Proceedings of the International Congress of Mathematicians
August 16-24, 1983, Warszawa

Б. С. КАШИН

Некоторые результаты об оценках поперечников

Статья посвящена оценкам поперечников классов гладких функций и конечномерных множеств. Рассматриваемая тематика, как по постановкам задач, так и по методам их решения, принадлежит к области пограничной между теорией приближения, теорией ортогональных рядов и геометрией нормированных пространств. В последние годы оценки поперечников начинают находить применение в прикладной математике, при анализе качества вычислительных алгоритмов и в функциональном анализе, при изучении распределения собственных чисел операторов. Задачи о поперечниках в последние десять лет интенсивно изучались и наша цель — дать обзор некоторых, полученных здесь результатов.

Пусть X — банахово пространство, K — компакт в X, $L \subset X$ — подпространство. Положим

$$\Delta_X(K, L) = \sup_{y \in K} \inf_{z \in L} \|y - z\|_X. \tag{1}$$

Определение 1 (А. Н. Колмогоров [10]). *n-поперечником* компакта K в X называется величина

$$d_n(K, X) = \inf_L \Delta_X(K, L),$$

где inf берется по всем подпространствам $L \subset X$ размерности $\leqslant n$.

Определение 2. *Линейным n-поперечником* компакта K в X называется величина

$$\delta_n(K, X) = \inf_T \sup_{x \in K} \|x - Tx\|_X,$$

где inf берется по всем, действующим в X линейным операторам T ранга $\leqslant n$ ($T\colon X \to L$, $L \subset X$, $\dim L \leqslant n$).

Исторически первая и наиболее известная задача о поперечниках — задача об оценке поперечников классов Соболева W_p^r в пространствах L^q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ($L^\infty = C$). Напомним, что для $r > 0$

$$W_p^r(-\pi, \pi) = \{f\colon \|f\|_{L^p(-\pi,\pi)} + \|f^{(r)}\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant 1\},$$

где

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^r c_k(f) \cdot e^{ikx} \quad \text{и} \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-ikt} dt$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Аналогично определяется класс $W_p^r(T^s)$-функций s переменных, заданных на торе $T^s = (-\pi, \pi)^s$.

Ниже пойдет речь о скорости убывания при $n \to \infty$ поперечников

$$d_n(W_p^r, L^q),^1 \tag{2}$$

при этом мы ограничимся случаем $s = 1$, так как рассмотрение классов функций многих переменных не вносит здесь существенных дополнительных трудностей.

Порядки поперечника (2) при $p = q = 2$ были определены еще А. Н. Колмогоровым [10]. В 50-х годах эти вопросы рассматривались Рудиным [15] и С. Б. Стечкиным [16]. В [15] показано, что

$$d_n(W_1^1, L^2) \asymp n^{-1/2},^2 \tag{3}$$

а в [16] найдены порядки величины (2) при $p = q = \infty$.

В 60-х годах были определены порядки поперечников (2) для любых p и q с $p \geqslant q$, а затем и при $1 \leqslant p < q \leqslant 2$; были вычислены и точные значения некоторых поперечников (см. подробнее [5], [7], [18]). Во всех указанных случаях показывалось, что

$$d_n(W_p^r, L^q) > c \cdot \Delta_{L^q}(W_p^r, T_n); \qquad c = c(p, q) > 0, \tag{4}$$

где $T_n = \{P(x)\colon P(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}\}$ — пространство тригонометрических полиномов. Неравенство (4) означает, что при $q \leqslant \max(2, p)$ пространство тригонометрических полиномов наилучшим (по порядку)

---

[1] При рассмотрении поперечников (2) конечно всегда предполагают, что $W_p^r(T^s)$ — компакт в $L^q(T^s)$, для этого необходимо и достаточно, чтобы $r/s - 1/p + 1/q > 0$ (см. [1]).

[2] Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что при $n = 1, 2, \ldots$, $0 < A < a_n/b_n < B < \infty$, где A и B — абсолютные постоянные.

