ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Б. С. КАШИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВА l_2^n в l_2^m

Введение. Пусть l_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n = 1, 2, \cdots$ — пространство векторов $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ с нормой $\|x\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $\|x\|_{l_\infty^n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, а B_p^n — единичный шар в l_p^n. Для каждого линейного оператора $T: R^n \to R^m$ положим $\|T\|_{(p, q)} = \sup_{y \in B_p^n} \|T(y)\|_{l_q^m}$. Если рассмотреть в R^n базис $\{z_j\}_{j=1}^n$ с $z_j = \{0, \cdots, 1, \cdots, 0\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то очевидно возникает взаимно-однозначное соответствие, при котором каждому линейному оператору T отвечает его матрица $T' = \{t_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ в базисе $\{z_j\}$, т. е. матрица с n строками и m столбцами, $j^{\text{тая}}$ строка которой совпадает с вектором $T(z_j) \in R^m$.

Для матрицы T' положим по определению

$$\|T'\|_{(p, q)} \equiv \|T\|_{(p, q)} = \sup_{\{y_j\} \in B_p^n,\ \{x_i\} \in B_{q'}^m} \left| \sum_{i, j} t_{ij} x_i y_j \right|, \tag{1}$$

где $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Отметим, что введенная норма матрицы T' — $\|T'\|_{(p, q)}$ совпадает с (p, q') нормой билинейной $\sum t_{ij} x_i y_j$, определенной в [1]. Данная работа, состоящая из трех параграфов, является развитием заметки автора [2] и содержит доказательства тех утверждений, которые в [2] только сформулированы. В п° 1 и 2 изучаются некоторые свойства матриц операторов $T: l_2^n \to l_2^m$ с нормой $\|T\|_{(2, 2)} \leqslant 1$, в частности, некоторые свойства ортонормированных матриц. В п° 3 рассматриваются свойства $m \times n$ матриц, связанные с оценками поперечников и оцениваются поперечники октаэдра B_1^m, $1 \leqslant m < \infty$, в метрике l_q^m, $2 < q < \infty$.

Укажем еще некоторые обозначения, использованные ниже: через E_m^n, $n \leqslant m$ обозначается множество всех n-элементных наборов чисел $\{i_\nu\}_{\nu=1}^n$ с $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant m$. Для каждой матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i, j=1}^n$ определим матрицу $A^\# = \{a_{ij}^\#\}_{i, j=1}^n$, положив

$$a_{ij}^\# = \begin{cases} a_{ij}, & \text{при } i \geqslant j \\ 0, & \text{при } i < j \end{cases} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Для данного конечного множества G через $|G|$ будем обозначать число элементов в нем. Наконец, если S^n — множество всех перестановок набора чисел $1, 2, \cdots, n$ и $\{k_j\}_{j=1}^n = \sigma \in S^n$, то через A_σ обозначается матрица $\{a_{i,\,k_j}\}_{i,\,j=1}^n$, т. е. матрица, полученная путем перестановки в порядке σ строк матрицы A.

1°. Для матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $\|A\|_{(2,\,2)} \leqslant 1$ и набора $\Omega \in E_m^n$, через $A(\Omega)$ будем обозначать квадратную матрицу порядка n — $\{a_{ij}\}$, $i \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Нас будет интересовать поведение норм $\|A(\Omega)\|_{(2,\,2)}$ и $\|A(\Omega)\|_{(2,\,q)}$, $1 \leqslant q < 2$.

Легко видеть, что матрица $A_n = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $a_{ij} = 1$ при $1 \leqslant i = j \leqslant n$ и $a_{ij} = 0$—в остальных случаях обладает тем свойством, что

1) $\|A_n\|_{(2,\,2)} = 1$; 2) для любого набора $\Omega \in E_{2n-1}^n$, $\|A_n(\Omega)\|_{(2,\,2)} = 1$.

Вместе с тем в [2] доказана

Теорема А. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $\rho(\varepsilon) > 0$, что для любой матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $\dfrac{n}{m} \leqslant \rho(\varepsilon)$ найдется набор целых чисел $\Omega \in E_m^n$, для которого $\|A(\Omega)\|_{(2,\,2)} \leqslant \varepsilon$.

При этом, в доказательстве теоремы A в [2] не давалась оценка величины $\rho(\varepsilon)$ в зависимости от ε. В этом параграфе будет, в частности, получена такая оценка.

Отметим, что если для $m \times n$ матрицы A с $\|A\|_{(2,\,2)} \leqslant 1$ рассмотреть среднее значение нормы $\|A(\Omega)\|_{(2,\,q)}$ по всем наборам Ω:

$$E_1(A,\ q) = \frac{1}{C_m^n} \sum_{\Omega \in E_m^n} \|A(\Omega)\|_{(2,\,q)},$$

то очевидно, что, при $q = 2$, $E_1(A,\ 2) \leqslant 1$, но для того, чтобы получить для каждой $m \times n$ матрицы A с $\|A\|_{(2,\,2)} \leqslant 1$ оценку $E_1(A,\ 2) \leqslant \gamma < 1$, где γ — абсолютная постоянная необходимо, чтобы число n было гораздо меньше m. Это следует из того, что как нетрудно проверить, для матриц $A_{n,\,\varepsilon} = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant [n^{2-\varepsilon}]$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\varepsilon > 0$, где $a_{ij} = 1$ при $1 \leqslant i = j \leqslant n$ и $a_{ij} = 0$ — остальных случаях, справедливо соотношение:

$$\lim_{n \to \infty} E_1(A_{n,\,\varepsilon},\ 2) = 1.$$

Если при q, $1 \leqslant q < 2$ для данной $m \times n$ матрицы A и набора $\Omega \in E_m^n$ рассмотреть величину $\|A(\Omega)\|_{(2,\,q)}$, то так как $\|x\|_{l_q^n} \leqslant n^{1/q-1/2}\|x\|_{l_2^n}$ при $x \in R^n$, то $\|A(\Omega)\|_{(2,\,q)} \leqslant n^{1/q-1/2}\|A\|_{(2,\,2)}$, поэтому

$$E_1(A,\ q) \leqslant \max_{\Omega \in E_m^n} \|A(\Omega)\|_{(2,\,q)} \leqslant n^{1/q-1/2}\|A\|_{(2,\,2)}. \tag{2}$$

