ВЕСТ. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1983, № 3

УДК 513.82

Б. С. Кашин

О СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ СЕЧЕНИЙ N-МЕРНОГО КУБА

1. Пусть, как обычно, $B_p{}^N$ — единичный шар в пространстве $l_p{}^N$ векторов $x=\{(x)_i\}$, $1\leqslant i\leqslant N$, с нормой

$$\|x\|_{l_p^N}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}|(x)_i|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|(x)_i|, & p=\infty.\end{cases}$$

Через m_N, μ_N и $\mu_{N,n}$ обозначаем соответственно нормированную меру Лебега на сфере $S^N\equiv\{x:\|x\|_{l_2^N}=1\}$, меру Хаара на группе O^N-ортогональных матриц порядка N и инвариантную меру на множестве всех n-мерных подпространств в R^N. Наконец, если заданы два n-мерных банаховых пространства X и Y, то $d(X, Y)$ — расстояние Банаха—Мазура между ними:

$$d(X, Y)\equiv\inf_T\|T\|_{X\to Y}\cdot\|T^{-1}\|_{Y\to X},$$

где T пробегает совокупность всех невырожденных линейных операторов из X в Y.

2. В работе [1] показано, что при $n\leqslant c_0\ln N$, где абсолютная постоянная $c_0>0$ достаточно мала, для большинства (в смысле меры $\mu_{N,n}$) n-мерных подпространств L сечение куба $B_\infty{}^N$ плоскостью L почти евклидово; точнее,

$$\int d(l_\infty^N\cap L, l_2^n)\,d\mu_{N,n}\leqslant 2,\qquad 1\leqslant n\leqslant c_0\ln N. \tag{1}$$

В работе [2] Т. Фигель и В. Джонсон изучали свойства сечений куба $B_\infty{}^N$ подпространствами большой размерности и дали оценки расстояния Банаха—Мазура этих сечений от евклидова пространства. Они показали [2], что для любого n-мерного подпространства $L\subset R^N$

$$d(l_\infty^N\cap L, l_2^n)>cn^{1/2}\ln^{-1/2}N. \tag{2}$$

Для таких n, что $n\leqslant N^\alpha$, $0<\alpha<1$, Т. Фигель и В. Джонсон доказали [2] неусиляемость оценки (2), то есть для каждого $\alpha\in(0, 1)$ и любой пары чисел N и n с $1\leqslant n\leqslant[N^\alpha]$ указали подпространство L, $\dim L=n$, для которого

$$d(l_\infty^N\cap L, l_2^n)\leqslant C'_\alpha n^{1/2}\ln^{-1/2}N.$$

В [2] поставлен вопрос о возможности улучшения оценки (2) для «случайного» подпространства L размерности $[KN^\alpha]$, где числа $K>0$ и α, $0<\alpha<1$ фиксированы, а $N\to\infty$. Доказанное в настоящей заметке утверждение дает ответ на этот вопрос: из неравенства (3) вытекает что для «большинства» подпространств L, $\dim L=[KN^\alpha]$, оценка (2) неулучшаема.

3. Теорема. *Для каждого α, $0<\alpha<1$, найдется такая постоянная C_α, что для любой пары чисел N, n с $1\leqslant n\leqslant N^\alpha$ имеет место оценка*

$$\int d(l_\infty^N\cap L, l_2^n)\,d\mu_{N,n}\leqslant C_\alpha\max(n^{1/2}\ln^{-1/2}N, 1). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть задано число $\alpha \in (0, 1)$ и пара N, n. В силу (1) мы можем ограничиться тем случаем, когда $n > c_0 \ln N$, и, кроме того, можем считать, что число N достаточно велико: $N > N_\alpha$. Положим также $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(1+\alpha) \in (\alpha, 1)$.