возможным образом приближает класс W_p^r в метрике L^q. С тридцатых годов известно, что

$$\Delta_{L^q}(W_p^r, T_n) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если} \quad p \geqslant q, \\ n^{-r+1/p-1/q}, & \text{если} \quad p < q, \end{cases} \tag{5}$$

поэтому из соотношения (4) сразу находились порядки поперечников (2) при $q \leqslant \max(2, p)$.

Р. С. Исмагиловым [5] было показано, что при $q > \max(2, p)$ поведение величин (2) резко меняется. В частности, в [5] получено неравенство

$$d_n(W_1^2, C) < c \cdot n^{-6/5} \cdot \ln n < c' \cdot n^{-1/5} \cdot \ln n \cdot \Delta_{L^\infty}(W_1^2, T_n),$$

из которого следует, что обычные тригонометрические полиномы не являются хорошим аппаратом приближения класса W_1^2 в метрике C. В этом случае, в качестве „хорошо приближающего" n-мерного подпространства, Р. С. Исмагиловым было взято подпространство вида:

$$T_n' = \left\{P(x)\colon P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{ik_j x}\right\}, \tag{6}$$

где $\{k_j\}_{j=1}^n$ — некоторый, специально выбранный, набор целых чисел. Забегая вперед, отметим, что с помощью подпространств вида (6) можно хорошо аппроксимировать классы $W_1^r\,(r > \frac{3}{2})$ и показать (см. [13]), что при $q > 2$

$$\inf_{T_n'} \Delta_{L^q}(W_1^r, T_n') \asymp d_n(W_1^r, L^q) \asymp n^{-r+1/2} \tag{7}$$

(в (7) inf берется по всем подпространствам вида (6)). В связи с этими результатами возникло понятие тригонометрического поперечника класса функций K в пространстве L^q:

$$\inf_{T_n'} \Delta_{L^q}(K, T_n'),$$

однако для $K = W_p^r, 1 < p < \infty = q$ точно оценить эту величину не удается и нет оснований считать, что по порядку она совпадает с поперечником (2).

Уже в первых работах, посвященных поперечникам классов гладких функций (см. например [16]) производили дискретизацию задачи, т.е. сведение ее к задаче о поперечниках некоторого множества в R^m. При изучении классов Соболева таким конечномерным аналогом

является задача об оценке величины

$$d_n(B_p^m, l_q^m), \tag{8}$$

где B_p^m — единичный шар в пространстве l_p^m и для $x = \{x_j\}_{j=1}^m \in R^m$

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j=1}^m |x_j|^p\Big)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Достаточно точные способы дискретизации были предложены в работах [3] и [13], однако отсутствие хороших оценок величины (8) не давало возможности продвинуться в решении задачи о скорости убывания поперечников классов Соболева. Автором в работе [7] (см. также [6]) был предложен метод оценки поперечников (8), а следовательно и (2), основанный на вероятностных соображениях. Кратко этот метод можно описать так: рассматривается достаточно широкое множество $\Omega_{m,n}$ n-мерных подпространств $L \subset R^m$, наделенное мерой μ (например множество всех n-мерных подпространств в R^m с мерой Хаара или множество подпространств $L \subset R^m$, $\dim L = n$, которые в стандартном базисе задаются матрицей с элементами ± 1 и $\mu L = 2^{-mn}$) и оценивается величина

$$I_{p,q} = I_{p,q}(m, n) = \int\limits_{\Omega_{m,n}} \Delta_{l_q^m}(B_p^m, L)\, d\mu.$$

Очевидно, что

$$d_n(B_p^m, l_q^m) = \inf_{L,\, \dim L \leqslant n} \Delta_{l_q^m}(B_p^m, L) \leqslant I_{p,q}. \tag{9}$$

Оказывается, что в ряде случаев разница между левой и правой частью в (9) невелика и точно оценив интеграл $I_{p,q}$, мы получим хорошую оценку поперечника (8). К примеру, указанным методом автором было показано (см. [7], а также статью автора в сборнике [14]), что при любых p и q, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \asymp I_{p,q} \asymp \begin{cases} 1 & \text{если} \quad 1 \leqslant p < q \leqslant 2, \\ n^{-1/2+1/q}, & \text{если} \quad p < 2 < q, \\ n^{-1/p+1/q}, & \text{если} \quad p \geqslant \min(2, q). \end{cases} \tag{10}$$

Из (10) следует, что случайное n-мерное подпространство при любых p и q хорошо аппроксимирует шар B_p^{2n} в метрике l_q^{2n}, в то время как пространство дискретных тригонометрических полиномов той-же раз-

мерности дает хорошее приближение шара B_p^{2n} в l_q^{2n} только при $q \leqslant \max(2, p)$.

