МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 14, № 5 (1973), 645—654

УДК 517.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ

Б. С. Кашин

В работе изучаются свойства функциональных рядов, безусловно сходящихся почти всюду на [0,1]. Доказывается, в частности, следующая теорема: пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится безусловно почти всюду, тогда найдется последовательность $\{\beta_k\}_1^{\infty}, \beta_k \uparrow \infty$ такая, что если $\lambda_k \leqslant \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(x)$ безусловно сходится почти всюду. Библ. 4 назв.

Сначала напомним некоторые определения.

Пусть B — некоторое пространство Банаха. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (x_k \in B) \tag{1}$$

называют *безусловно сходящимся*, если он сходится (по норме пространства B) при всех перестановках членов. Пусть, далее, нам дан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \tag{2}$$

где $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — конечные почти всюду и измеримые функции на некотором множестве $E \subset (-\infty, \infty)$. Тогда ряд (2) называют *безусловно сходящимся почти всюду* на E (п. в. на E), если после каждой перестановки его членов вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) \tag{3}$$

сходится почти всюду на E. При этом множество (меры нуль) точек расходимости ряда (3) зависит, вообще говоря, от перестановки $\{n_k\}$.

Орлич (см. [1], стр. 42) доказал, что для безусловной сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы был сходящимся (в B) всякий частичный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{p_k} \qquad (p_1 < p_2 < \ldots).$$

Отсюда сразу вытекает, что сходимость рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k \tag{4}$$

при любых выборах $\varepsilon_k = \pm 1$ является также необходимым и достаточным условием для безусловной сходимости ряда (1). Такого же типа утверждение верно и для безусловной сходимости по мере рядов вида (2) (см. Орлич [3]). Нетрудно убедиться, используя сходимость всех рядов вида (4), что если ряд (1) безусловно сходится, то таким же свойством обладает и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

при любых $\{\lambda_k\}$ с $|\lambda_k| \leqslant c = \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

В свое время такого типа вопросы возникли относительно рядов вида (2). Очевидно, что если ряд (2) безусловно сходится почти всюду на E, то тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(x) \tag{5}$$

будет сходиться почти всюду на E при любом выборе последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. Довольно длительное время было неизвестно, является ли сходимость почти всюду на E всех рядов вида (5) достаточным условием для безусловной сходимости почти всюду ряда (2). Отрицательный ответ на этот вопрос был дан П. Л. Ульяновым (см. [2], теорема 5). Сказанное выше указывает на принципиальное отличие безусловной сходимости рядов в пространствах Банаха от безусловной сходимости почти всюду. В связи с этим П. Л. Ульяновым была сообщена нам задача: если ряд (2) безусловно сходится почти всюду на множестве E, то обязан ли таким же свойством обладать всякий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(x) \tag{6}$$

с $|\lambda_k| \leqslant c = \text{const} < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если ряд* (2) *безусловно сходится почти всюду на множестве* E, *то при любых* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$ *ряд* (6) *также безусловно сходится почти всюду на* E.

Ясно, что безусловная сходимость п. в. на E ряда (2) эквивалентна безусловной сходимости п. в. на E всех рядов вида (5). Поэтому теорема 1 является следствием следующего утверждения:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть ряд* (5) *сходится п. в. на* E *для любых выборов* $\varepsilon_k = \pm 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Тогда ряд* (6) *сходится п. в. на* E *при любых* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$.

Для доказательства теоремы 2 убедимся сначала, что имеет место

ЛЕММА. *Пусть даны функции* $f_i(x) \in L^2(E)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *и числа* λ_i *с* $|\lambda_i| \leqslant 1$ *при* $1 \leqslant i \leqslant m$. *Тогда существует набор* $\varepsilon_i = \pm 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *такой, что*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f_i \right\|_{L^2(E)}^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{k} \| f_i \|_{L^2(E)}^2 \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{7}$$

Доказательство леммы будем вести по индукции. При $k = 1$ лемма очевидна. Пусть $1 \leqslant k < m$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ с $1 \leqslant i \leqslant k$ выбраны так, что неравенство (7) справедливо. Положив

$$g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f_i,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f_i - f_{k+1} = \\ = g + (\lambda_{k+1} - 1) f_{k+1} \quad (\text{здесь } \varepsilon_{k+1} = 1),$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f_i + f_{k+1} = \\ = g + (\lambda_{k+1} + 1) f_{k+1} \quad (\text{здесь } \varepsilon_{k+1} = -1),$$