В отличие от величины $E_1(A, 2)$ для $E_1(A, q)$, $1 \leqslant q < 2$ уже при $m \geqslant Cn$* можно получить нетривиальную, т. е. лучшую чем $\gamma n^{1/q-1/2} \|A\|_{(2, 2)}$, $\gamma < 1$, оценку. Исходя из этой оценки доказывается и уточнение теоремы А (см. теорему 2 этой работы). Справедлива

Теорема 1. *Для q, $1 \leqslant q < 2$ существует постоянная B_q, такая, что для любой $m \times n$ матрицы A с $\|A\|_{(2, 2)} \leqslant 1$ и любого $y < 1$ имеет место оценка*

$$|\{\Omega \in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2, q)} \geqslant y n^{1/q-1/2}\}| \leqslant \mathbf{C}_m^n \cdot B_q^n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{n \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}.$$

Из теоремы 1 вытекают

Следствие 1. *Для любой пары чисел q, $1 \leqslant q < 2$ и $K > 0$ найдется постоянная $C(q, K)$, для которой, в предположениях теоремы 1*

$$f(y) = \left|\left\{\Omega \in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2, q)} \geqslant C(q, K) \cdot \ln^{\frac{q-2}{2q}}\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n^{1/q-1/2}\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{C}_m^n \cdot K^{-n}.$$

Следствие 2. *Для $r \geqslant 1$ и $q \in [1, 2)$, в предположениях теоремы 1*

$$E_r(A, q) \equiv \left((\mathbf{C}_m^n)^{-1} \sum_{\Omega \in E_m^n} \|A(\Omega)\|_{(2,q)}^r\right)^{1/r} \leqslant C'(r, q) \cdot \left(\ln \frac{m}{n}\right)^{\frac{q-2}{2q}} \cdot n^{1/q-1/2}.$$

Лемма 1. *Для любой функции $f(x) \in L^2(0, 1)$ с $\|f\|_{L^2} \leqslant 1$, $\|f\|_{L^q} \geqslant y$, $1 \leqslant q < 2$ при любом $z < y$ справедлива оценка меры*

$$mE \equiv m\{x \in (0, 1) : |f| \geqslant z\} \geqslant (y^q - z^q)^{\frac{2}{2-q}}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$y^q \leqslant \|f\|_{L^q}^q = \int_E |f|^q\, dx + \int_{[0, 1]\setminus E} |f|^q\, dx \leqslant \int_0^1 \chi_E |f|^q\, dx + z^q, \tag{3}$$

где χ_E — характеристическая функция множества E. Применяя неравенство Гельдера (с показателями $2/2-q$ и $2/q$) находим

$$\int_0^1 \chi_E \cdot |f|^q\, dx \leqslant \left(\int_0^1 \chi_E^{\frac{2}{2-q}}\, dx\right)^{\frac{2-q}{2}} \cdot \left(\int_0^1 f^2 dx\right)^{1/2} \leqslant (mE)^{\frac{2-q}{2}}.$$

Из последнего неравенства и (3) следует, что $y^q \leqslant z^q + (mE)^{\frac{2-q}{2}}$.

* Через K, C, $C_1, \cdots$ в дальнейшем обозначаются положительные абсолютные постоянные.

Лемма 1 доказана.

Лемма 1′. *Если для* q, $1 \leqslant q < 2$ *и* $y \in (0, 1)$ *для вектора* $x = \{x_i\} \in R^n$ *имеем* $\|x\|_{l_2^n} \leqslant 1$, $\|x\|_{l_q^n} \geqslant y n^{1/q-1/2}$, *то*

$$\left|\left\{i : |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y n^{-1/2}\right\}\right| \geqslant n \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

В самом деле, рассмотрим функцию $f(x)$ с $f(x) = x_i \sqrt{n}$ при $\frac{i-1}{n} < x \leqslant \frac{i}{n}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\|f\|_{L^2} \leqslant 1$, а

$$\|f\|_{L^q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \, n^{q/2}\right)^{1/q} = \|x\|_{l_q^n} \cdot n^{1/2-1/q} \geqslant y.$$

Поэтому по лемме 1

$$\left|\left\{i: |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y n^{-1/2}\right\}\right| = n \cdot m\left\{x \in (0, 1) : |f(x)| \geqslant \frac{y}{2}\right\} \geqslant \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

Лемма 2. *Для* $x = \{x_i\} \in R^m$ *с* $\|x\|_{l_2^m} \leqslant 1$, $1 \leqslant q < 2$ *и* $y \in (0, 1)$ *справедливо неравенство*

$$|G_y| \equiv \left|\left\{\Omega \in E_m^n : \left(\sum_{i \in \Omega} |x_i|^q\right)^{1/q} \geqslant y n^{1/q-1/2}\right\}\right| \leqslant \mathrm{C}_m^n \cdot (B_q')^n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $Q_y = \left\{i \in [1, m] : |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y \cdot n^{-1/2}\right\}$. Так как $\|x\|_{l_2^m} \leqslant 1$, то

$$|Q_y| \leqslant \frac{4n}{y^2}. \tag{4}$$

В силу леммы 1′ справедливо соотношение

$$G_y \subset \left\{\Omega \in E_m^n : |\Omega \cap Q_y| \geqslant n\left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}\right\} \equiv G_y'. \tag{5}$$

Для оценки $|G_y'|$ для данной четверки чисел m, n, r, p с $m \geqslant 2n$, $r \leqslant n$, $r \leqslant p$, $m \geqslant p \cdot 2$ оценим количество $|G(m, n, r, p)|$ наборов $\Omega \in E_m^n$ таких, что $|\Omega \cap [1, p]| \geqslant r$.

