_k} |\alpha_m^k| \leqslant \beta_k \leqslant 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0,$$

получаем

$$\sum_{k\in S_1'} \int\limits_{J_{k,\nu_k}} |F_k(x)|\,dx \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} (\log_2 N_k)^{-1} < \infty. \tag{53}$$

Кроме того, в силу (45) $|\tilde H_k(x)| \leqslant C\,|H_k(x)|$ и из оценок (53) и (47) вытекает (см. (52)), что при любом $y > 0$

$$\mu\,[\overline{\lim_{k\to\infty,\ k\in S_1'}} \{x : |\Delta_k'(x)| > y\}] = 0. \tag{54}$$

Далее, при $k \in S_1$ из (34) (см. также (33)) следует, что

$$\mu\left\{x \in J_{k,\nu_k} : \sup_{1\leqslant r\leqslant N_k} \left|\sum_{m=1}^{r} \alpha_m^k \varphi_{s_k+m}(x)\right| \geqslant C \cdot 2^{\nu/2}\beta_k\right\} \geqslant C\mu J_{k,\nu_k}.$$

Поэтому, учитывая (46), (23) и (48), получаем

$$\mu G_k \equiv \mu\left\{x \in J_{k,\nu_k} : \sup_{1\leqslant r\leqslant N_k} \left|\sum_{m=1}^{r} \alpha_m^k \varphi_{s_k+m}(x)\right| > C\right\} \geqslant C\beta_k^2. \tag{55}$$

Но так как множества G_k независимы (см. (35)) и (в силу (55) и (44))

$$\sum_{k\in S_1'} \mu G_k \geqslant C \sum_{k\in S_1'} \beta_k^2 = \infty,$$

то из леммы 2 и оценки (55) получаем при некотором $y > 0$

$$\mu\left[\overline{\lim_{k\to\infty,\ k\in S_1'}} \left\{x : \sup_{1\leqslant r\leqslant N_k} \left|\sum_{m=1}^{r} \alpha_m^k \varphi_{s_k+m}(x)\right| \geqslant y\right\}\right] > 0. \tag{56}$$

Из оценок (56), (54), (51) и равенства (49) имеем

$$\mu\left[\varlimsup_{k\to\infty,\, k\in S_1'}\left\{x:\sup_{Q_k<r<Q_{k+1}}\left|\sum_{n=Q_k+1}^{r} c_n\psi_n(x)\right|>\frac{y}{2}\right\}\right]>0.$$

Тем самым полностью доказана расходимость ряда (38) в случае 1).

Пусть выполнен случай 2), т. е. $\sum\limits_{k\in S_1}\beta_k^2<\infty$. В этом случае (см. (38))

$$\sum_{k\in S_2}\beta_k^2=\infty$$

и мы покажем, что ряд (38) не сходится по мере на отрезке [1, 2]. Отметим, что в случае 2) рассуждения будут совпадать с соответствующим местом нашей работы [5].

Возьмем число $k\in S_2$. В силу (37) и ортонормированности матриц A_{N_k+1} мы имеем

$$\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\psi_n(x)=\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}}\gamma_n\varphi_n(x)+\omega_k v_k(x), \tag{57}$$

$$\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}}\gamma_n^2+\omega_k^2=\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n^2.$$

При этом из определения матриц A_{N_k+1} (см. (27)) сразу следует, что

$$|\omega_k|\leqslant\frac{2}{(N_k+1)^{1/2}}\left|\sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\right|+\frac{2}{(N_k+1)^{1/2}}\max_{Q_k<n\leqslant Q_{k+1}}|c_n|\leqslant 2d_k+\frac{2}{(N_k+1)^{1/2}}\beta_k.$$

Из этих оценок и того, что при $k\in S_2$

$$2d_k\leqslant\frac{C_1\sqrt{C_2}}{10}\beta_k\leqslant\frac{1}{10}\beta_k,$$

при достаточно больших k ($k\in S_2$) мы имеем

$$\begin{aligned}&\text{а)}\qquad \sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}}\gamma_n^2\geqslant {}^1/_2\beta_k^2;\\ &\text{б)}\qquad \left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}}\gamma_n^2\right)\frac{C_1^2C_2}{20}\geqslant\frac{C_1^2C_2}{40}\beta_k^2\geqslant\left(2d_k+\frac{2\beta_k}{(N_k+1)^{1/2}}\right)^2\geqslant\omega_k^2.\end{aligned} \tag{58}$$