где, по предположению, норма

$$\|g\|^2_{L^2} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{k} \|f_i\|^2_{L^2}. \tag{8}$$

Нам достаточно доказать, что (см. (8)) либо

$$\|g + (\lambda_{k+1} - 1) f_{k+1}\|^2_{L_2} \leqslant \|g\|^2_L + 4\|f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{k+1} \|f_i\|^2_{L^2},$$

либо

$$\|g + (\lambda_{k+1} + 1) f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant \|g\|^2_{L^2} + 4\|f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{k+1} \|f_i\|^2_{L^2},$$

но

$$\|g + (\lambda_{k+1} - 1) f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant \int_E (g + (\lambda_{k+1} - 1) f_{k+1})^2\, dx \doteq$$

$$= \int_E g^2\, dx + (\lambda_{k+1} - 1)^2 \int_E f^2_{k+1}\, dx + 2(\lambda_{k+1} - 1) \int_E fg\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|^2_{L^2} + 4\|f_{k+1}\|^2_{L^2} + 2(\lambda_{k+1} - 1) \int_E fg\, dx. \tag{9}$$

Аналогично

$$\|g + (\lambda_{k+1} + 1) f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|^2_{L^2} + 4\|f_{k+1}\|^2_{L^2} + 2(\lambda_{k+1} + 1) \int_E fg\, dx. \tag{9'}$$

Так как $|\lambda_{k+1}| < 1$, то либо $2(\lambda_{k+1} - 1) \int_E fg\, dx \leqslant 0$, либо $2(\lambda_{k+1} + 1) \int_E fg\, dx \leqslant 0$. Но тогда из (9) и (9′) вытекает, что либо

$$\|g + (\lambda_{k+1} - 1) f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant \|g\|^2_{L^2} + 4\|f_{k+1}\|^2_{L^2},$$

либо

$$\|g + (\lambda_{k+1} + 1) f_{k+1}\|^2_{L^2} \leqslant \|g\|^2_{L^2} + 4\|f_{k+1}\|^2_{L^2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Не ограничивая общности мы можем считать, что $E = [0, 1]$. Допустим, что теорема 2 не имеет места. Тогда существует ряд вида (2), для которого все ряды (5) сходятся п. в. на $[0, 1]$ и, однако, ряд (6) при некоторых $\{\lambda_k\} \in l_\infty$ с $|\lambda_k| \leqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ расходится в каждой точке некоторого множества $A \subset [0, 1]$ с мерой $\mu A > 0$. По теореме Орлича (см. [3]) из сходимости всех рядов (5) вытекает, что

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(x) < \infty$ для п. в. $x \in [0, 1]$. Стало быть, найдется множество $A_1 \subset [0, 1]$ такое, что $\mu A_1 > 1 - \mu A$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_1} f_k^2(x) < \infty$.

Положим $A_2 = A \cdot A_1$ и $g_k(x) = f_k(x) \cdot \chi_{A_1}(x)$, где $\chi_{A_1}(x)$ — характеристическая функция множества A_1. Тогда мы имеем:

а) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g_k(x)$ сходится п. в. на отрезке $[0, 1]$ при любых выборах $\varepsilon_k = \pm 1$,

б) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k(x)$ расходится в каждой точке множества A_2, где $\mu A_2 > 0$, (10)

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|_{L^2(0,1]}^2 < \infty$.

Покажем, что условия а), б) и в) из (10) не могут выполняться одновременно. Тем самым мы придем к противоречию. Сначала отметим, что из п. б) условия (10) вытекает существование числа $\varepsilon_0 > 0$, множества $A_3 \subset A_2$ с мерой $\mu A_3 > 0$, последовательностей натуральных чисел $1 = M_1 < \ldots < M_\nu < \ldots$ и измеримых на $[0, 1]$ функций $N_\nu(x)$ с $M_\nu \leqslant N_\nu(x) < M_{\nu+1}$ таких, что

$$\left| \sum_{k=M_\nu}^{N_\nu(x)} \lambda_k g_k(x) \right| \geqslant \varepsilon_0 \text{ при всех } \begin{cases} x \in A_3, \\ \nu = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{11}$$

(см. примерное рассуждение в статье [4], стр. 817—819).