Имеем

$$|G\, m\, (n, r, p)| = \sum_{s=r}^{\min(p, n)} \mathrm{C}_p^s \cdot \mathrm{C}_{m-p}^{n-s}.$$

Пользуясь оценкой $\mathrm{C}_p^s \leqslant K^s\left(\frac{p}{s}\right)^s$, из последнего равенства находим,

$$|G(m,\ n,\ r,\ p)| \leqslant K^n \sum_{s=r}^{\min(p,\ n)} \left(\frac{p}{s}\right)^s \left(\frac{m-p}{n-s}\right)^{n-s} \leqslant$$

$$\leqslant K_1^n\, p^r\, (m-p)^{n-r} \cdot \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \left(\frac{1}{s^s} \cdot \frac{1}{(n-s)^{n-s}}\right) \leqslant C^n\, n^{-n}\, p^r\, m^{n-r}. \qquad (6)$$

В силу (4) и (5) $|G_y'|$ не превосходит $|G(m,\ n,\ r,\ p)|$ с

$$r = \left[\, n \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \right],\quad p = \left[\frac{4n}{y^2}\right].$$

Поэтому из (6) вытекает, что

$$\frac{1}{\mathbf{C}_m^n} |G_y'| \leqslant \frac{1}{\mathbf{C}_m^n}\, C^n\, n^{-n} \left[\frac{4n}{y^2}\right]^{n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}} \cdot m^{n-n\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}. \qquad (7)$$

Так как $\mathbf{C}_m^n \geqslant C_1^{-n} \left(\frac{m}{n}\right)^n$, то правая часть в (7) не превосходит

$$C_1^n \exp\left\{\ln\left(\frac{n}{my^2}\right) \cdot n \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}\right\}. \qquad (8)$$

В силу соотношения (5) и неравенства (7), учитывая (8) и тот факт, что $\sup\limits_{0 \leqslant y < 1} y^{-2\left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}} \leqslant C_q$, находим

$$|G_y| \leqslant (B_q')^n \cdot \exp\left[\, n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \ln \frac{n}{m}\right] \cdot C_m^n;\quad B_q' = C_q \cdot C_1.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Хорошо известно, (см., напр., [3]), что при $n=1,\ 2, \cdots$ на сфере $\{x : \|x\|_{l_2^n} = 1\}$ существует набор векторов $\Delta_n = \{e\}$ с $|\Delta_n| < C^n$ такой, что для всякого вектора x, $\|x\|_{l_2^n} = 1$, найдется вектор $e \in \Delta_n$ с $\|x-e\|_{l_2^n} \leqslant \frac{1}{4}$. Легко видеть, что для любого набора $\Omega \in E_m^n$

$$\|A(\Omega)\|_{(2,\ q)} \leqslant 2 \max_{\{e_j\}=e\in\Delta_n} \left(\sum_{i\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\, e_j\right)^q\right)^{1/q}. \qquad (9)$$

Поэтому

$$\{\Omega \in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2,\ q)} \geqslant y n^{1/q-1/2}\} \subset \bigcup_{\{e_j\}=e\in\Delta_n} \left\{\Omega \in E_m^n ;\ \left(\sum_{i\in\Omega}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\, e_j\right)^q\right)^{1/q} \geqslant \right.$$

$$\left. \geqslant \frac{1}{2}\, y n^{1/q-1/2} \right\}, \qquad (10)$$

следовательно

$$f(y) \leqslant C^n \max_{\{e_j\}=e\in\Delta_n} \left| \left\{ \Omega \in E_m^n : \left(\sum_{i\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^q \right)^{1/q} \geqslant \frac{1}{2} y n^{1/q-1/2} \right\} \right|. \quad (11)$$

Так как $\|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$, то для любого вектора

$$e = \{e_j\}, \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant \|e\|_{l_2^n},$$

и оценивая правую часть в(11) с помощью леммы 2, получим (см. (11)):

$$f(y) \leqslant C^n (B_q')^n \mathbf{C}_m^n \left(\frac{n}{m} \right)^{n \left(\frac{y}{4}\right) \frac{2q}{2-q}} = \mathbf{C}_m^n B_q^n \left(\frac{n}{m} \right)^{n \left(\frac{y}{4}\right) \frac{2q}{2-q}}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Существует такая абсолютная постоянная $B > 0$, что для любой $m \times n$ матрицы $A = \{a_{ij}\}$ с $\|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$ найдется набор $\Omega \in E_m^n$, для которого $\|A(\Omega)\|_{(2,2)} \leqslant B \left(\ln \frac{m}{n} \right)^{-1/2}$.*

В доказательстве теоремы 2 используется, кроме следствия 1, следующий результат Гротендика [4], сформулированный здесь в нужном нам частном случае.

Теорема В. (Гротендик). Существует абсолютная постоянная C, такая, что для любого линейного оператора $T: l_2^n \to L^1(0, 1)$ найдется множество

$$E \subset (0, 1), \ mE \geqslant \frac{3}{4} \quad \text{с} \quad \sup_{y\in B_2^n} \|T(y)\|_{L^2(E)} \leqslant \mathbf{C} \cdot \|T\|.$$

Следствие В. Для любой матрицы $B = \{b_{ij}\}_{j=1}^{n}{}_{i=1}^{2n}$ найдется набор Ω, $\Omega \subset [1, 2n]$, $|\Omega| \geqslant n$ такой, что

$$\|\{b_{ij}\} \ i \in \Omega, \ 1 \leqslant j \leqslant n\|_{(2,2)} \leqslant \frac{4C}{n^{1/2}} \|B\|_{(2,1)}. \quad (12)$$

Для доказательства следствия В рассмотрим оператор $T: l_2^n \to L^1$, переводящий вектор $y = \{y_i\} \in l_2^n$ в функцию $f(z)$, где

$$f(z) = \sum_{j=1}^n y_j b_{ij} \quad \text{при} \quad \frac{i-1}{n} < z \leqslant \frac{i}{n}, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Найдем, пользуясь теоремой В, множество $E \subset [0, 1]$, $mE \geqslant \frac{3}{4}$, для которого $\|T(y)\|_{L^2(E)} \leqslant C \sup_{y\in B_2^n} \|T(y)\|_{L^1(0,1)}$ и положим

$$\Omega = \left\{ i \in [1, 2n] ; m \left(E \cap \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right) \right) \geqslant \frac{1}{2n} \right\}.$$

Легко видеть, что $|\Omega| \geqslant n$ и что для набора Ω выполнено (12).

