УДК 517.55

Об однородных полиномах многих переменных на комплексной сфере

Кашин Б. С.

Пусть $\mathbf{C}^d$ — d-мерное комплексное пространство ($\mathbf{C}^1=\mathbf{C}$), B^d — открытый единичный шар в $\mathbf{C}^d$, $S^d\equiv\partial B^d$, т. е.

$$z=(z_1,\ \ldots,\ z_d)\in S^d\Leftrightarrow|z|^2\equiv\sum_{j=1}^{d}|z_j|^2=1;\quad z_j\in\mathbf{C}.$$

Пусть также $E(d,\ N)$ — множество упорядоченных наборов целых чисел:

$$E(d,\ N)=\left\{(k_1,\ \ldots,\ k_d)\colon k_j\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant d,\ \sum_{j=1}^{d}k_j=N\right\}.$$

Отметим, что число элементов $|E(d,\ N)|\asymp N^{d-1}$, если d фиксировано, а $N\to\infty$. Наконец, пусть $C(S^d)$ и $L^2(S^d)$ — пространства функций соответственно непрерывных на сфере S^d и суммируемых с квадратом по естественной (инвариантной относительно вращений, нормированной) мере на S^d.

В этой заметке устанавливаются некоторые свойства полиномов вида

$$P(z)=\sum_{(k_1,\ldots,k_d)\in E(d,N)}a_{k_1,\ldots,k_d}z_1^{k_1}\ldots z_d^{k_d};\qquad z\in S^d. \tag{1}$$

Рассматриваемые здесь вопросы прямо связаны с темой работ Войташчика — Рыля [1] и А. Б. Александрова [2].

В [1] установлено, что для $d=2,\ 3,\ \ldots$ и $N=1,\ 2,\ \ldots$ существует полином $P_N(z)$ вида (1) такой, что

$$\|P_N(z)\|_{L^2(S^d)}\leqslant\|P_N(z)\|_{C(S^d)}\leqslant K_d\|P_N(z)\|_{L^2(S^d)},$$

где K_d — константа, зависящая только от d.
В [2] показано, что на основе этого результата могут строиться непостоянные внутренние функции в шаре B^d, $d=2,\ 3,\ \ldots$ (голоморфная и ограниченная в B^d функция f называется внутренней, если $\lim\limits_{r\to 1}|f(rz)|=1$ для почти всех $z\in S^d$). Существование непостоянных внутренних функций в B^d, $d=2,\ 3,\ \ldots$, было доказано ранее другими методами А. Б. Александровым [3] и Ловом [4].

Построение полиномов P_N в [1] основывалось на соображениях геометрии конечномерных нормированных пространств. Несколько раньше геометрический подход применялся автором [5], [6] (см. также [11]) для построения тригонометрических полиномов $t_N(x)$, $N=1,\ 2,\ \ldots$, с

$$\|t_N\|_{C(-\pi,\pi)}\asymp\|t_N\|_{L^2(-\pi,\pi)}\asymp N^{-1/2}\sum_{k=-N}^{N}|\hat{t}_N(k)|, \tag{2}$$

$$t_N\in T_N\equiv\left\{t(x)\colon t(x)=\sum_{k=-N}^{N}\hat{t}(k)\,e^{ikx},\ x\in(-\pi,\ \pi)\right\}.$$

Существование таких полиномов было установлено еще в 1914 г. С. Н. Бернштейном и систематически используется в теории тригонометрических рядов. Из результатов работ [5], [6] вытекало, что полиномы t_N со свойством (2) можно найти в каждом подпространстве $L \subset T_N$ большой размерности: $\dim L \geqslant cN$, $c > 0$. Легко видеть, что задача о построении полиномов $t_N(x)$, $N=1, 2, \ldots,$ со свойством (2) эквивалентна задаче о построении полиномов $P_N = P_N(z)$, $N=1, 2, \ldots$, вида (1) (при $d=2$), для которых

$$\|P_N\|_{C(\partial U^2)} \asymp \|P_N\|_{L^2(\partial U^2)} \asymp N^{-1/2} \sum_{k_1=0}^{N} |a_{k_1, N-k_1}|, \tag{3}$$

где $U^d = \{z \in \mathbf{C}^d: |z_j| < 1, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ (в отличие от случая шара, вопрос о существовании последовательности полиномов $P_N(z_1, z_2)$, $N=1, 2, \ldots$, для которых имеет место только левая эквивалентность в (3), тривиален: таким свойством обладают мономы $z_1^k z_2^{N-k}$).