Пусть

$$\delta_\nu = \sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1} \| g_k \|_{L^2(0,1)}^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Из (10), п. в), следует, что $\delta_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. Фиксируем число ν. Введем последовательность функций $U_k(x)$ с $M_\nu \leqslant k < M_{\nu+1}$, положив для $x \in [0, 1]$

$$U_k(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{при } k \leqslant N_\nu(x), \\ 0 & \text{при } k > N_\nu(x). \end{cases} \tag{12}$$

Функции $U_k(x)$ измеримы на $[0, 1]$ в силу того, что измеримы функции $N_\nu(x)$. При таком определении $U_k(x)$

получаем, что (см. (11))

$$\Big|\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\lambda_k U_k(x)\Big|\geqslant \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad x\in A_3. \tag{13}$$

Согласно лемме найдется набор $\{\varepsilon_k\}_{M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}$ с $\varepsilon_k=\pm 1$ такой, что (см. (12))

$$\Big\|\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\lambda_k U_k(x)-\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\varepsilon_k U_k(x)\Big\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\|U_k\|^2_{L^2}\leqslant 4\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\|g_k(x)\|^2_{L^2(0,1)}=4\delta_\nu.$$

Стало быть, по неравенству Чебышева имеем

$$\mu\mathcal{J}_\nu\equiv\mu\Big\{x\colon x\in[0,1],\ \sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\lambda_k U_k(x)-$$

$$-\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\varepsilon_k U_k(x)\Big|>\frac{\varepsilon_0}{2}\Big\}<4\delta_\nu\left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^2.$$

Но $\delta_\nu\to 0$ и поэтому $\mu\mathcal{J}_\nu<\frac{1}{2}\mu A_3$ при $\nu>\nu_0$.

Отсюда следует, что

$$\Big|\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\lambda_k U_k(x)-\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\varepsilon_k U_k(x)\Big|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{14}$$

при $x\in A_3-\mathcal{J}_\nu$ и $\nu>\nu_0$.

Из (13) и (14) вытекает, что

$$\Big|\sum_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}\varepsilon_k U_k(x)\Big|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{при} \quad x\in A_3-\mathcal{J}_\nu \quad \text{и} \quad \nu>\nu_0$$

или (см. (12))

$$\Big|\sum_{k=M_\nu}^{N_\nu(x)}\varepsilon_k g_k(x)\Big|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{при } x\in A_3-\mathcal{J}_\nu \text{ и } \nu>\nu_0. \tag{15}$$

Пусть $D=\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}(A_3-\mathcal{J}_\nu)$. Так как мера $\mu(A_3-\mathcal{J}_\nu)\geqslant\frac{1}{2}\mu A_3$ при $\nu\geqslant\nu_0$, то $\mu D\geqslant\frac{1}{2}\mu A_3$.

Для каждого $\nu = 1, 2, \ldots$ мы построили набор $\{\varepsilon_k\}_{k=M_\nu}^{M_{\nu+1}-1}$ и тем самым построили ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g_k(x)$, который (см. (15)) расходится в каждой точке множества D, что противоречит п. а) из (10).

Теорема доказана.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 2, то существует последовательность* $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $\beta_k \uparrow \infty$ *при* $k \to \infty$, *для которой ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(x)$ *сходится п. в. на* E, *как только* $|\lambda_k| \leqslant \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Замечание. Используя лемму, легко убедиться, что если ряд (2) при любом выборе знаков сходится по мере на E, то ряд (6) сходится по мере на E при любых $\{\lambda_k\} \in l_\infty$.

Хорошо известно, что сходимость по мере последовательностей измеримых функций, определенных на отрезке (0, 1), можно задать метрикой. Например, за расстояние по мере можно взять

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx. \tag{16}$$

Легко убедиться, что ряд (2) почти всюду сходится на отрезке (0, 1) тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $\widetilde{N}_0 = \widetilde{N}_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\rho\left(0, \sum_{k=M}^{N(x)} f_k(x)\right) < \varepsilon \quad \text{для любого числа } M > \widetilde{N}_0 \tag{17}$$

и любой ограниченной измеримой на $[0, 1]$ целочисленной функции $N(x)$ с $N(x) \geqslant M$ при $x \in [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ряд* (2) *безусловно сходится почти всюду на отрезке* (0, 1). *Тогда существует последовательность* $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ с $\beta_k \uparrow \infty$ *при* $k \to \infty$ *такая, что ряд* (6) *безусловно сходится п. в. на* (0, 1), *как только*

$$|\lambda_k| \leqslant |\beta_k| \quad \textit{при} \quad k \geqslant 1.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 нам достаточно найти такую последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$

с $\beta_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k f_k(x) \tag{18}$$