Доказательство теоремы 2. Ясно, что можно считать, что $m \geqslant 4n$. Из следствия 1 (при $q=1$, $k=2$) вытекает существование такой постоянной C, что для матрицы $A' = \{a'_{ij}\}$ $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, где $a'_{ij} = a_{ij}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ и $a'_{ij} = 0$ при $j > n$, найдется набор $\Omega' \in E^{2n}_m$ с

$$\|A'(\Omega')\|_{(2,\,1)} \leqslant \frac{C_1 n^{1/2}}{\ln^{1/2}\frac{m}{n}}. \tag{13}$$

Применяя теперь следствие B к матрице $A(\Omega') = \{a_{ij}\}$ $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \in \Omega'$, для которой, в силу (13), $\|A(\Omega')\|_{(2,\,1)} \leqslant C_1 n^{1/2} \ln^{1/2}\frac{m}{n}$, найдем набор $\Omega \subset \Omega'$, $\Omega \subset E^n_m$ с $\|A(\Omega)\|_{(2,\,2)} \leqslant \dfrac{4CC'}{\ln^{1/2}\frac{m}{n}}$. Теорема 2 доказана.

2°. В теории ортогональных рядов весьма давно известна следующая задача, восходящая к А. Н. Колмогорову: пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,\,1)$ — ортонормированная система функций. Существует ли перестановка натурального ряда $\sigma = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой система $\{\varphi_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой сходимости (т. е. всякий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_{k_n}(x),\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

сходится почти всюду)? „Конечномерный" вариант этой задачи имеет следующий вид: существует ли абсолютная постоянная C такая, что для любого ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$, $x \in (0,\,1)$ найдется такая перестановка $\{k_n\} = \sigma \in S^N$, что

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^N}\ \sup_{N(x),\, 1 \leqslant N(x) \leqslant N}\ \sup_{y>0} \frac{1}{y^2}\, m\left\{x:\ \left|\sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x)\right| \geqslant y\right\} \leqslant C? \tag{14}$$

А. Гарсиа в книге [5] высказывает гипотезу о справедливости оценки, более сильной чем (14), а именно, что

$$\inf_{\{k_n\} = \sigma(\Phi) \in S^N}\ \sup_{\{a_n\} \in B_2^n}\ \sup_{N(x),\, 1 \leqslant N(x) \leqslant N} \left\|\sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x)\right\|_{L^2(0,\,1)} \leqslant C. \tag{15}$$

Напомним, что в силу леммы Меньшова—Радемахера (см. [6], стр. 188) для любого ортонормированного набора

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^N}\ \sup_{N(x),\, 1 \leqslant N(x) \leqslant N} \left\|\sum_{k=1}^{N(x)} a_n \varphi_n(x)\right\|_{L^2(0,\,1)} \leqslant C \ln N. \tag{16}$$

Сам А. Гарсиа в работе [7] доказал следующий результат:

Теорема C (Гарсиа). Для любого ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$ и любого набора $\{a_n\} \in B_2^N$ найдется перестановка $\{k_n\} = \sigma = \sigma(\Phi,\ \{a_n\})$, для которой

$$\sup_{N(x),\ 1 \leqslant N(x) \leqslant N} \left\| \sum_{n=1}^{N(x)} a_{k_n} \varphi_{k_n}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leqslant C. \tag{17}$$

(Заметим, что доказательство этого результата основано на оценке для данного набора чисел

$$\{b_n\}_{n=1}^N, \ \sum_{n=1}^N b_n^2 = 1, \ \sum_{n=1}^N b_n = 0$$

среднего

$$S_p(\{b_n\}) = \left(\frac{1}{N!} \sum_{\sigma = \{k_n\} \in S^N} \sup_{1 \leqslant s \leqslant N} \left| \sum_{N=1}^{s} b_{k_n} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Первоначально рассуждение А. Гарсиа были сложными, в [5] им было дано простое доказательство оценок для $S_p(\{b_n\})$, вполне аналогичное доказательству классического неравенства А. Н. Колмогорова для мажоранты частных сумм ряда по системе независимых функций (см. [8], стр. 68).

Функция распределения

$$f(y, \{b_n\}) = \left| \left\{ \sigma \in S^n : \sup_{1 \leqslant s \leqslant N} \left| \sum_{n=1}^{s} b_{k_n} \right| > y \right\} \right|$$

ведет себя во многом сходно с функцией распределения суммы независимых случайных величин. Можно показать, например, что для любого набора $\{b_n\}_{n=1}^N$, $\sum_{n=1}^N b_n = 0$

$$\frac{1}{N!} f(y, \{b_n\}) \leqslant Cm \left\{ x \in (0, 1) : \left| \sum_{1}^{N} b_n r_n(x) \right| > C_1 y \right\}; \ y \geqslant 0,$$

где $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Радемахера.)

Из сравнения задачи А. Н. Колмогорова или предположения Гарсиа (14) с теоремой Гарсиа (см. (17)) видно, что оценка (17) дает решение более простой задачи. Другим возможным упрощением задачи Колмогорова является получение для данного ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ и данной функции $N(x), 1 \leqslant N(x) \leqslant N$ оценок величины

$$\inf_{\{k_n\} = \sigma(\varphi, N(x))} \ \sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \left\| \sum_{1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x) \right\|_{L^p(0,1)}. \tag{18}$$

В п° 2 получены результаты, связанные с оценкой величины (18). Рассматривается модельная задача об оценке для данной матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ величины

$$\inf_{\sigma \in S^n} \|(A_\sigma)^{\#}\|_{(2,q)}$$

(обозначения A_σ и $A^{\#}$ введены в начале этой работы).