С помощью описанного подхода в [7] доказана и

Теорема 1. *При* $m > n$

$$\tfrac{1}{2} n^{-1/2} < d_n(B_2^m, l_\infty^m) < C n^{-1/2} \left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{3/2}.$$

Отметим, что доказать соотношение (10) заметно проще, чем получить достаточно точные (см. теоремы 1 и 4) оценки поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$, $1 \leqslant p \leqslant 2 < q \leqslant \infty$ при m много больше, чем n. В последнем случае требуется подробнее изучить геометрию шаров B_p^m.

Для того, чтобы дать представление о том, какого типа геометрические вопросы возникают при оценках поперечников (8), приведем один результат, полученный в [7] попутно.

Теорема 2. *Для каждого* $m = 1, 2, \ldots$ *найдется такое ортогональное преобразование* T'_m *пространства* R^m, *что*

$$m^{-1/2} \cdot B_2^m \subset B_1^m \cap T'_m(B_1^m) \subset K m^{-1/2} B_2^m,$$

где K — *абсолютная постоянная, а* $a \cdot B_2^m$ — *шар радиуса* a.

Оценки поперечника $d_n(B_2^m, l_\infty^m)$ оказались наиболее важными для приложений. Опираясь на теорему 1 и используя отмеченные выше способы дискретизации, в [7] автор завершил определение порядков поперечников $d_n(W_p^r, L^q)$, $r > 1$. В итоге оказалось, что имеет место

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty, r \cdot p > 1$. *Тогда*

$$d_n(W_p^r, L^q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p \geqslant q \text{ или } 2 < p < q, \\ n^{-r-1/2+1/p}, & \text{если } p \leqslant 2 < q, \\ n^{-r-1/q+1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < q \leqslant 2. \end{cases}$$

Как видно из теоремы 3 и (5) при $q > \max(2, p)$ поперечник (2) существенно меньше, чем $\Delta_{Lq}(W_p^r, T_n)$.

Для полноты рассмотрения вопроса оставалось оценить поперечник (2) при $rp \leqslant 1$, т.е. когда класс W_p^r не компактен в $C(-\pi, \pi)$. Оказалось (см. [9]), что в этом случае поведение поперечника (2) резко меняется и для его точной оценки необходимо знать точные, равномерные по n и m оценки величин (8) при $q > \max(2, p)$. Такие оценки были получены в частном случае $p = 1$ автором [8] и в общем случае Е. Д. Глускиным [4], который, используя описанный выше вероятностный метод, доказал, что справедлива

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant p < q < \infty$, $n < m$. *Тогда*

$$0 < c_1(p, q) \leqslant \frac{d_n(B_p^m, l_q^m)}{\Phi(m, n, p, q)} \leqslant c_2(p, q),$$

где $c_1(p, q)$ *и* $c_2(p, q)$ — *константы, зависящие только от* p *и* q, *а*

$$\Phi(m, n, p, q) = \begin{cases} (\min\{1, m^{1/q} \cdot n^{-1/2}\})^{\frac{1/p-1/q}{1/2-1/q}}, & 2 \leqslant p < q \leqslant \infty, \\ \max\left\{m^{1/q-1/p}, \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{1/2} \cdot \min\{1, m^{1/q} \cdot n^{-1/2}\}\right\}, & \\ & 1 \leqslant p < 2 \leqslant q \leqslant \infty, \\ \max\left\{m^{1/q-1/p}, \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2} \frac{1/p-1/q}{1/p-1/2}}\right\}, & 1 \leqslant p < q \leqslant 2. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом в настоящее время при $q < \infty$ порядки поперечников (8) полностью определены. Вопросы остаются только в случае $q = \infty$; неизвестно, в частности, каков порядок (при $n \to \infty$) величин $d_n(B_p^{n^2}, l_\infty^{n^2})$, $p > 1$.