После опубликования работ [5], [6] автором было замечено (см. в частности, [7, с. 53]), что для построения тригонометрических полиномов с некоторыми экстремальными свойствами типа свойства (2) может быть с успехом применено следующее несложное

Утверждение 1. *Для любого набора векторов* $\{e_i\}_{i=1}^m \subset S^n$, $e_i = \{(e_i)_j\}_{j=1}^n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *с* $m \leqslant n\rho$ *найдется вектор* $e_0 = \{(e_0)_j\} \in S^n$ *с* $\operatorname{Im}(e_0)_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *и такой, что*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} (e_0)_j (e_i)_j \right| \leqslant C_\rho \cdot n^{-1/2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4}$$

Утверждение 1 применялось в [8] для получения кратных аналогов результатов из [5]. В этой заметке с помощью утверждения 1 доказывается следующее обобщение теоремы Войташчика – Рыля:

Теорема 1. *Для каждых* $\delta > 0$ *и* $d=2, 3, \ldots$ *найдется постоянная* $K = K(\delta, d)$ *такая, что для любого множества* $\Lambda \subset E(d, N)$ *с* $|\Lambda| > \delta N^{d-1}$ *найдется полином*

$$P_\Lambda = P_\Lambda(z) = \sum_{(k_1, \ldots, k_d) \in \Lambda} a_{k_1, \ldots, k_d} z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{k_d}$$

с

$$\|P_\Lambda\|_{L^2(S^d)} \leqslant \|P_\Lambda\|_{C(S^d)} \leqslant K(\delta, d) \|P_\Lambda\|_{L^2(S^d)}.$$

Возможность применения утверждения 1 для получения теоремы 1 основывается на следующем результате, имеющем и самостоятельный интерес:

Утверждение 2. *Для* $d=2, 3, \ldots$ *и* $N=1, 2, \ldots$ *на сфере* S^d *можно указать множество точек* $\Omega(d, N) = \{z^{(\nu)}, 1 \leqslant \nu \leqslant \nu(d, N)\}$ *такое, что* 1) $\nu(d, N) \leqslant C_d \cdot N^{d-1}$, $N=1, 2, \ldots$, *и* 2) *для любого полинома вида* (1) *имеет место соотношение*

$$\|P\|_{C(S^d)} \leqslant 2 \max_{z \in \Omega(d, N)} |P(z)|. \tag{5}$$

Доказательство утверждения 2. Легко видеть, что достаточно найти множество $\Omega(d, N) \subset S^d$ с $|\Omega(d, N)| \leqslant K_d N^{d-1}$, обладающее тем свойством, что (5) имеет место для любого такого полинома вида (1), что

$$\|P\|_{C(S^d)} = |P(z^{(0)})|, \; z^{(0)} = \{z_j^{(0)}\} \in S^d, \; |z_j^{(0)}| \leqslant |z_d^{(0)}|, \; 1 \leqslant j < d. \tag{6}$$

Положим $v_j = z_j/z_d$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, тогда для полинома (1) и $z \in S^d$ имеет место равенство

$$|P(z)| = |f_P(v_1, \ldots, v_{d-1})| \equiv$$
$$\equiv \left| \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} |v_j|^2\right)^{-N/2} \sum_{(k_1, \ldots, k_{d-1})} b_{k_1, \ldots, k_{d-1}} v_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot v_{d-1}^{k_{d-1}} \right|, \tag{7}$$

где $b_{k_1, \ldots, k_{d-1}} = a_{k_1, \ldots, k_d}$ и суммирование в (7) проходит по всем наборам целых чисел $\{k_j\}_{j=1}^{d-1}$ с $k_j \geqslant 0$, $\sum k_j \leqslant N$.

Таким образом (см. также (6)), нам достаточно найти множество точек $\Omega' = \Omega'(d, N) \subset U^{d-1}$ с $|\Omega'| \leqslant K_d \cdot N^{d-1}$ такое, что для любой функции $f_P(v_1, \ldots, v_{d-1})$ вида (7) с

$$\|f_P\|_{C(\mathbf{C}^{d-1})} = f(v_1^0, \ldots, v_{d-1}^0), \ |v_j| \leqslant 1, \ 1 \leqslant j \leqslant d-1, \tag{8}$$

верно неравенство

$$\|f_P\|_{C(\mathbf{C}^{d-1})} \leqslant 2 \cdot \max_{(v_1, \ldots v_{d-1}) \in \Omega'} |f^P(v_1, \ldots, v_{d-1})|$$

(затем для каждой точки $(v_1, \ldots, v_{d-1}) \in \Omega'$ определим точку $z \in S^d$:

$$|z_d| = \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} |v_j|^2\right)^{-1/2}, \ \operatorname{Arg} z_d = 0, \ z_j = z_d v_j, \ 1 \leqslant j \leqslant d-1;$$

совокупность этих точек и составит множество $\Omega(d, N)$). В свою очередь существование множества $\Omega'(d, N)$ непосредственно вытекает из следующего факта:

для каждого $d = 2, 3, \ldots$ найдется постоянная $\varepsilon = \varepsilon_d > 0$ такая, что для любой функции $f_P(v_1, \ldots, v_{d-1})$ со свойством (8)

$$|f_P(v_1, \ldots, v_{d-1})| \geqslant \frac{1}{2} |f_P(v_1^0, \ldots, v_{d-1}^0)|, \text{ если } \left(\sum_{j=1}^{d-1} |v_j - v_j^0|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon N^{-1/2} \tag{$*$}$$

(из $(*)$ следует, что в качестве $\Omega'(d, N)$ можно взять любое множество, образующее $\varepsilon N^{-1/2}$ сеть в U^{d-1}).