Теорема 3. *Для любой матрицы* $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *с* $\|A\|_{(2,2)}\leqslant 1$ *и числа* q *с* $1\leqslant q<2$ *найдется такая перестановка строк* σ_0, *что*

$$\|(A_\sigma)^{+}\|_{(2,q)}\leqslant C_q\, n^{1/q-1/2}.$$

Прежде чем доказывать теорему 3 отметим, что из (16) следует (см. также [9]), что для любой $n\times n$ матрицы A

$$\|A^{+}\|_{(2,2)}\leqslant C\ln n\,\|A\|_{(2,2)}. \tag{19}$$

Поэтому для любой $n\times n$ матрицы A и $q\in[1,2)$

$$\|A^{\#}\|_{(2,q)}\leqslant n^{1/q-1/2}\|A^{\#}\|_{(2,2)}\leqslant C(\ln n)\cdot n^{1/q-1/2}\,\|A\|_{(2,2)}. \tag{20}$$

Обычный в этих вопросах пример матрицы Гильберта $H_n=\{h_{ij}\}$ с $h_{ij}=\dfrac{1}{i-j}$ при $1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i\neq j$ и $h_{ij}=0,\ 1\leqslant i\leqslant n$, для которой $\|H_n\|_{(2,2)}\leqslant 2\pi$ (см. [1]), показывает, что оценка (20) неулучшаема.

Лемма 3 (см., напр., [8], стр. 76, п. 8). *Пусть* $\{f_i(x)\}_{i=1}^{s}$ — *набор независимых функций, заданных на отрезке* $[0,1]$ *и таких, что* $m\{x:f_i(x)=1\}=\lambda>0$, $m\{x:f_i(x)=0\}=1-\lambda$, $1\leqslant i\leqslant s$. *Тогда*

$$m\left\{x:\left|\sum_1^s f_i(x)\right|\leqslant\frac{\lambda s}{4}\right\}<\gamma^s;\ 0<\gamma\leqslant\gamma(\lambda)<1.$$

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 3'. *Пусть* $\{f_i(x)\}_{i=1}^{s}$, $x\in(0,1)$ — *такой набор функций, принимающих только значения* 0 *и* 1, *что для каждого набора* $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k}$ $1\leqslant k<s$ *с* $\varepsilon_i=0$ *или* 1

$$m\{(x:f_i(x)=\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\}\cap\{x:f_{k+1}(x)=1\})\geqslant$$
$$\geqslant\lambda m\{x:f_i=\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\},$$

где $\lambda>0$. *Тогда*

$$m\left\{x:\sum_1^s f_i(x)\leqslant\frac{\lambda}{4}s\right\}<\gamma^s,\ 0<\gamma=\gamma(\lambda)<1.$$

Доказательство теоремы 3. 1. Обозначим через ρ абсолютную постоянную $\rho(1/2)$ (см. теорему А). Для каждой матрицы $B=\{a_{ij}\}$, $b_1\leqslant i,\ j\leqslant b_2$ с $1\leqslant b_1<b_2\leqslant n$ и $b_2-b_1>\rho^{-1}$ определим ее разбиение на четыре подматрицы $(\hat{B})_r$, $r=1,2,3,4$, положив

$$(\hat{B})_1=\{a_{ij}\},\ q+1\leqslant i,\ j\leqslant b_2;\ (\hat{B})_2=\{a_{ij}\},\ q+1\leqslant i\leqslant b_2,\ b_1\leqslant j\leqslant q,$$
$$(\hat{B})_3=\{a_{ij}\},\ b_1\leqslant i,\ j\leqslant q,\ (\hat{B})_4=\{a_{ij}\},\ b_1\leqslant i\leqslant q,\ q+1\leqslant j\leqslant b_2,$$

где число $q=q(b)$ определяется из соотношений

$$b_2-q\leqslant\rho(b_2-b_1+1),\ b_2-q+1>\rho(b_2-b_1+1).$$

2. Построим последовательность разбиений $\Delta_s=\Delta_s(A)$, $s=0,1,\cdots,s_0$ данной матрицы A на подматрицы. Нулевое разбиение Δ_0

состоит из самой матрицы $A = B_1^0$. Если разбиение Δ_{s-1}, $s \geqslant 1$ построено и состоит из подматриц $\{B_\nu^{s-1}\}_{\nu=1}^{\nu_{s-1}}$, то для построения разбиения Δ_s, те из матриц разбиения Δ_{s-1}, которые пересекают диагональ $i=j$ матрицы A (все они по построению будут квадратными) и имеют порядок $\geqslant 1+\rho^{-1}$ делятся на четыре части $\widehat{(B_\nu^{s-1})}_r$, $1 \leqslant r \leqslant 4$ по правилу, описанному в п. 1. На каком-то шаге с номером $s_0 \leqslant C \ln n$ указанный процесс остановится. Разбиение Δ_{s_0} обозначим через Δ.

3. Укажем искомую перестановку $\{k_j\}_{j=1}^n = \sigma_0 = \sigma_0(A) \in S^n$. Для этого предварительно построим набор перестановок σ_r, $1 \leqslant r \leqslant s_0$, причем σ_0 будет совпадать с σ_{s_0}. Для построения σ_1, воспользовавшись теоремой А, примененной к матрице $\{a_{ij}\}$, $q+1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $q = q(A)$ (см п. 1°), найдем такой набор $\Omega \subset [1, n]$, $|\Omega| = n - q$, что

$$\|\{a_{ij}\},\ q+1 \leqslant i \leqslant n,\ j \leqslant \Omega\|_{(2,2)} \leqslant \frac{1}{2}$$

и в качестве σ_1 возьмем любую перестановку σ, для которой $\sigma(\Omega) = [q+1, n]$.

