О ВЫБОРЕ ПОДСИСТЕМЫ СХОДИМОСТИ ИЗ ДАННОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Б. С. Кашин

В теории ортогональных рядов давно известны результаты о возможности выбора из произвольной ортонормированной системы (ОНС) подсистемы с некоторыми дополнительными «хорошими» свойствами. К такому типу относится, в частности, следующая теорема, доказанная в 1936 г. независимо Д. Е. Меньшовым и Й. Марцинкевичем.

Теорема ([1], [2]). *Из произвольной ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, *можно выбрать подсистему сходимости, т. е. для некоторой последовательности* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ — *система сходимости.*

(ОНС $\{\psi_n\}$ называется системой сходимости, если всякий ряд

$$\sum a_n\psi_n(x), \quad \sum a_n^2 < \infty$$

сходится почти всюду.)

Отметим, что известные доказательства теоремы Марцинкевича — Меньшова и некоторых других теорем аналогичного характера неэффективны в том смысле, что не дают никакой оценки сверху скорости возрастания чисел $\{n_k\}$.

В работе [3] Г. Беннет поставил следующий вопрос: существует ли последовательность чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{r_k}=0?$$

Положительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *Из произвольной ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *можно выбрать подсистему сходимости* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $n_k \leqslant R_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где*

$$R_1 = 3,\ R_{k+1} = (R_k)!\ (k = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

В доказательстве теоремы 1 используется следующая

Лемма. *Для любой ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое сохраняющее меру Лебега преобразование отрезка* $(0, 1)$ — $\sigma(x)$, *что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n(x)-P_n(\sigma(x))\|_{L^1}^2<\infty,$$

где при $n = 1, 2, \ldots$ $P_n(x)$ — *полином по системе Хаара степени* $\leqslant (n!)^{1+\varepsilon}$.

Полученная в теореме 1 оценка сверху для чисел n_k весьма грубая. Для получения достаточно точных оценок, вероятно, потребуется привлечь существенно новую технику. Естественно возникает задача: можно ли в формулировке теоремы 1 последовательность (1) заменить на последовательность $k^{1+\varepsilon}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ для любого $\varepsilon > 0$?

В заключение сделаем дополнение к нашей работе [4]: пусть для $N = 1, 2, \ldots$, D_N — множество систем функций $\Phi = \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N}$ вида

$$\Phi=\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N},\quad \varphi_j(x)=\varepsilon_{ij},\quad \text{если}\quad x\in\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right),\ \text{где}\ \varepsilon_{ij}=\pm 1,\ i,\ j=1,\ldots,N.$$

На D_N введем меру μ_N, положив $\mu_N(\Phi) = 2^{-N^2}$, если $\Phi \in D_N$. Пусть, далее,

$$\|\Phi\|\equiv\sup_{\sum_{j=1}^{N}a_j^2=1}\Big\|\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j(x)\Big\|_{L^2};\quad s(\Phi)\equiv\sup_{\sum_{j=1}^{N}a_j^2=1}\Big\|\sup_{1\leqslant M\leqslant N}\Big|\sum_{j=1}^{M}a_j\varphi_j(x)\Big|\Big\|_{L^2}.$$

Для любой системы $\Phi \in D_N$ $s(\Phi) \leqslant C \ln N\cdot\|\Phi\|$ и

$$\sup_{\Phi\in D_N}s(\Phi)\cdot\|\Phi\|^{-1}\geqslant c\ln N$$ (см. подробнее [4], [5]).

Имеет место

Утверждение. *Для любого* $B > 0$ *найдутся постоянные* $\gamma = \gamma(B) > 1$ *и* $K = K(B)$ *такие, что при* $N = 1, 2, \ldots$

$$\mu_N\{\Phi\in D_N:\ s(\Phi)\cdot\|\Phi\|^{-1}\geqslant B\ln N\}\leqslant K\cdot\exp\{-N^{\gamma}\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Menchoff. Sur la convergence et la sommation des series de fonctions orthogonales.— Bull. de la Soc. Math. de France, 1936, **64** : 3—4, p. 147—170.

[2] J. Marcinkiewicz. Sur la convergence des series orthogonales.— Studia Math., 1936, **6**, p. 39—45.

[3] G. Bennett. Lecture on matrix transformation on l^p-spaces.— In: Notes in Banach spaces (edited by H. E. Lacey).— Austin: University of Texas Press, 1980.

[4] Б. С. Кашин. О свойствах случайных матриц, связанных с безусловной сходимостью почти всюду.— ДАН СССР, 1980, **254** : 6, с. 1322—1325.

[5] B. S. Kasin, On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series.— Analysis Math., 1976, 2: 4, p. 249—266.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в Правление общества
15 декабря 1983 г.