Возьмем последовательность целых чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что оценки (58) верны при $k\geqslant k_1$ ($k\in S_2$) и

$$\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}\beta_k^2=\sum_{n=Q_{k_j}+1}^{Q_{k_{j+1}}} c_n^2\geqslant j. \tag{59}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=Q_{k_j}+1}^{Q_{k_{j+1}}} c_n\psi_n(x)=I_j'(x)+I_j''(x), \tag{60}$$

где

$$I_j'(x)=\sum_{k\in S_1\cap[k_j,\,k_{j+1})}\ \sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\psi_n(x);$$

$$I_j''(x)=\sum_{k\in S_2\cap[k_j,\,k_{j+1})}\ \sum_{n=Q_k+1}^{Q_{k+1}} c_n\psi_n(x).$$

Так как $\sum_{k \in S_1} \beta_k^2 < \infty$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^2 (I_j'(x))^2\, dx \leqslant \sum_{k \in S_1} \beta_k^2 \leqslant C < \infty. \tag{61}$$

Далее (см. (57), (60))

$$I_j''(x) = \sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} \gamma_n \varphi_n(x) + \omega_k v_k(x) \right).$$

При этом в силу (58)

$$D_j \equiv \sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \left(\sum_{n=s_k+1}^{s_{k+1}} \gamma_n^2 \right) \geqslant \frac{j}{2}$$

и

$$D_j \geqslant \left(\frac{C_1^2 C_2}{20} \right)^{-1} \left(\sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \omega_k^2 \right).$$

В силу (36) при $x \in [1,\ 2]$ и $n = 1,\ 2, \ldots$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, r_n(x)$$

и поэтому сумма $I_j''(x)$ представима в виде

$$I_j''(x) = P_j(x) + \sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \omega_k v_k(x), \tag{62}$$

где $P_j(x)$ — полином по системе Радемахера с

$$\int_1^2 P_j^2(x)\, dx = {}^1/_2 D_j \geqslant {}^1/_4 j,$$

а

$$\sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \omega_k^2 \leqslant D_j \frac{C_1^2 C_2}{20}.$$

Так как функции $\{v_k(x)\}$ ортогональны и $\int_0^2 v_k^2(x)\, dx = 1$, то

$$\int_0^2 \left(\sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \omega_k v_k(x) \right)^2 dx = \sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \omega_k^2 \leqslant D_j \frac{C_1^2 C_2}{20}.$$

Следовательно, по неравенству Чебышева

$$\mu \left\{ x \in [1,\ 2] : \left| \sum_{k \in S_2 \cap [k_j,\, k_{j+1})} \omega_k v_k(x) \right| \geqslant D_j \frac{C_1}{3} \right\} \leqslant \frac{C_2}{2}. \tag{63}$$

В силу леммы 3 имеем (см. (62))

$$\mu \left\{ x \in [1,\ 2] : |P_j(x)| \geqslant \frac{\sqrt{D_j}}{2} C_1 \right\} \geqslant C_2. \tag{64}$$

Из оценок (63) и (64) следует (см. (62)), что

$$\mu \left\{ x \in [1,2] : |I_j''(x)| \geqslant \frac{\sqrt{D_j}\, C_1}{6} \geqslant \frac{\sqrt{j}\, C_1}{12} \right\} \geqslant \frac{C_2}{2}.$$

Из последнего неравенства (учитывая оценку (61) и (60)) вытекает, что ряд (38) в случае 2) не сходится по мере на отрезке [1, 2]. Теорема 1 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Пусть* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{N}$ — *ортонормированный набор функций на отрезке* $[0, 1]$. *Определим набор функций* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{N^2}$, *положив при* $k = Ni + j$ $(0 \leqslant i < N,\ 1 \leqslant j \leqslant N)$

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} f_j(x).$$

Тогда для любых чисел $\{a_k\}_{k=1}^{N^2}$ *справедлива оценка*

$$F(\{a_k\}) \equiv \int_0^1 \sup_{1 \leqslant n \leqslant N^2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x) \right)^2 dx \leqslant 4 \left(\sum_{k=1}^{N^2} a_k^2 \right).$$