Если перестановки $\sigma_1, \sigma_2 \cdots, \sigma_{s-1}$ $s \leqslant s_0$ построены, то для построения σ_s рассмотрим все подматрицы $A_\mu^{s-1} = \{a_{i,\sigma_{s-1}(j)}\}$ $i_\mu + 1 \leqslant i$, $j \leqslant i_{\mu+1}$, $1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}$ разбиения Δ_{s-1} матрицы $\{a_{i,\sigma_{s-1}(j)}\}_{i,j=1}^n$, которые пересекают диагональ $i=j$ и имеют порядок $\geqslant 1+\rho^{-1}$ и, также как при построении перестановки σ_1, найдем, пользуясь теоремой А, такие наборы целых чисел $\Omega_\mu \subset [i_\mu + 1, i_{\mu+1}]$, $1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}$, что

$$|\Omega| = i_{\mu+1} - q(A_\mu^{s-1}) \quad \text{(см. п. 1) и}$$

$$\|\{a_{i,\sigma_{s-1}(j)}\},\ q(A_\mu^{s-1})+1 \leqslant i \leqslant i_{\mu+1},\ j \in \Omega\|_{(2,2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|A_\mu^{s-1}\|_{(2,2)};\ 1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}. \tag{21}$$

Затем возьмем такую перестановку σ, что

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \sigma([i_\mu+1, i_{\mu+1}]) = [i_\mu+1, i_{\mu+1}],\ 1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1},\\ &2)\quad \sigma(\Omega_\mu) = [q(A_\mu^{s-1})+1, i_{\mu+1}],\ 1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и положим $\sigma_s = \sigma \cdot \sigma_{s-1}$.

4. Докажем, что перестановка $\sigma_{s_0} = \sigma_0 = \{k_j\}$ искомая, для этого оценим норму $\|\{a_{ik_j}\}.\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\|_{(2,q)}$. Пусть $\{(\hat{R}_\mu^s)_2\}_{\mu=1}^{\mu_s}$ — набор матриц, построенных по правилу, описанному в п. 1 для каждой, пересекающей главную диагональ и имеющей порядок $\geqslant 1+\rho^{-1}$, матрицы R_μ^s разбиения Δ_s матрицы $\{a_{i\sigma_0(j)}\}$ $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда легко видеть что матрица

$$Q = \bigcup_{s=1}^{s_0-1} \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_\mu^s)_2$$

имеет вид

$$Q = \{a_{i\sigma_0(j)}\},\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant j_i,\ \text{где } |j_i - i| \leqslant \frac{1}{\rho},\ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{23}$$

Из (23) и оценки $\|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$ следует, что

$$\|Q - (A_{\sigma_0})^{\#}\|_{(2,2)} \leqslant C,$$

а поэтому

$$\|Q - (A_{\sigma_0})^{\#}\|_{(2,q)} \leqslant Cn^{1/q-1/2}. \tag{24}$$

Оценим норму $\|Q\|_{(2,q)}$. Для этого сначала оценим $\left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}^s_\mu)_2 \right\|_{(2,q)}$ при данном s, $1 \leqslant s \leqslant s_0 - 1$. Если для каждой матрицы R^s_μ через $(\hat{R}^k_{\mu(k)})_{\alpha_k}$ (где $\alpha_k = \alpha_k(\mu, s) = 1$ или 3) обозначить ту матрицу разбиения Δ_{k+1}, $0 \leqslant k \leqslant s-2$, которая содержит матрицу R^s_μ, то по построению перестановки σ_0

$$\|(\hat{R}^s_\mu)_2\|_{(2,2)} \leqslant \|R^s_\mu\|_{(2,2)} \leqslant 2^{-p(\mu,s)}, \tag{25}$$

где $p(\mu, s) = \sum_{k \in [0,\, s-2]:\ \alpha_k = 1} 1$.

Из леммы 3′ нетрудно вывести, что при некоторых постоянных γ, $0 < \gamma < 1$ и $c_0 > 0$ сумма порядков матриц

$$\sum_{\mu:\ p(\mu,s) \leqslant c_0 s} \operatorname{rank}(R^s_\mu) \leqslant n\gamma^s. \tag{26}$$

Очевидно, что

$$\left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} \left(\hat{R}^s_\mu\right)_2 \right\|_{(2,q)} \leqslant \left\| R'_s \right\|_{(2,q)} + \left\| R''_s \right\|_{(2,q)}, \tag{27}$$

где

$$R'_s = \bigcup_{\mu \in [1,\mu_s]:\ p(\mu,s) \leqslant c_0 s} R^s_\mu; \quad R''_s = \bigcup_{\mu \in [1,\mu_s]:\ p(\mu,s) > c_0 s} R^s_\mu.$$

Пользуясь для оценки нормы $\|R'_s\|_{(2,q)}$ неравенством

$$\|B\|_{(2,q)} \leqslant (\operatorname{rank} B)^{1/q-1/2} \|B\|_{(2,2)}, \tag{28}$$

неравенством $\|R'_s\|_{(2,2)} \leqslant 1$ (вытекающим из того, что $\|R'_s\|_{(2,2)} \leqslant \max_\mu \|A^s_\mu\|_{(2,2)} \leqslant \|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$) и оценкой (26), получим

$$\|R'_s\|_{(2,q)} \leqslant n^{1/q-1/2} \gamma^{s(1/q-1/2)};\ 0 < \gamma < 1. \tag{29}$$

Для оценки $\|R''_s\|_{(2,q)}$ используем неравенства (25) и (28) и найдем

$$\|R''_s\|_{(2,q)} \leqslant n^{1/q-1/2} \|R''_s\|_{(2,2)} \leqslant n^{1/q-1/2} \max_{\mu:\ p(\mu,s) > c_0 s} \|(\hat{R}^s_\mu)_2\|_{(2,2)} \leqslant$$

$$\leqslant n^{1/q-1/2} \max_{\mu:\ p(\mu,s) > c_0 s} \|R^s_\mu\|_{(2,2)} \leqslant 2\, n^{1/q-1/2} \cdot 2^{-c_0 s}. \tag{30}$$

Из оценок (29), (30) и (27) следует, что

$$r_s \equiv \left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_\mu^s)_2 \right\|_{(2,\, q)} \leqslant 3 \cdot n^{1/q-1/2} \gamma_1^{s\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}; \quad 0 < \gamma_1 < 1, \tag{31}$$

а следовательно и

$$\|Q\|_{(2,\, q)} \leqslant \sum_{s=1}^{s_0-1} r_s \leqslant 3n^{1/q-1/2} \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_1^{s\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \leqslant \frac{3n^{1/q-1/2}}{1-\gamma_1^{1/q-1/2}}. \tag{32}$$

Соединяя неравенства (32) и (24), получаем нужную оценку для $\|(A_{\alpha_0})^{\#}\|_{(2,\, q)}$. Теорема 3 доказана.