сходится безусловно почти всюду на $(0, 1)$. Построим такую последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из безусловной сходимости п. в. ряда (2) следует (см. (17)), что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_0 = N_0(\varepsilon)$ такое, что при любой перестановке $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурального ряда чисел расстояние

$$\rho\left(0, \sum_{k=M_1(x)}^{M_2(x)} f_{n_k}(x)\right) < \varepsilon \tag{19}$$

для любых целочисленных ограниченных и измеримых функций $M_1(x)$ и $M_2(x)$, удовлетворяет условиям

$$M_1(x) \leqslant M_2(x) \text{ и } n_k \geqslant N_0$$

при

$$M_1(x) \leqslant k \leqslant M_2(x), \ x \in [0, 1].$$

Пусть

$$N_\nu = N_0(3^{-\nu}), \quad 1 \leqslant \nu < \infty.$$

Мы можем считать, что $N_1 < N_2 < \ldots$ Положим $\beta_k = \nu$ при $N_\nu \leqslant k < N_{\nu+1}$.

Убедимся, что ряд (18) безусловно сходится п. в. на $(0, 1)$. Предположим противное, т. е. существует перестановка такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{m_k} f_{m_k}(x)$$

не сходится п. в. на $(0, 1)$. Но тогда (см. (17)) найдутся: число $\varepsilon > 0$, натуральные M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и измеримые целочисленные функции $N_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, для которых

$$\rho\left(0, \sum_{k=M_\nu}^{N_\nu(x)} \beta_{m_k} f_{m_k}(x)\right) > \varepsilon_0,$$

$$M_\nu \leqslant N_\nu(x) < M_{\nu+1} \quad \text{при} \quad x \in [0, 1], \ \nu = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Возьмем натуральное s таким, что $2^{-s} < \varepsilon_0$. Найдем ν_0 таким, чтобы $m_k > N_s$ при всех $k \geqslant M_{\nu_0}$.

Ясно, что тогда

$$F(x) \equiv \sum_{k=M_{\nu_0}}^{N_{\nu_0}(x)} \beta_{m_k} f_{m_k}(x) =$$

$$= \sum_{j=s}^{\infty} \sum_{\substack{k=M_{\nu_0} \\ N_j \leqslant m_k < N_{j+1}}}^{N_{\nu_0}(x)} \beta_{m_k} f_{m_k}(x) \equiv \sum_{j=s}^{\infty} A_j(x). \qquad (21)$$

В равенстве (21) внутренняя сумма $A_j(x)$ допускает представление в виде

$$A_j(x) = \sum_{k=R_j(x)}^{R_j'(x)} \beta_{p_k} f_{p_k}(x),$$

где $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая перестановка натурального ряда чисел, а ограниченные целочисленные измеримые функции $R_j(x)$ и $R_j'(x)$ удовлетворяют неравенствам $R_j(x) \leqslant R_j'(x)$ и $N_j \leqslant p_k < N_{j+1}$ при $R_j(x) \leqslant k \leqslant R_j'(x)$ для $x \in [0, 1]$ и $j \geqslant s$.

В силу определения последовательности $\{\beta_k\}$ функции

$$A_j(x) = j \sum_{k=R_j(x)}^{R_j'(x)} f_{p_k}(x) \qquad (j \geqslant s). \qquad (22)$$

Далее, функция $\rho(f, g)$ обладает свойствами (см. (16))

$$\rho(0, f+g) \leqslant \rho(0, f) + \rho(0, g)$$

и

$$\rho(0, jf) \leqslant j\rho(0, f) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

и поэтому (см. (21), (22) и (19))

$$\rho(0, F) \leqslant \sum_{j=s}^{\infty} \rho(0, A_j) \leqslant \sum_{j=s}^{\infty} j\rho\left(0, \sum_{k=R_j(x)}^{R_j'(x)} f_{p_k}(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=s}^{\infty} j \cdot \frac{1}{3^j} < \frac{1}{2^s} < \varepsilon_0,$$

это противоречит неравенству (20) при $\nu = \nu_0$. Что и требовалось доказать.

Автор приносит благодарность профессору П. Л. Ульянову за помощь в работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
21.III.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., 1958.

[2] Ульянов П. Л., Расходящиеся ряды Фурье класса L^p ($p \geqslant 2$), Докл. АН СССР, **137**, № 4 (1961), 786—789.

[3] Orlicz W., Über die Divergenz von algemeinen Orthogonalreihen, Studia Math., 4 (1933), 27 — 32.

[4] Ульянов П. Л., О безусловной сходимости и расходимости, Изв. АН СССР, Сер. матем., **22** (1958), 811—840.