Доказательство.

$$\sup_{1 \leqslant n \leqslant N^2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x) \right)^2 \leqslant 2 \sup_{0 < i < N} \left(\sum_{k=1}^{Ni} a_k \psi_k(x) \right)^2 + 2 \sup_{i,\,\nu:\, Ni < \nu \leqslant N(i+1)} \left(\sum_{k=Ni}^{\nu} a_k \psi_k(x) \right)^2.$$

Следовательно,

$$F(\{a_k\}) \leqslant 2 \int_0^1 \sup_{0 < i < N} \left(\sum_{k=1}^{Ni} a_k \psi_k(x) \right)^2 dx + 2 \int_0^1 \sup_{i,\,\nu:\, Ni < \nu \leqslant N(i+1)} \left(\sum_{k=Ni}^{\nu} a_k \psi_k(x) \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \left\| \sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} a_k \psi_k(x) \right\|_{L^2} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \sup_{\nu:\, Ni < \nu \leqslant N(i+1)} \left(\sum_{k=Ni+1}^{\nu} a_k \psi_k(x) \right)^2 dx.$$

При любом $i\,(0 \leqslant i \leqslant N-1)$ в силу ортогональности функций $f_j(x)$ получаем

$$\left\| \sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} a_k \psi_k(x) \right\|_{L^2} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} a_k^2 \right)^{1/2}$$

и, кроме того,

$$\int_0^1 \sup_{\nu:\, Ni < \nu \leqslant N(i+1)} \left(\sum_{k=Ni+1}^{\nu} a_k \psi_k(x) \right)^2 dx \leqslant \left(\sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} |a_k| \cdot \|\psi_k(x)\|_{L^2} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} \frac{|a_k|}{\sqrt{N}} \right)^2.$$

Поэтому

$$F(\{a_k\}) \leqslant 2 \left(\sum_{i=0}^{N-1} N^{-1/2} \left(\sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} a_k^2 \right)^{1/2} \right)^2 + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=Ni+1}^{N(i+1)} N^{-1/2} |a_k| \right)^2.$$

Используя неравенство Коши из последней оценки получаем

$$F(\{a_k\}) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N^2} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N^2} a_k^2 = 4 \left(\sum_{k=1}^{N^2} a_k^2 \right).$$

Лемма 6 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. В случае, когда многообразие L конечномерно, утверждение теоремы 2 очевидно, поэтому можно считать, что L имеет бесконечный ортонормированный базис $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, который нам нужно заменить на базис $\{\varphi_k(x)\}$, где $\{\varphi_k(x)\}$ — система сходимости. Известно (см. [12]), что из системы $f_k(x)$ можно выделить такую подсистему $u_k(x) = f_{n_k}(x)$, $k = 1, 2,$ что для любого набора чисел $\{a_k\} \in l_2$ и любой перестановки натурального ряда $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ функция

$$\sup_{1 \leqslant r < \infty} \left| \sum_{k=1}^{r} a_k u_{p_k}(x) \right| < \infty \text{ п. в.} \tag{65}$$

и, кроме того, этот выбор можно[4] произвести так, чтобы

$$\int_0^1 \sup_{1\leqslant r<\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} a_k u_k(x)\right)^2 dx \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \qquad (66)$$

Оставшиеся после удаления системы $\{u_k(x)\}$ в системе $\{f_k(x)\}$ функции занумеруем произвольным образом и обозначим полученный набор функций через $\{f'_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

В силу известной теоремы Марцинкевича (см. [10]), найдется последовательность целых чисел $\{m_s\}_{s=1}^{\infty}$ $(m_1=0)$ такая, что для любой последовательности $\{a_k\}\in l_2$

$$\int_0^1 \left(\sup_{1<s<\infty}\left|\sum_{k=1}^{m_s} a_k f'_k(x)\right|\right)^2 dx \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \qquad (67)$$