Докажем $(*)$. При этом не ограничивая общности считаем, что

$$\|f_P\|_{C(\mathbf{C}^{d-1})} = |f(v_1^0, \ldots, v_{d-1}^0)| = f(v_1^0, \ldots, v_{d-1}^0) = 1. \tag{9}$$

Отметим прежде всего, что для любых комплексных чисел v_j, ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant d-1$,

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} |v_j + \xi_j|^2\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} |v_j - \xi_j|^2\right) \leqslant \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} [|v_j|^2 + |\xi_j|^2]\right)^2. \tag{10}$$

Рассмотрим полином

$$q(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) = R(v_1^0 + \xi_1, \ldots, v_{d-1}^0 + \xi_{d-1}), \tag{11}$$

где полином $R(v_1, \ldots, v_{d-1})$ указан в числителе правой части равенства (7). Пусть также

$$Q(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) = q(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) q(-\xi_1, \ldots, -\xi_{d-1}). \tag{12}$$

Тогда (см. (7), (9))

$$\begin{gathered} q^2(0, \ldots, 0) = Q(0, \ldots, 0) = \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0|^2\right)^N \equiv V^N, \\ |q(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})| \leqslant \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0 + \xi_j|^2\right)^{N/2} \end{gathered} \tag{13}$$

и

$$|Q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})| \leqslant \left(1+\sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0+\xi_j|^2\right)^{N/2} \left(1+\sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0-\xi_j|^2\right)^{N/2}.$$

Поэтому (см. (10)), если $\sum_{j=1}^{d-1} |\xi_j|^2 \leqslant N^{-1}$, то

$$|Q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})| \leqslant \left(1+\sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0|^2+1/N\right)^N \leqslant eV^N. \tag{14}$$

Далее, пусть $\xi_j = x_{2j-1}+i\,x_{2j}$, $1\leqslant j\leqslant d-1$, тогда функция

$$F(x) \equiv \operatorname{Re} Q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}), \quad x=(x_1, \dots, x_{2(d-1)})$$

— гармоническая функция переменных x_j, $1\leqslant j\leqslant 2(d-1)$. Следовательно, по формуле Пуассона (см. [9, с. 56]) для $(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \in rB^{d-1}$, $r=N^{-1/2}$

$$F(x) = r^{2(d-1)-2} \int_\Sigma F(rs) \frac{r^2-|x|^2}{|x-rs|^{2(d-1)}}\, ds,$$

где $|x| = \left(\sum_{j=1}^{2(d-1)} x_j^2\right)^{1/2}$, Σ — единичная сфера в $R^{2(d-1)}$, $s\in\Sigma$, а интегрирование ведется по нормированной мере Лебега на Σ. В частности (см. (13)),

$$V^N = \operatorname{Re} Q(0, \dots, 0) = \int_\Sigma F(rs)\, ds, \tag{15}$$

при этом (см. (14)) для любого $s\in\Sigma$

$$|F(rs)| \leqslant eV^N. \tag{16}$$

Легко видеть, что

$$\left| r^{2d-4} \frac{r^2-|x|^2}{|x-rs|^{2d-2}} - 1 \right| < \frac{1}{3e}, \quad |x| < \varepsilon_0 r, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(d) > 0,$$

поэтому (см. также (15), (16)) при $|x| < \varepsilon_0 r$

$$|F(x)| = \left| \int_\Sigma F(rs)\, ds - \int_\Sigma \left(1 - r^{2d-4} \frac{r^2-|x|^2}{|x-rs|^{2d-2}}\right) F(rs)\, ds \right| \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{Re} Q(0, \dots, 0) - \sup_{s\in\Sigma} |F(rs)| \cdot \frac{1}{3e} > \frac{2}{3} V^N.$$

Но тогда (см. (10))

$$|q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})\, q(-\xi_1, \dots, -\xi_{d-1})| \geqslant \frac{2}{3} V^N >$$

$$> \frac{1}{2}\left(1+\sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0+\xi_j|^2\right)^{N/2} \left(1+\sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0-\xi_j|^2\right)^{N/2},$$

если $(\sum |\xi_j|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_1 N^{-1/2}$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(d)$ — достаточно мало $(0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0)$, и, следовательно (см. (13)),

$$q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \left(1+\sum_{j=1}^{d-1} |v_j^0+\xi_j|^2\right)^{\frac{-N}{2}} \geqslant \frac{1}{2},$$

как только $(\sum |\xi_j|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_1 N^{-1/2}$. Тем самым соотношение $(*)$, а значит, и утверждение 2 доказаны.

