МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 11, № 5 (1972), 481—490

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Б. С. Кашин

Рассматривается вопрос о сходимости функциональных рядов всюду на отрезке $[0,1]$. Пусть $F = \{f\}$ — множество таких функций на $[0,1]$, для каждой из которых найдется перестановка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, сходящаяся к ней всюду на $[0,1]$. Строится пример такого ряда, что множество F состоит только из тождественного нуля, но $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_0)| = \infty$ $(x_0 \in [0,1])$ для любой точки отрезка $[0,1]$. Библ. 2 назв.

Пусть задан числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Через A будем обозначать множество всех тех чисел a, для каждого из которых найдется такая перестановка $\tau \equiv \{n_k\} = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ натурального ряда чисел, что

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{\tau} a_k.$$

Хорошо известно, что если множество A состоит из одной точки, то ряд (1) является абсолютно сходящимся. Это непосредственно вытекает из теоремы Римана. Этот факт имеет место и для рядов вида (1) с элементами a_n из N-мерного пространства (теорема Штейница — Леви (см. [1], [2])).

В предлагаемой работе исследуется аналогичный вопрос для случая, когда $a_n = a_n(x)$ являются непрерывными функциями на отрезке $[0, 1]$. Точнее, пусть функции $f_n(x) \in C(0, 1)$ и $F = \{f(x)\}$ — множество всех тех функций $f(x)$, определенных на $[0,1]$, для каждой из которых найдется перестановка $\tau = \{n_k\}$ такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) = \sum_{\tau} f_n(x) \tag{2}$$

сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$ к $f(x)$.

Можно ли утверждать, что если множество $F = \{f(x)\}$ состоит лишь из одной функции, то ряд (2) сходится абсолютно в каких-то точках отрезка $[0,1]$? На этот вопрос дает ответ следующая

ТЕОРЕМА. *Существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in [0, 1]; \ f_n(x) \in C(0, 1); \quad n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

такой, что множество F состоит из одной функции $f(x) \equiv 0$ и в то же время

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \infty \quad \text{для всех} \quad x \in [0, 1]. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть A — множество всех таких перестановок $\tau = \{n_k\}$ натурального ряда чисел, что

$$n_k \leqslant 27k^3 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Отобразим множество A в отрезок $[0, 1]$ по правилу

$$x = \varphi(\tau) = 0, \underbrace{00\ldots0}_{n_1} \underbrace{11\ldots1}_{n_2} \underbrace{00\ldots0}_{n_3} \underbrace{11\ldots1}_{n_4} \ldots,$$

где написанная десятичная дробь да'т число $x \in [0, 1]$. Пусть $B = \varphi(A)$ и $\overline{B}$ — замыкание множества B. Нетрудно видеть, что если $x \in \overline{B}$, то

$$x = 0, \underbrace{00\ldots0}_{p_1} \underbrace{11\ldots1}_{p_2} \ldots, \tag{6}$$

где $p_i \leqslant 27i^3$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $p_j \neq p_k$ при $j \neq k$. Отметим, что последовательность $\{p_i\}$ не является, вообще говоря, перестановкой натурального ряда чисел, так как в наборе чисел p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ могут отсутствовать некоторые натуральные числа.

Определим на множестве $\overline{B}$ последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $x \in \overline{B}$, тогда x представляется в виде десятичной дроби (6). Положим

$$\varphi_{2j-1}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{p_j}}, \qquad \varphi_{2j}(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{p_j}} \qquad (j=1,2,\ldots). \quad (7)$$

Ясно, что функция $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сохраняет знак на множестве $\overline{B}$. Кроме того, функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на множестве $\overline{B}$ при любом $n=1, 2, \ldots$. Это вытекает из того, что если j — фиксированное целое число, а $x_0 \in \overline{B}$, то найдется такое $\delta > 0$, что функции $\varphi_{2j-1}(x)$ и $\varphi_{2j}(x)$ постоянны на множестве $\overline{B} \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Сначала отметим, что для любой точки $x \in \overline{B}$ мы имеем (см. (5) — (7))

$$\varphi_{2j-1}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{p_j}} \geqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{j^3}}=\frac{1}{3j}, \qquad (j=1,2,\ldots),$$