С помощью теоремы 4 Е. Д. Куланин [11] показал, что справедлива

Теорема 5. *Пусть* $-1/q < r - 1/p \leqslant 0$, $q > \max(2, p)$. *При* $n \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$d_n(W_p^r, L^q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p > 2 \text{ и } r > \frac{1}{2} \cdot \frac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/q}, \\ n^{-\frac{q}{2}\left(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } p > 2 \text{ и } r < \frac{1}{2} \cdot \frac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/q}, \\ n^{-\frac{q}{2}\left(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } p \leqslant 2 \text{ и } rp < 1. \end{cases}$$

Утверждение теоремы 5 при $p = 1$ было получено ранее в [9]. Обратим внимание на то, что в теореме 5 не рассмотрены случаи, когда $rp = 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/q}$, $2 < p < \infty$. Здесь знание порядков величин $d_n(B_p^m, l_q^m)$ не достаточно для точной оценки поперечников классов Соболева. Более того, Е. Д. Куланиным было показано, что для любого $\varepsilon > 0$ и $q \in (2, \infty)$ найдутся такие постоянные $c_{q,\varepsilon}$ и C_q', что

$$0 < c_{q,\varepsilon} \cdot n^{-1/2} \cdot \ln^{1/2-\varepsilon} n < d_n(W_1^1, L^q) \leqslant C_q' \cdot n^{-1/2} \cdot \ln n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

т.е. в оценках для поперечника (2) могут по существу возникать множители вида $\ln^{\gamma} n$. Интересно сравнить оценки (3) и (12).

Коснемся теперь вопроса о линейных поперечниках. Вероятностный подход оказался применимым и в задаче о порядках при $n \to \infty$ величин $\delta_n(W_p^r, L^q)$ и $\delta_n(B_p^m, l_q^m)$. Е. Д. Глускин [4], усиливая более ранний результат Хеллига [19], показал, что справедлива

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $(p, q) \neq (1, \infty)$, $n < m$. *Тогда*

$$0 < c_3(p, q) < \frac{\delta_n(B_p^m, l_q^m)}{\Psi(m, n, p, q)} \leqslant c_4(p, q),$$

где $c_3(p, q)$ *и* $c_4(p, q)$ — *постоянные зависящие только от* p *и* q, *и* (см. (11))

$$\Psi(m, n, p, q) = \begin{cases} \Phi(m, n, p, q), & \text{если } 1 \leqslant p < q \leqslant p', \\ \Phi(m, n, q', p'), & \text{если } \max\{p, p'\} < q, \end{cases}$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Теорема 6 выясняет порядки поперечников $\delta_n(B_p^m, l_q^m)$ во всех случаях за исключением случая $p = 1$, $q = \infty$ (отметим, что $\delta_n(B_1^m, l_\infty^m) = d_n(B_1^m, l_\infty^m)$). Окончательный результат о порядках линейных поперечников классов $W_p^r, r > 1$ был получен В. Е. Майоровым [13] и Хеллигом [19]:

Теорема 7. *Пусть* $r > 1$ *и* $p < 2 < q$. *Тогда*

$$\delta_n(W_p^r, L^q) \asymp n^{-r+1/p-1/q-\beta}, \quad \text{где}$$
$$\beta = \beta(p, q) = \min\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

Ранее было известно (см. [5]), что при $p > 2$ или $q < 2$ $\delta_n(W_p^r, L^q) \asymp \Delta_{L^q}(W_p^r, T_n)$. Отметим (см. теоремы 3 и 7), что линейные поперечники классов $W_p^r, p > 1$ в пространстве $C(-\pi, \pi)$ существенно больше, чем поперечники по А. Н. Колмогорову.

В настоящее время ясно, что использование случайных подпространств дает возможность определить порядки поперечников для широкого класса компактов. Некоторым недостатком вероятностного подхода является невозможность явного указания подпространства, хорошо аппроксимирующего компакт. Поэтому естественно возникает

вопрос (см. [14], стр. 320, а также [2]) о конструктивном доказательстве теоремы 3.

