Труды Математического института АН СССР
1985, том 172

УДК 517.5

Б. С. КАШИН

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой части доказывается одно геометрическое неравенство. Это неравенство применяется затем (см. подробнее часть 2°) для исследования задачи о приближении классов гладких функций всевозможными полиномами вида:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x), \qquad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m,$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$,— заданная полная ортонормированная система.

1°. Введем сначала некоторые обозначения: для $x = \{x_k\}_{k=1}^{N} \in R^N$ положим

$$\| x \|_2 \equiv \| x \|_{l_2^N} = \Big(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\Big)^{1/2}, \quad \| x \|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} | x_k |$$

и пусть S^N, B_2^N и B_∞^N — соответственно евклидова сфера в R^N, евклидов шар в R^N и куб — $\{x \in R^N\colon \| x \|_{l_\infty^N} \leqslant 1\}$. Обозначим через W_N множество вершин куба B_∞^N и зададим на W_N естественную меру ν_N, положив $\nu_N(z) = 2^{-N}$ для каждой вершины $z \in W_N$. Наконец, пусть E_n, $n = 1, 2, \ldots$,— система всех n-элементных подмножеств натурального ряда. Имеет место

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная K такая, что для любой последовательности $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющей условиям*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| e_i \|_2^2 = 1, \qquad \max_{1 \leqslant i < \infty} \| e_i \|_2 = \rho, \tag{1}$$

при $n \leqslant \rho^{-2}$ и любом $y \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\nu_N(y) \equiv \nu_N \Big\{z \in W_N\colon \sup_{\Omega \in E_n} \Big(\sum_{i \in \Omega} (z, e_i)^2\Big)^{1/2} > y n^{1/2}\rho\Big\} \leqslant K (n\rho^2)^{-1} \exp(-{}^1/_8 y^2). \tag{2}$$

Доказательство. Можно считать, что $y > 1$, так как при $y \leqslant 1$ правая часть в (2) больше единицы, если $K > 2$ (мы учли здесь, что $n\rho^2 \leqslant 1$, ниже условие $n\rho^2 \leqslant 1$ использоваться не будет, т. е. для $y > 1$ неравенство (2) имеет место при любом $n = 1, 2, \ldots$). Пусть для $z \in R^N$ и $\Omega \subset \{1, 2, \ldots\}$

$$f(z, \Omega) = \Big\{\sum_{i \in \Omega : |(z, e_i)| > {}^1/_2 y\rho} (z, e_i)^2\Big\}^{1/2}.$$

Тогда для любого множества $\Omega \in E_n$

$$\sum_{i\in\Omega}(z,\ e_i)^2 \leqslant f^2(z,\ \Omega)+\frac{y^2}{4}\rho^2 n,$$

а потому

$$\nu_N(y)\leqslant \nu_N\{G(y)\}, \tag{3}$$

где

$$G(y)\equiv\{z\in W_N\colon \sup_{\Omega\in E_n} f(z,\ \Omega)\geqslant {}^1/_2 y\rho n^{1/2}\}.$$

Рассмотрим подробнее множество $G(y)$. Пусть для $z\in W_N$ и $r=0, 1, \ldots$

$$A_r(z)=\{i\colon\ |(z,e_i)|\in({}^1/_2 y\rho 2^r,\ {}^1/_2 y\rho 2^{r+1}]\}$$

и

$$A_r(z,\Omega)=A_r(z)\cap\Omega \qquad (\Omega\in E_n).$$

Отметим, что для $z\in W_N$ и $i=1, 2, \ldots$

$$(z, e_i)^2\leqslant \| z\|_2\| e_i\|_2\leqslant N^{1/2}\rho,$$

т. е. при $2^{r-1}\geqslant N^{1/2}$ множество $A_r(z)$ пусто. С учетом этого замечания мы получаем для каждого $\Omega\in E_n$:

$$f^2(z,\ \Omega)=\sum_{r=0}^{r_0}\sum_{i\in A_r(z,\ \Omega)}(z,\ e_i)^2,\qquad r_0=\left[\frac{1}{2}\log_2 N\right]+1, \tag{4}$$