Замечание. Из соотношения $(*)$ следует, что для любого полинома вида (1)

$$|P(z_1, \ldots, z_d)| \geqslant \frac{1}{2}\|P\|_{C(S^d)}, \text{ если } \sum_{j=1}^{d} |z_j^{(0)}-z_j|^2 \leqslant \varepsilon_d N^{-1},$$

$\varepsilon_d > 0$, и в точке $(z_1^0, \ldots, z_d^0)$ имеет место равенство (6).

Доказательство теоремы 1. Используем попарную ортогональность мономов $z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{k_d}$ на сфере S^d (см. [10]), в силу которой для любого полинома P вида (1)

$$\|P\|_{L^2(S^d)} = \sum_{(k_1,\ldots,k_d)\in E(d,N)} |a_{k_1,\ldots,k_d}|^2 \frac{k_1!\,,\ldots k_d!}{(N+d-1)!}. \qquad (17)$$

Отметим еще, что для $(z_1, \ldots, z_d)\in S^d$

$$1 = \left(\sum_{j=1}^{d} |z_j|^2\right)^N = \sum_{(k_1,\ldots,k_d)\in E(d,N)} |z_1|^{2k_1} \ldots |z_d|^{2k_d} \frac{N!}{k_1!\ldots k_d!}. \qquad (18)$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{j_0}$, $j_0 = |\Lambda| \geqslant \delta N^{d-1}$,— занумерованные произвольным образом мономы $p = z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{k_s}$, $(k_1, \ldots, k_d)\in\Lambda$, и пусть $A(p) = N!\,[k_1! \cdot \ldots \cdot k_d!]^{-1}$.

Для каждой точки $z^{(\nu)}\in\Omega(d, N)$ (см. утверждение 2) определим вектор $e_\nu = \{(e_\nu)_j\}_{j=1}^{j_0}$:

$$(e_\nu)_j = p_j(z^{(\nu)})\{A(p_j)\}^{1/2} \cdot \{(N+1)\ldots(N+d-1)\}^{1/2},\ 1 \leqslant j \leqslant j_0.$$

Тогда (см. (18))

$$\sum_{j=1}^{j_0} |(e_\nu)_j|^2 \leqslant C_d' N^{d-1},\ \nu = 1, 2, \ldots, |\Omega(d, N)|,$$

поэтому, в силу утверждения 1 и оценки $|\Omega(d, N)| \leqslant C_d N^{d-1}$, найдется вектор $e_0 = \{(e_0)_j\}_{j=1}^{j_0}\in S^{j_0}$ такой, что

$$\left|\sum_{j=1}^{j_0} (e_0)_j (e_\nu)_j\right| \leqslant C_\rho,\ 1 \leqslant \nu \leqslant |\Omega(d, N)|,\ \rho = \rho(d). \qquad (19)$$

Положим

$$P_\Lambda(z) = \sum_{j=1}^{|\Lambda|} (e_0)_j \{A(p_j)(N+1)\ldots(N+d-1)\}^{1/2} p_j(z).$$

Тогда (см. утверждение 2 и (19)) $\|P_\Lambda\|_{C(S^d)} \leqslant 2C_\rho$ и (см. (17)) $\|P_\Lambda\|_{L^2(S^d)} = [(d-1)!]^{1/2}$. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Ryll J., Wojtaszczyk P.* On homogeneous polynomials on a complex ball.— Trans. A. M. S., 1983, v. 276, № 1, p. 107—116.
2. *Александров А. Б.* Внутренние функции на компактных пространствах.— Функцион. анализ, 1984, т. 18, № 2, с. 1—13.
3. *Александров А. Б.* Существование внутренних функций в шаре.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 147—163.
4. *Low E.* A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbf{C}^n$.— Invent. math., 1982, v. 67, № 2, p. 223—229.
5. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой.— Тр. МИАН, 1980, т. 145, с. 111—116.

6. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов, связанных с равномерной сходимостью.— Сообщ. АН Груз. ССР, 1979, т. 93, № 2, с. 281—284.
7. *Кашин Б. С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости.— Вестн. МГУ, сер. матем., механ., 1981, № 5, с. 50—54.
8. *Корегин А. Ф.* Об абсолютной сходимости кратных тригонометрических рядов с лакунами.— Вестн. МГУ, сер. матем., механ., 1985, № 2.
9. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
10. *Rudin W.* Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$. Berlin — N. Y., 1980.
11. *Олевский А. М.* Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 4, с. 796—799.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1984