Нам потребуются оценки двух функций распределения:

а) существует постоянная $\gamma > 0$, такая, что при любом $y \geqslant 3$

$$m_N \left\{ x \in S^N : \left(\sum_{i=1}^{n} (x)_i^2 \right)^{1/2} > y \left(\frac{n}{N} \right)^{1/2} \right\} \leqslant 2 \exp(-\gamma y^2 n); \qquad (4)$$

б) для любого $\tilde{\alpha}$, $0 < \tilde{\alpha} < 1$, найдутся такие постоянные $c_{\tilde{\alpha}} > 0$ и $K_{\tilde{\alpha}}$, что

$$m_N \{ x \in S^N : \| x \|_{l_\infty^N} < c_{\tilde{\alpha}} N^{-1/2} \ln^{1/2} N \} \leqslant K_{\tilde{\alpha}} \exp(-N^{\tilde{\alpha}}). \qquad (5)$$

(Заданная на B_2^N функция $\sum_{i=1}^{n} (x)_i^2$ имеет бета-распределение с параметрами $\frac{n}{2}$ и $\frac{N-n}{2} + 1$ — см., например, [3], — откуда нетрудно вывести (4); оценка (5) является некоторым уточнением хорошо известного — см., например, [1] — неравенства

$$\int \| x \|_{l_\infty^N} dm_N > c N^{-1/2} \ln^{1/2} N,$$

ее доказательство приводить не будем.)

Так как для любого n-мерного подпространства L

$$d(l_\infty^N \cap L, l_2^n) \leqslant \frac{R(L)}{r(L)}, \qquad (6)$$

где $R(L)$ и $r(L)$ — радиусы соответственно описанного вокруг $B_\infty^N \cap L$ и вписанного в $B_\infty^N \cap L$ шаров, то для доказательства теоремы изучим поведение отношения $R(L)/r(L)$. Прежде всего отметим, что если $\{y_j\}_{j=1}^n$ $(y_j = \{(y_j)_i\},\ 1 \leqslant i \leqslant N)$ — некоторый ортонормированный базис в L, то

$$\frac{1}{r(L)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left(\sum_{j=1}^{n} (y_j)_i^2 \right)^{1/2}.$$

Поэтому, учитывая инвариантность меры $\mu_{N,n}$ и оценку (4), находим, что

$$\mu_{N,n}(A_Q) \equiv \mu_{N,n} \left\{ L : r(L) < \frac{1}{Q} N^{1/2} n^{-1/2} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant N m_N \left\{ x \in S^N : \left(\sum_{i=1}^{n} (x)_i^2 \right)^{1/2} > Q n^{1/2} N^{-1/2} \right\} < N^{-100}, \qquad (7)$$

если абсолютная постоянная $Q > 0$ достаточно велика.

Для оценки радиуса $R(L)$ фиксируем предварительно на сфере S^n набор векторов $\Omega_n = \{z\}$ с количеством элементов $|\Omega_n| \leqslant (Cn)^n$, который образует ε-сеть в метрике l_2^n на сфере S^n с $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Справедливо равенство

$$\frac{1}{R(L)}=\inf_{\{a_j\}\in S^n}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_j y_j\right\|_{l_\infty^N},$$

где, как и раньше, $\{y_j\}$ — некоторый ортонормированный базис в L.

Предположим, что $L\notin A_Q$ (см. (7)) и что для базиса $\{y_j\}$ и для любого вектора $z=\{z_j\}\in\Omega_n$ верно неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}z_j y_j\right\|_{l_\infty^N}\geqslant c_{\widetilde{\alpha}}N^{-1/2}(\ln N)^{1/2},$$

где постоянная c_α взята из (5). Тогда и для любого $a=\{a_j\}\in S^n$ (выбирая $z\in\Omega_n$ так, что $\|z-a\|_{l_2^n}\leqslant 1/n$) будем иметь

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}a_j y_j\right\|_{l_\infty^N}\geqslant\left\|\sum_{j=1}^{n}z_j y_j\right\|_{l_\infty^N}-\frac{1}{n}\max_{1\leqslant i\leqslant N}\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j)_i^2\right)^{1/2}\geqslant$$

$$\geqslant c_{\widetilde{\alpha}}(\ln N)^{1/2}N^{-1/2}-\frac{1}{n}(r(L))^{-1}>\frac{1}{2}c_{\widetilde{\alpha}}N^{-1/2}\ln^{1/2}N$$

(так как $L\notin A_Q$ и число N можем считать достаточно большим). Таким образом,

$$\left\{L:R(L)>\frac{2}{c_{\widetilde{\alpha}}}\left(\frac{N}{\ln N}\right)^{1/2}\right\}\subset A_Q\cup B, \tag{8}$$