Построим теперь искомую систему $\varphi_k(x)$. Пусть $\{\nu_s\}_{s=1}^{\infty}$ — такая последовательность целых чисел, что

$$\nu_1=0, \qquad (\nu_{s+1}-\nu_s)=(m_{s+1}-m_s)^2+(m_{s+1}-m_s),$$

а $\{\mu_s\}_{s=1}^{\infty}$ — такая последовательность целых чисел, что

$$\mu_1=0, \quad \mu_{s+1}-\mu_s=(m_{s+1}-m_s)^2.$$

Для каждого $s=1, 2, \ldots$ определим функции $\varphi_k(x)$ с $\nu_s<k\leqslant\nu_{s+1}$ следующим образом: рассмотрим матрицу $A_{m_{s+1}-m_s+1}$ (см. (27)) и положим при $\nu_s<k\leqslant\nu_{s+1}$ и $k=\nu_s+j\,(m_{s+1}-m_s)+i$ $(0\leqslant j\leqslant m_{s+1}-m_s,\ 1\leqslant i\leqslant m_{s+1}-m_s)$

$$\varphi_k(x)=\sum_{r=1}^{m_{s+1}-m_s} a_{jr}u_{\mu_s+i(m_{s+1}-m_s)+r}(x)+a_{j,\,m_{s+1}-m_s+1}f'_{m_s+i}(x). \qquad (68)$$

Заметим, что из формулы (68) следует, что при $\nu_s<k\leqslant\nu_{s+1}$ функции $\varphi_k(x)$ будут являться линейными комбинациями функций $u_k(x)$ с $\mu_s<k\leqslant\mu_{s+1}$ и $f'_k(x)$ с $m_s<k\leqslant m_{s+1}$.

Из этого замечания и ортонормированности матриц A_N (см. (27)) следует, что система $\varphi_k(x)$ образует ортонормированный базис в L. Кроме того, из этого же замечания и оценок (65), (67) непосредственно следует, что для любого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2<\infty,$$

последовательность частных сумм $S_{\nu_s}(x)$ сходится почти всюду.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{s\to\infty} G_s(x, \{a_k\})\equiv\lim_{s\to\infty}\sup_{\nu_s<n\leqslant\nu_{s+1}}\left|\sum_{k=\nu_s+1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|=0 \text{ п. в.} \qquad (69)$$

В силу (68) и свойств матриц A_N (см. (27)) функция $\varphi_k(x)$ при $k=\nu_s+$ $+j\,(m_{s+1}-m_s)+i$ представима в виде

а) при $0\leqslant j<m_{s+1}-m_s$

$$\varphi_k(x)=(m_{s+1}-m_s)^{-1/2}f'_{m_s+i}(x)+u_{\mu_s+i(m_{s+1}-m_s)+j}(x)-$$
$$-(m_{s+1}-m_s)^{-1/2}\sum_{r=1}^{m_{s+1}-m_s}(m_{s+1}-m_s)^{-1/2}u_{\mu_s+i(m_{s+1}-m_s)+r}(x);$$

---

[4] Это следует, например, из цитируемой ниже теоремы Марцинкевича.

б) при $j = m_{s+1} - m_s$

$$\varphi_k(x) = (m_{s+1} - m_s)^{-1/2} \sum_{r=1}^{m_{s+1}-m_s} u_{\mu_s + i(m_{s+1}-m_s)+r}(x).$$

Из (65) и б) следует, что

$$\int_0^1 \sup_{\nu_s+(m_{s+1}-m_s)^2 < n \leqslant \nu_{s+1}} \left(\sum_{k=\nu_s+(m_{s+1}-m_s)^2+1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx \leqslant C \sum_{k=\nu_s+1}^{\nu_{s+1}} a_k^2. \tag{70}$$

Далее, учитывая тот факт, что функции

$$g_i(x) \equiv \sum_{r=1}^{m_{s+1}-m_s} (m_{s+1} - m_s)^{-1/2} u_{\mu_s + i(m_{s+1}-m_s)+r}(x)$$

$$(1 \leqslant i < m_{s+1} - m_s)$$

образуют ортонормированную систему, дважды пользуясь леммой 6, получаем

$$G_s(x, \{a_k\}) \leqslant \tilde{G}_s(x, \{a_k\}) + 2 \sup_{\nu_s < n \leqslant \nu_s + (m_{s+1}-m_s)^2} \left| \sum_{k=\nu_s}^{n} a_k u_{p_k}(x) \right|, \tag{71}$$

где $\tilde{G}_s(x, \{a_k\})$ — некоторая функция с условием

$$\int_0^1 \tilde{G}_s(x, \{a_k\})\, dx \leqslant C \sum_{k=\nu_s+1}^{\nu_{s+1}} a_k^2, \tag{72}$$

а числа p_k $(\nu_s < k \leqslant \nu_s + (m_{s+1} - m_s^2))$ образуют некоторую перестановку множества целых чисел r таких, что $\mu_s < r \leqslant \mu_{s+1}$.