и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|=\infty \quad \text{при} \quad x \in \overline{B}. \quad (8)$$

Далее, $\sum_{n=1}^{2k} \varphi_n(x)=0$ при $x \in \overline{B}$ и $k=1, 2, \ldots$,

а $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)=0$ при $x \in \overline{B}$ (см. (7)). Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (9)$$

сходится на множестве $\overline{B}$ к функции $\varphi(x) \equiv 0$. Отметим, что вместе с функцией $\varphi_n(x)$ членом ряда (9) является и функция $-\varphi_n(x)$, которая единственна для каждой φ_n.

Теперь мы докажем, что если ряд (9) после некоторой перестановки $\tau'=\{m_i\}$ сходится всюду на $\overline{B}$ к некоторой функции $\Phi(x)$, то $\Phi(x)=\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in \overline{B}$, т. е.

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{m_i}(x)=\sum_{\tau'} \varphi_n(x)=0. \quad (10)$$

Возьмем произвольное натуральное число N и назовем функцию $\varphi_j(x)$ сократившейся на участке от 1 до N в перестановке τ', если среди функций $\{\varphi_{m_i}(x)\}_{i=1}^{N}$ находится как функция $\varphi_j(x)$, так и функция $-\varphi_j(x)$. Через $K(\tau', N)$ обозначим число несократившихся функций в перестановке τ' на участке от 1 до N.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{m_i}(x_0) = \sum_{\tau'} \varphi_n(x_0) \tag{11}$$

в произвольной точке $x_0 \in \overline{B}$. Назовем число $a_j = \varphi_j(x_0)$ сократившимися на участке от 1 до N в перекрестке τ', если среди чисел $\{a_{m_i}\}_{i=1}^{N}$ находится как число a_j, так и число $-a_j$. Через $K(x_0, \tau', N)$ обозначим число несократившихся членов ряда (11) на участке от 1 до N.

Отметим, что когда точка $x_0 \in \overline{B}$ (см. (6)), то $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, и потому если $\varphi_n(x_0) = \varphi_m(x_0)$, то $n = m$. В силу этого для любых $x_0 \in \overline{B}$, τ' и N функция $K(x_0, \tau', N) = K(\tau', N)$, а несократившиеся в ряде (10) на участке от 1 до N функции $\varphi_{m_i}(x)$ стоят на тех же местах, что и несократившиеся на том же участке члены $\{a_{m_i}\}$ ряда (11).

Для данной перестановки $\tau' = \{m_i\}$ (см. (10)) возможны два случая:

$$\text{I.}\ \overline{\lim_{N\to\infty}} K(\tau', N) < \infty. \qquad \text{II.}\ \overline{\lim_{N\to\infty}} K(\tau', N) = \infty.$$

Члены ряда (11) стремятся к нулю и, кроме того, для каждого слагаемого $\varphi_{m_i}(x_0)$ ряда (11) найдется член этого же ряда $\varphi_{m_j}(x_0) = -\varphi_{m_i}(x_0)$. Поэтому в случае I, т. е. когда $K(\tau', N) \leqslant M = \text{const}$ при всех $N = 1, 2, \ldots$, в частной сумме

$$\sigma_N(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{m_i}(x_0)$$

несократившиеся члены (в количестве $\leqslant M$) имеют сколь угодно большие номера при $N \to \infty$. Это значит, что $\sigma_N(x_0) \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, ряд (11) сходится к нулю в каждой точке $x_0 \in \overline{B}$, т. е. $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ и (10) справедливо в случае I.

Теперь рассмотрим случай II. Мы докажем, что он невозможен. Для этого случая мы построим расходящийся ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i, \tag{12}$$

который является перестановкой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \tag{13}$$

и для которого $s_i = \varphi_{m_i}(x_1)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ в некоторой точке $x_1 \in B$. Этот факт будет противоречить сходимости ряда (10) к функции $\Phi(x)$ на множестве $\overline{B}$. Выберем из ряда (13) два частичных ряда:

$$T_1 \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2k}}\right), \qquad T_2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

Оставшиеся члены ряда (13) образуют некоторый его частичный ряд, который мы обозначим через

$$T_3 \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{r_i}}-\frac{1}{\sqrt[3]{r_i}}\right). \tag{14}$$

Ясно, что $r_i \leqslant 3i$ $(i \geqslant 1)$. Построение ряда (12) мы будем вести по индукции.