где

$$B=\left\{L:\sup_{\{y_j\}\subset L}\ \inf_{z=\{z_j\}\in\Omega_n}\left\|\sum_{j=1}^{n}z_j y_j\right\|_{l_\infty^N}<c_{\widetilde{\alpha}}\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{1/2}\right\}$$

(здесь sup взят по всем ортонормированным базисам в L). Нетрудно видеть, учитывая (5), что

$$\mu_{N,n}(B)\leqslant|\Omega_n|\max_{z\in S^N}\mu_N\times$$

$$\times\left\{C=\{c_{ij}\}\in O^N:\ \max_{1\leqslant i\leqslant N}\left|\sum_{j=1}^{N}z_j c_{ij}\right|<c_{\widetilde{\alpha}}\frac{\ln^{1/2}N}{N^{1/2}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant(Cn)^n m_N\left\{x\in S^N:\|x\|_{l_\infty^N}<c_{\widetilde{\alpha}}\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant(Cn)^n K_{\widetilde{\alpha}}\exp(-N^{\widetilde{\alpha}})\leqslant K_\alpha\exp(-N^\alpha). \tag{9}$$

В силу (6) из соотношений (7), (8) и (9) следует, что

$$\mu_{N,n}\left\{L:d(l_\infty^N\cap L,\ l_2^n)>\frac{1}{2}C_\alpha\left(\frac{n}{\ln N}\right)^{1/2}\right\}\leqslant K_\alpha N^{-100},\qquad C_\alpha=\frac{4Q}{c_{\widetilde{\alpha}}},$$

откуда, учитывая, что для любого X ($\dim X=n$) выполняется неравенство $d(X,l_2^n)\leqslant n^{1/2}$ (см., например, [1]), получаем утверждение теоремы.

B. S. Kashin

ON THE PROPERTIES OF RANDOM SECTIONS OF AN N-DIMENSIONAL CUBE

An answer is given to a question of T. Figiel and W. Johnson. It is shown that for $0<\alpha<1$, $1\leqslant n\leqslant N^{\alpha}$,

$$\int d(l_N^{\infty} \cap L,\ l_2^n)\, d\mu_{N,n} \leqslant C_\alpha \max(n^{1/2} \ln^{-1/2} N,\ 1),$$

where $d(X, Y)$ is the Banach—Mazur distance between normed spaces X and Y, L are n-dimensional subspaces in R^N, and $\mu_{N,n}$ is the invariant measure on the set of all n-dimensional subspaces in R^N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Figiel T., Lindenstrauss J., Milman V. D. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. — Acta math., 1977, 139, 53—94.
2. Figiel T., Johnson W. B. Large subspaces of l_∞^n and estimates of Gordon—Lewis constant. — Isr. J. Math., 1980, 37, N 1—2, 92—112.
3. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М., 1973.

Поступила в редакцию
09.08.82

ВЕСТ. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 3

УДК 519.21

Б. В. Гнеденко, Л. Сенуси-Берекси

О СВОЙСТВЕ ПРОДОЛЖИМОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Формулировка основного результата. Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ взаимно независимых случайных величин с одним и тем же распределением вероятностей $F(x)$ и построим по ней новую последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$, определяемую посредством равенства $\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Изучению поведения η_n при неограниченном увеличении n посвящено большое число исследований, из которых отметим [1] и [2]. В [1] доказано, что если при надлежащем выборе действительных постоянных $a_n>0$ и b_n функции распределения величин $1/a_n(\eta-b_n)$ при $n\to\infty$ сходятся к предельному, то класс возможных собственных предельных распределений сводится к трем следующим видам:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{при } x>0; \end{cases} \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & \text{при } x\leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x>0; \end{cases} \tag{1}$$
$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Параметр α может принимать любые положительные значения.

Легко убедиться, что распределения (1) тесно связаны между собой и что если случайная величина ξ распределена по закону $\Phi_\alpha(x)$, то величины $\delta=-1/\xi$ и $\zeta=\alpha\ln\xi$ распределены соответственно по законам $\Psi_\alpha(x)$ и $\Lambda(x)$.

В настоящей статье мы доказываем следующее свойство распределений (1), предварительное сообщение о котором опубликовано в [3]:

Основная теорема. *Если при некотором выборе постоянных $a_n>0$ и b_n*

$$P\left\{\frac{1}{Q_n}(\eta_n-b_n)<x\right\}\to\Phi(x), \tag{2}$$