В заключение п. 2° сформулируем одно утверждение, которое можно доказать, используя следствие 2 и разбиение матрицы $\{a_{k_i j}\}$ на двоичные блоки.

Утверждение. Для любой матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i\, j=1}^{n}$ с $\|A\|_{(2,\, 2)} \leqslant 1$

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma = \{k_i\} \in S^n} \|(\{a_{k_i j}\})^{\#}\|_{(2,\, q)} \leqslant C_q \, (\ln^{3q \# /2q} n) \cdot n^{1/q-1/2}.$$

Утверждение дает для среднего значения по всем перестановкам столбцов матрицы A величины $\|A^{\#}\|_{(2,\, q)}$ лучшую оценку, чем тривиально вытекающая из (19) оценка $C\,(\ln n)\, n^{1/q-1/2}$.

3°. В этом параграфе дается оценка n-поперечника по Колмогорову $d_n\,(B_1^m,\, l_q^m)$ октаэдра B_1^m в пространстве l_q^m, при этом метод доказательства имеет общие черты с использованным в п. 1°. Определение поперечника и ряд результатов об оценках поперечников конечномерных множеств содержится в работах [10] и [11].

Хорошо известно ([12], см. также [10], стр. 237), что справедливо равенство

$$d_n\,(B_1^m,\, l_2^m) = \left(\frac{m-n}{m}\right)^{1/2}. \tag{33}$$

Из равенства (33) следует, что при $m \geqslant 2n$ и $1 \leqslant q \leqslant 2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant d_n\,(B_1^m,\, l_q^m) \leqslant 1. \tag{34}$$

Здесь мы получим равномерную по n и $m \geqslant 2n$ оценку для поперечника $d_n(B_1^m,\, l_q^m)$, $2 < q < \infty$. Рассуждения, приведенные в этом параграфе, применимы и если $m < 2n$, но мы ограничиваемся важным для приложений к оценкам поперечников функциональных классов случаем $m \geqslant 2n$.

Теорема 4. *При* $n = 1, 2, \cdots$, $m \geqslant 2n$ *и* $2 < q < \infty$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4} \min\,(1,\, m^{1/q}\, n^{-1/2}) \leqslant d_n\,(B_1^m,\, l_q^m) \leqslant C'\,(q) \cdot \min\,(1,\, m^{1/q} \cdot n^{-1/2}). \tag{35}$$

Доказательство. а) Оценка сверху. При $m > n^{q/2}$ оценка сверху очевидна, так как в этом случае $\min(1, m^{1/q} n^{-1/2}) = 1$, а поперечник $d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant 1$ для любых чисел m, n, q. При $m \leqslant n^{q/2}$, пользуясь очевидным неравенством $\|x\|_{l_q^m} \leqslant m^{1/q} \|x\|_{l_\infty^m}$ и оценкой поперечника $d_n(B_1^m, l_\infty^m)$, полученной в заметке автора [13], согласно которой, при $m \leqslant n^\lambda$, $d_n(B_1^m, l_\infty^m) \leqslant n^{-1/2}$ C (λ), имеем

$$d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant m^{1/q} d_n(B_1^m, l_\infty^m) \leqslant C(q) \cdot m^{1/q} \cdot n^{-1/2}.$$

б) Оценка снизу. При $n = 1$ оценка легко проверяется непосредственно, поэтому в дальнейшем считаем, что $n > 1$, $m \geqslant 2n$.

Лемма 4. ([14], *см. также* [10], *стр.* 237). *Для любой плоскости* $L \subset R^m$, $\dim L = n$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{l_2}^2(L, z_i) \geqslant m - n,$$

где при

$$1 \leqslant i \leqslant m,\ z_i = \left\{0, \cdots, \frac{1}{\sqrt{i}}, \cdots, 0\right\},\ \text{а}\ \rho_{l_q}(L, z) = \inf_{x \in L} \|x - z\|_{l_q^m}.$$

Доказательство леммы очень просто, тем не менее она часто оказывается весьма полезной, в частности, из нее следует оценка снизу для $d_n(B_1^m, l_2^m)$ (см. (33)).

Лемма 4′. *Для любых наборов векторов* $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ *и* $\{\xi_i\}_{i=1}^{2n}$ e_i, $\xi_i \in R^n$ *таких, что скалярное произведение* $(e_i, \xi_i) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2n$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{i \neq j} |(e_i, \xi_j)|^2 \geqslant n. \tag{36}$$

В самом деле, рассмотрим матрицу A с $2n$ столбцами и n строками, при этом i-ый столбец этой матрицы совпадает с вектором e_i. Предположив, что оценка (36) не верна, мы получим, что для подпространства $L \subset R^{2n}$, натянутого на вектора—строки матрицы A $\sum_{i=1}^{2n} \rho_{l_2}^2(L, z_i) < n$, что противоречит лемме 4.

Пусть теперь число q, $2 < q < \infty$ фиксировано. Если для пары чисел (n, m) имеет место неравенство $d_n(B_1^m, l_q^m) > \frac{1}{4}$, то

$$\frac{1}{4} \min(1, m^{1/q - 1/2}) \leqslant \frac{1}{4} < d_n(B_1^m, l_\infty^m),$$

т. е. в этом случае оценка снизу в (35) верна.