1-й шаг индукции. Выберем натуральное число p_1 такое, что

$$\sum_{k=1}^{p_1}\frac{1}{\sqrt[3]{2k}} > 2\sqrt{p_1}. \tag{15}$$

После этого находим натуральное N_1 такое, что

$$K(\tau', N_1) > 2p_1 \tag{16}$$

и частная сумма ряда (10)

$$\sigma_{N_1}(x) = \sum_{i=1}^{N_1}\varphi_{m_i}(x) \tag{17}$$

содержит все функции $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{2p_1}$ (которые, естественно, сокращаются). Обозначим через $\alpha^+(\tau', N)$ (соответственно $\alpha^-(\tau', N)$) число несократившихся положительных (соответственно отрицательных) членов от 1 до N в ряде (10). В силу (16) либо $\alpha_1 = \alpha^+(\tau', N_1) > p_1$, либо $\beta_1 = \alpha^-(\tau', N_1) > p_1$. Не ограничивая общности (это будет видно из проведенных ниже рассуждений), мы можем считать, что

$$\alpha_1 > p_1. \tag{18}$$

Возможны два случая: а) $\beta_1 < p_1$, б) $\beta_1 \geqslant p_1$. В случае а) на первые p_1 мест положительных несократившихся в (17) функций поставим последовательно члены из ряда T_1:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 2}}, \ \ldots, \ \frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot p_1}},$$

т. е. если $\varphi_{m_{i_q}}(x)$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_{\alpha_1})$ — положительные несократившиеся функции в частной сумме (17), то (см. (18))

$$s_{m_{i_q}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot q}}, \quad \text{при} \quad 1 \leqslant q \leqslant p_1.$$

Аналогично, на β_1 мест отрицательных несократившихся функций в (17) ставим последовательно члены из ряда T_2:

$$-\frac{1}{2\cdot 1+1}, -\frac{1}{2\cdot 2+1}, \ \ldots, \ -\frac{1}{2\cdot \beta_1+1}.$$

Далее, на места функций $\varphi_{m_{i_q}}(x)$ с $p_1 < q \leqslant 2p_1 - \beta_1$ ставим последовательно члены из ряда T_2:

$$\frac{1}{2(\beta_1+1)+1}, \ \ldots, \ \frac{1}{2p_1+1}.$$

Таким образом, мы определили s_i для некоторых значений i $(1 \leqslant i \leqslant N_1)$ в количестве $p_1 + \beta_1 + (p_1 - \beta_1) = 2p_1$. На места функций $\varphi_{m_{i_q}}(x)$ с $2p_1 - \beta_1 < q \leqslant \alpha_1$ и на места всех сократившихся в (16) функций мы ставим члены ряда T_3 так, что:

1) если в (17) на каких-то двух местах находятся функции $\varphi_{2j-1}(x)$ и $-\varphi_{2j-1}(x) = \varphi_{2j}(x)$, то на эти места соответственно ставим $\frac{1}{\sqrt[3]{r_j}}$ и $-\frac{1}{\sqrt[3]{r_j}}$;

2) на место функций $\varphi_{m_{i_q}}(x) \equiv \varphi_{2\nu-1}(x)$ с $2p_1 - \beta_1 < q < \alpha_1$ ставим $\frac{1}{\sqrt[3]{r_\nu}}$;

3) если первый положительный неиспользованный в 1) и 2) член ряда T_3 имеет номер $i_0 \leqslant p_1$, то на место функции $\varphi_{m_{\alpha_1}}(x) = \varphi_{2\nu-1}(x)$ ставим $\frac{1}{\sqrt[3]{r_{i_0}}}$. Если же $i_0 > p_1$, то на место $\varphi_{m_{\alpha_1}}(x) = \varphi_{2\nu-1}(x)$ ставим $\frac{1}{\sqrt[3]{r_\nu}}$ (как и в 2)).