Из оценок (71), (72) и (65) следует нужное нам равенство (69). Теорема 2 доказана.

Замечание. Если многообразие L содержит ортонормированную последовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\mu\{x \in [0, 1] : |f_{n_k}(x)| > \varepsilon_k\} < \varepsilon_k \text{ с } \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0,$$

то теорема 2 легко вытекает из леммы 6 и упомянутой ранее теоремы Марцинкевича.

В заключение сформулируем без доказательства два утверждения, последнее из которых можно считать «конечномерным» аналогом теоремы 1 этой работы.

I. Пусть O^n — группа ортогональных матриц порядка n и μ_n — нормированная мера Хаара на ней.

Определим функцию $f(G)$ на этой группе, положив для каждой матрицы $G = \{g_{ij}\}_{i,\, j=1}^{n}$,

$$f(G) = \sup_{\{a_i\}:\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1,\ \{n_j\}:\, 1 \leqslant n_j \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n_j} a_i g_{ij} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда существуют абсолютные постоянные $C > 0$ *и* $0 < \gamma$ *такие, что*

$$\mu_n\{G \in O^n : f(G) > y\} < (C \exp(-\gamma y^2))^n \quad y \geqslant 0.$$

II. Из утверждения I и теоремы 3 нашей работы [17] легко вытекает, что *для любого* $n > 1$ *существует матрица* $G = \{g_{ij}\} \in O^n$ *такая, что* а) $f(G) \leqslant C$;

б) *для любого набора чисел* $\{a_i\}_{i=1}^n$ *с* $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ *найдется такое число* m $(1 \leqslant m \leqslant n)$, *что*

$$\sum_{j:\ \left|\sum_{i=1}^m a_i g_{ij}\right| > cn^{-1/2}} 1 \geqslant cn.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М., «Мир», 1965.
2. *Качмаж С.*, *Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.
3. *Ульянов П. Л.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов. — «Усп. матем. наук», 1964, **19**, № 1, 3—69.
4. *Crothendieck A.* Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologuques. — «Bol. soc. mat. Sao Paulo», 1956, **8**, N 1—2, 1—79.
5. *Кашин Б. С.* Об одной полной ортонормированной системе. — «Матем. сб.», 1976, **99**, № 3, 356—365.
6. *Олевский А. М.* Об одной ортонормальной системе. — «Матем. сб.», 1966, **71**, № 3, 297—336.
7. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и функциональные ряды. Докт. дис., М., 1971.
8. *Никишин Е. М.* Автореф. докт. дис.—«Матем. заметки», 1971, **10**, № 5, 583—595.
9. *Олевский А. М.* Ряды Фурье непрерывных функций по полным ортонормальным системам. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, **30**, № 2, 387—432.
10. *Marcinkiewicz J.* Sur la convergence des series orthogonales. — «Studia math.», 1936, 6, 39—45.
11. *Кашин Б. С.* Об ортогональных системах сходимости. — «ДАН СССР», 1976, **228**, № 2, 285—286.
12. *Komlos J.* Every sequence converging to 0 weakly in L^2 contains an inconditional convergence sequence. — «Arkiv mat.», 1974, **12**, N 1, 41—49.
13. *Никишин Е. М.* О системах сходимости по мере для l^2. — «Матем. заметки», 1973, **13**, № 3, 337—340.
14. *Mayrey B.* Sur une application de la theorie des operateurs p-sommants. — «C. r. Acad. sci. Paris», 1972, **274**, N 17, 1304—1307.
15. *Ламперти Дж.* Вероятность. М., «Наука», 1973.
16. *Billard P.* Sur la convergence presque partout des series, de Fourier — Walsh des fonctions de l'espace L^2 (0, 1). — «Studia math.», 1966—1967, **28**, 363—388.
17. *Кашин Б. С.* Порядки поперечников некоторых классов гладких функций. — «Усп. матем. наук», 1977, **32**, № 1, 191—192.