В заключение отметим, что рассмотренная нами задача о поперечниках классов Соболева имеет отчасти модельный характер и ставится конечно и для других классов функций. При этом может возникнуть потребность в изучении поперечников конечномерных множеств более сложного, чем шары B_p^m вида. Вместе с тем, применения оценок величин (8) не ограничиваются случаем классов W_p^r. Так, используя теорему 1 и ее следствия, В. Н. Темляков [17] определил порядки поперечников в пространствах $L^q(T^s)$, $1 < q < \infty$ классов $H_{p,\bar{a}}^r$ $(p > 1)$ — функций s переменных представимым в виде свертки:

$$H_{p,\bar{a}}^{\bar{r}} = \left\{f(x)\colon f(x) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int\limits_{T^s} \varphi(y)\cdot F_{\bar{r}}(x-y, \bar{a})\,dy,\ \|\varphi\|_{L^q(T^s)} \leqslant 1\right\},$$

где $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_s)$, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant s} r_j > 1$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ и ядро определяется равенством

$$F_r(x, \bar{a}) = 2^s \sum_k \prod_{j=1}^s k_j^{-r_j}\cdot\cos(k_j\cdot x_j + \tfrac{1}{2}a_j\cdot\pi),$$

в котором суммирование производится по всем наборам $k = (k_1, \ldots, k_s)$, $k_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Открытой здесь остается, возникшая в начале 60-х годов, задача о порядках поперечников $d_n\big(H_{p,\bar{a}}^{\bar{r}}, C(T^s)\big)$.

Литература

[1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, изд-во „Наука", Москва, 1975.

[2] de Boor C., DeVore R., and Höllig K., Mixed norm n-width, *Proc. Amer. Math. Soc.* **80** (1980), стр. 577–583.

[3] Глускин Е. Д., Об одной задаче о поперечниках, *Доклады АН СССР* **219**, № 3 (1974), стр. 527–530.

[4] Глускин Е. Д., Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств, *Матем. сборник* **120**, № 2 (1983), стр. 180–189.

[5] Исмагилов Р. С., Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами, *Успехи матем. наук* **29**, № 3 (1974), стр. 161–178.

[6] Кашин Б. С., О колмогоровских поперечниках октаэдров, *Доклады АН СССР* **214**, № 5 (1974), стр. 1024–1026.

[7] Кашин Б. С., Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов

гладких функций, *Известия АН СССР* (*сер. матем.*) **41**, № 2 (1977), стр. 334–351.

[8] Кашин Б. С., О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m, *Известия АН Арм. ССР* (*сер. матем.*) **15**, № 5 (1980), стр. 379–394.

[9] Кашин Б. С., О поперечниках классов Соболева малой гладкости, *Вестник МГУ* (*сер. матем., механ.*) № **5** (1981), стр. 50–54.

[10] Kolmogoroff A., Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, *Annals of Math.* **37**, № 1 (1936), стр. 107–111.

[11] Куланин Е. Д., Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости, *Вестник МГУ* (*Сер. матем., механ.*) № 2 (1983), стр. 24–30.

[12] Майоров В. Е., Дискретизация задачи о поперечниках, *Успехи матем. наук* **30**, № **6** (1975), стр. 179–180.

[13] Майоров В. Е., О линейных поперечниках соболевских классов, *Доклады АН СССР* **243**, № 5 (1978), стр. 1127–1130.

[14] *Quantitative approximation* (Proceedings of Bonn symposium, August 20–24, 1979), Academic Press, New York, 1980.

[15] Rudin W., L^2-approximation by partial sums of orthogonal developments, *Duke Math. J.* **19**, № 1 (1952), стр. 1–4.

[16] Стечкин С. Б., О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, *Успехи матем. наук* **9**, № 1 (1954), стр. 133–134.

[17] Темляков В. Н., Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных, *Доклады АН СССР* **267**, № 2 (1982), стр. 314–317.

[18] Тихомиров В. М., *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во „МГУ", Москва, 1976.

[19] Höllig K., Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen, *Math. Annalen* **242** (1979), стр. 273–281.