Таким образом, мы построили s_i для всех $1 \leqslant i \leqslant N_1$. Числа s_i $(1 \leqslant i \leqslant N_1)$ построены так, что если функции $\varphi_{m_i}(x) = \varphi_{2h-1}(x)$ или $\varphi_{m_i}(x) = \varphi_{2h}(x)$ сопоставлено число $s_i = \frac{1}{\sqrt[3]{l}}$ $\left(\text{соответственно } -\frac{1}{\sqrt[3]{l}}\right)$, то (см. (14) и выбор N_1)

$$l \leqslant 27 h^3. \tag{19}$$

Заметим, что (см. (15))

$$A_1 \equiv \sum_{i=1}^{N_1} s_i \geqslant \sum_{i=1}^{p_1} \frac{1}{\sqrt[3]{2i}} - \sum_{i=1}^{p_1} \frac{1}{2i+1} \equiv R_1 > \sqrt{p_1}. \tag{20}$$

В случае б), т. е. когда $\beta_1 \geqslant p_1$, мы строим s_i следующим образом. На первые p_1 мест положительных (соответственно отрицательных) несократившихся в (17) функций ставим последовательно числа $\frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot q}}$ при $1 \leqslant q \leqslant p_1$ $\left(\text{соответственно } -\frac{1}{2q+1} \text{ при } 1 \leqslant q \leqslant p_1\right)$.

На остальные места в (17) мы ставим члены ряда T_3 совершенно так же, как в пп. 1), 2) и 3) случая а).

Обозначим так построенные числа для $1 \leqslant i \leqslant N_1$ через $s_i^{(1)}$. Если в этом построении мы изменим лишь то, что на первые p_1 мест положительных (соответственно отрицательных) несократившихся в (17) функций поставим последовательно числа $\frac{1}{2q+1}$ с $1 \leqslant q \leqslant p_1$ (соответственно $-\frac{1}{\sqrt[3]{2q}}$ при $1 \leqslant q \leqslant p_1$), то получим числа $s_i^{(2)}$ с $1 \leqslant i \leqslant N_1$. Но тогда (см. (20))

$$\left| \sum_{i=1}^{N_1} s_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{N_1} s_i^{(1)} \right| = 2R_1,$$

и поэтому для $\alpha = 1$ (или для $\alpha = 2$) имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{N_1} s_i^{(\alpha)} \right| \geqslant R_1. \tag{21}$$

Положим $s_i = s_i^{(\alpha)}$ для $1 \leqslant i \leqslant N_1$ и того α, для которого справедливо (21). Мы построили s_i $(1 \leqslant i \leqslant N_1)$ как в случае а), так и в случае б), так что справедливо (19) и $|A_1| > \sqrt{p_1}$. Тем самым первый шаг индукции окончен.

2-й шаг индукции. Пусть для целого $n \geqslant 2$ у нас построены p_{n-1}, N_{n-1} и s_i для $1 \leqslant i \leqslant N_{n-1}$. Выбираем p_n так, что

$$\sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} \frac{1}{\sqrt[3]{2k}} \geqslant 2\sqrt{p_n},$$

и находим натуральное N_n такое, что $K(\tau', N_n) > 2p_n$, а частная сумма

$$\sigma_{N_n}(x) = \sum_{i=1}^{N_n} \varphi_{m_i}(x) \tag{22}$$

содержит все функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{2p_n}$ и $\{\varphi_{m_i}(x)\}_{i=1}^{N_{n-1}}$, которые в (22) сократились. Построение чисел s_i с $N_{n-1} < i \leqslant N_n$ мы будем вести почти так же, как в 1-м шаге индукции, за исключением того, что если несократившейся в частной сумме $\sigma_{N_{n-1}}(x)$ функции $f_m(x)$ было сопоставлено число s_i $(1 \leqslant i \leqslant N_{n-1})$, то на 2-м шаге функции $-f_m(x)$ мы сопоставляем число $-s_i$.