В случае, если $d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant \frac{1}{4}$, рассмотрим плоскость $L \subset R^m$, $\dim L = n$, для которой

$$\sup_{x\in B_1^m} \rho_{l_q}(L, x) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \rho_{l_q}(L, z_i) = d_n(B_1^m, l_q^m). \tag{37}$$

Выбрав в L базис $\{y_\nu\}_{\nu=1}^n$, $y_\nu \in R_e^m$, плоскость L зададим матрицей с n строками $\{y_\nu\}_{\nu=1}^n$ и m столбцами $\{l_i\}_{i=1}^m$. Из (37) и неравенства $d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant \frac{1}{4}$ следует, что найдется набор векторов $\{\tilde{\xi}_i\}_{i=1}^m$, $\tilde{\xi}_i \in R^n$, такой, что

а) $$\sum_{j\neq i} |(\tilde{\xi}_i, e_j)|^q \leqslant d_n^q(B_1^m, l_q^m),$$

$$1 \leqslant i \leqslant m.$$

б) $$\frac{3}{4} \leqslant (\tilde{\xi}_i, e_i) = r_i \leqslant \frac{5}{4},$$

Следовательно, для набора векторов $\xi_i = \frac{1}{r_i}\tilde{\xi}_i$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \sum_{j\neq i} |(\xi_i, e_j)|^q \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m, l_q^m); \\ &\qquad\qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ &\text{б)} \quad (\xi_i, e_i) = 1. \end{aligned} \tag{38}$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i,\, j\leqslant m \\ i\neq j}} |(\xi_i, e_j)|^q.$$

Из (38) следует, что

$$S \leqslant m\left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m, l_q^m). \tag{39}$$

Теперь рассмотрим сумму

$$T = \sum_{\Omega} \sum_{\substack{i,\, j\in\Omega \\ i\neq j}} |(\xi_i, e_j)|^q,$$

где в сумме T внешнее суммирование производится по всем наборам $\Omega \in E_m^{2n}$. Член $|(\xi_i, e_j)|^q$ войдет в сумму T C_{m-2}^{2n-2} раз, поэтому

$$T \leqslant C_{m-2}^{2n-2}\cdot S \leqslant C_{m-2}^{2n-2}\cdot m\left(\frac{4}{3}\right)^q \cdot d_n^q(B_1^m, l_q^m). \tag{40}$$

Из (40) следует, что можно найти такой набор $\Omega^0 \in E_m^n$, что

$$P \equiv \sum_{\substack{i,\, j\in\Omega^0 \\ i\neq j}} |(\xi_i, e_j)|^q \leqslant T\cdot (C_m^{2n})^{-1} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^q \cdot d_n^q\cdot(B_1^m, l_q^m)\cdot m\cdot\frac{C_{m-2}^{2n-2}}{C_m^{2n}}. \tag{41}$$

Так как $C_{m-2}^{2n-2}\cdot(C_m^{2n})^{-1} = 2n(2n-1)\cdot(m(m-1))^{-1}$, то правая часть в (41) не превосходит

$$\left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m,\ l_q^m)\cdot\frac{4n^2}{m-1}. \tag{42}$$

Оценим теперь левую часть в (41) снизу. Пользуясь неравенством $\|x\|_{l_q^r}\geqslant r^{1/q-1/2}\|x\|_{l_2^r}$, $q>2$, $r=1, 2,\cdots$, равенством (38) п. б) и леммой 4, получим:

$$P^{1/q}\geqslant(4n^2)^{1/q-1/2}\Big(\sum_{\substack{i,\ j\in\Omega^0\\ i\neq j}}(\xi_i,\ e_i)^2\Big)^{1/2}\geqslant(4\,n^2)^{1/q-1/2}\cdot n^{1/2}=4^{1/q-1/2}\cdot n^{2/q-1/2}, \tag{43}$$

$$P\geqslant 4^{1-q/2}\cdot n^{2-q/2}.$$

Из соотношений (41) и (43) выводим, учитывая (42), что

$$\left(\frac{4}{3}\right)^q\cdot d_n^q(B_1^m,\ l_q^m)\,\frac{4\,n^2}{m-1}\geqslant 4^{1-q/2}\cdot n^{2-q/2},$$

т. е.

$$d_n^q(B_1^m,\ l_q^m)\geqslant(m-1)\,n^{-q/2}4^{-q/2}\left(\frac{3}{4}\right)^q;\ d_n(B_1^m,\ l_q^m)\geqslant n^{-1/2}\times$$

$$\times(m-1)^{1/q}\cdot\frac{3}{8}\geqslant\frac{1}{4}\,n^{-1/2}\cdot m^{q/2}.$$

Теорема 4 доказана.

Математический институт
АН СССР им. В. А. Стеклова

Поступила 1.IX.1979

Բ. Ս. ԿԱՇԻՆ. l_2^n տարածությունից l_2^m տարածություն գործող սահմանափակ օպերատորների որոշ հատկությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում մասնավորապես տրվում են հիլբերտյան նորմի գնահատականներ տրված օրթոգոնալ մատրիցի ենթամատրիցների համար։ Բերվում են նաև գնահատականներ բազմաչափ օկտաեդրերի «ընլայնականների» համար։

B. S. KASHIN. *On certain properties of matrices of bounded operators from* l_2^n *into* l_2^m (summary)

Estimates of the Hilbert norm of the submatrices of a given orthogonal matrix are presented. Estimates of the diameters of multidimentional octahedra are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИИЛ, 1948.
2. *Б. С. Кашин.* Об одном свойстве билинейных форм, Сообщ. АН Груз. ССР, 93- N1 (198
3. *Л. Ф. Тот.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958.
4. *A. Grothendieck.* Resume de la theorie metrique des produits tenzoriels topologiques, Bol. Söc. Mat. Sao Paulo, 8, № 1—2, 1956, 1—79.
5. *A. Garsia.* Topics an almost everywhere convergence, Chicago, Markham, 1970.
6. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
7. *A. Garsia.* Rearrangements for Fourier series, Ann. of Math., 79, № 3, 1964, 623—629.

8. *В. В. Петров.* Суммы независимых случайных величин, М., Изд. «Наука», 1972.

9. *Д. Е. Меньшов.* Sur les series des fonctions orthogonales III, Fung. Math., 10, 1927, 375—420.

10. *В. М. Тихомиров.* Некоторые вопросы теории приближений, М., Изд. МГУ, 1976.

11. *Б. С. Кашин.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 2, 1977, 334—351.

12. *С. Б. Стечкин.* О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, УМН, 9, № 1, 1954, 133—134.

13. *Б. С. Кашин.* О поперечниках октаэдров, УМН, 30, № 4, 1975, 251—252.

14. *А. Н. Колмогоров, А. А. Петров, Ю. М. Смирнов.* Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, Изв. АН СССР, сер. матем, 14, 1947, 561—566.