Так построенная последовательность $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

1°) сумма $\left|\sum_{i=1}^{N_n} s_i\right| > \sqrt{p_n}$;

2°) если функции $\varphi_{m_i}(x) \equiv \varphi_{2n-1}(x)$ $(1 \leqslant i < \infty)$ сопоставлено число $s_i = \dfrac{1}{\sqrt[3]{l}}$, то $l \leqslant 27\, n^3$;

3°) если функции $f_m(x)$ сопоставлено число s_i, то функции $-f_m(x)$ сопоставлено число $s_j = -s_i$;

4°) последовательность $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ является некоторой перестановкой последовательности $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}, -\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}}\right\}_{n,\, m=1}^{\infty}$.

Покажем, что существует точка $x_1 \in B$, для которой

$$\varphi_{m_i}(x_1) = s_i \qquad (1 \leqslant i < \infty).$$

В самом деле, каждой положительной функции $\varphi_{m_{j_\alpha}}(x) = \varphi_{2k-1}(x)$ из ряда (10) по построению сопоставлено число $s_{j_k} = \frac{1}{\sqrt[3]{n_k}}$, т. е.

$$\varphi_{2k-1}(x) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n_k}} \quad (1 \leqslant k < \infty),$$

а

$$-\varphi_{2k-1}(x_0) \equiv \varphi_{2k}(x_0) \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{n_k}}, \tag{23}$$

где знак $\Rightarrow$ обозначает сопоставление. Возьмем точку

$$x_1 = 0,\ \underbrace{00\ldots0}_{n_1}\ \underbrace{11\ldots1}_{n_2}\ \underbrace{00\ldots0}_{n_3}\ \underbrace{11\ldots1}_{n_4}\ldots.$$

В силу 2°) и 4°) точка $x_1 \in B$, ибо $n_k \leqslant 27k^3$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются перестановкой натурального ряда. Но тогда (см. (7) и 3°))

$$\varphi_{m_{j_\alpha}}(x_1) \equiv \varphi_{2k-1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt[3]{n_k}} = s_{j_k}. \tag{24}$$

Поэтому (см. 1°, (23) и (24))

$$\left|\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_{m_j}(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N_n} s_j\right| > \sqrt{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. (см. (22)) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\sigma_{N_n}(x_1)| = \infty$. Отсюда следует, что ряд (10) расходится в точке x_1, и тем самым доказана невозможность случая II. Функции $\varphi_n(x)$ определены на множестве $\overline{B} \subset [0, 1]$ с $0 \leqslant m \equiv \inf\limits_{-x\in\overline{B}} x < \sup\limits_{+x\in\overline{B}} x = M \leqslant 1$.

Пусть $[m, M] - \overline{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, где (a_i, b_i) — смежные интервалы к $\overline{B}$. Определим функции $f_k(x) \in C(0, 1)$ следующим образом:

$$f_{2j-1}(x) = \begin{cases} \varphi_{2j-1}(x) & \text{при} \quad x \in \overline{B}, \\ \varphi_{2j-1}(m) & \text{при} \quad x \in [0, m], \\ \varphi_{2j-1}(M) & \text{при} \quad x \in [M, 1], \\ \varphi_{2j-1}(a_i) & \text{при} \quad x \in \left[a_i, a_i + \frac{j-1}{j}(b_i - a_i)\right] \\ & \qquad (1 \leqslant i < \infty), \\ \text{линейна} & \text{на} \quad \left[a_i + \frac{j-1}{j}(b_i - a_i), b_i\right] \\ & \qquad (1 \leqslant i < \infty), \end{cases}$$

и пусть

$$f_{2j}(x) \equiv -f_{2j-1}(x) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Функции $f_n(x)$ являются искомыми. В самом деле, ряд (4) расходится в каждой точке $x \in [0, 1]$, так как $f_n(x) = \varphi_n(a)$ при $n \geqslant N(x)$ для некоторой точки $a = a(x) \in \overline{B}$. С другой стороны, очевидно, что ряд (3) сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$ к нулю, а множество состоит лишь из одной функции $f(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.V.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S t e i n i t z E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, J. reine u. ange w. Math., **143** (1913), 128—175.

[2] L e v y P., Sur les series semi-convergents, Nouv. ann. d. Math., 5 (1905), 506—511.