и если α_r, $r=0,\ldots,r_0$,— произвольный набор положительных чисел с $\sum\limits_{r=0}^{r_0}\alpha_r\leqslant 1$, то

$$\{z\in W_N : f(z,\ \Omega)>{}^1/_2 y n^{1/2}\rho\}\subset\bigcup_{r=0}^{r_0}\left\{z\in W_N\colon \sum_{i\in A_r(z,\ \Omega)}(z,\ e_i)^2\geqslant\frac{1}{4}y^2 n\rho^2\alpha_r\right\}. \tag{5}$$

Таким образом (см. (3), (5)),

$$G(y)\subset\bigcup_{r=0}^{r_0}\left\{z\in W_N\colon \sum_{i:|(z,\ e_i)|>y\rho 2^{r-1}} 1\geqslant n\alpha_r 2^{-2r-2}\right\}. \tag{6}$$

В силу известной (см., например, [1, с. 76]) оценки для полиномов по системе Радемахера для любого $e\in R^N$ и $t\geqslant 0$

$$\nu_N\{z\in W_N : |(z,e)|>t\}\leqslant 2\exp\{-t^2/\| e_i\|_2^2\},$$

поэтому (см. (6))

$$\nu_N\{G(y)\}\leqslant\sum_{r=0}^{r_0}2^{r+2}(n\alpha_r)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\nu_N\{z\in W_N\colon |(z,\ e_i)|>y\rho\cdot 2^{r-1}\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{r_0}2^{2r+3}(n\alpha_r)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{4^r y^2\rho^2}{8\| e_i\|_2^2}\right\}. \tag{7}$$

Если положить при $r=0, 1, \ldots$ $\alpha_r=2^{-r-1}$ и учесть оценку:

$$\sum_{r=0}^{\infty}2^{3r}\exp(-4^r t)<C_\delta\exp -t,\qquad t\geqslant\delta>0, \tag{8}$$

то из неравенства (7) мы получим, что

$$\nu_N\{G(y)\}\leqslant K' n^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2\rho^2}{8\| e_i\|_2^2}\right\}. \tag{9}$$

Наконец, учитывая соотношения (1), (3) и снова используя неравенство (8), из (9) мы выводим:

$$\nu_N(y) \leqslant \nu_N\{G(y)\} \leqslant K'n^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i:\|e_i\|_2 \in (\rho 2^{-q-1},\ \rho\cdot 2^{-q}]} \exp\left\{-\frac{y^2\rho^2}{8\|e_i\|_2^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant K'n^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} 2^{2(q+1)}\rho^{-2} \exp\left\{-\frac{y^2}{8}4^q\right\} \leqslant K(n\rho^2)^{-1}\exp\left\{-\frac{y^2}{8}\right\}.$$

Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы* 1,

$$\min_{z\in W_N} \sup_{\Omega\in E_n} \left(\sum_{i\in\Omega} (z, e_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2},$$

если $n\rho^2 \leqslant 1$ *и абсолютная постоянная* $c_0 > 0$ *достаточно мала.*

З а м е ч а н и е. Аналогично теореме 1 доказывается, что для любой последовательности $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R^N$ с условием (1)

$$m_N\left\{z \in S^N : \sup_{\Omega\in E_n} \left(\sum_{i\in\Omega} (z, e_i)^2\right)^{1/2} > yn^{1/2}N^{-1/2}\rho\right\} \leqslant K(n\rho^2)^{-1}\exp\{-y^2/8\},$$

$$\text{если } y \geqslant 0 \quad \text{и} \quad n \leqslant \rho^{-2}$$

(здесь m_N — нормированная мера Лебега на сфере S^N).

2°. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная система элементов банахова пространства X. Для $f \in X$ и $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$e_m(f, \Phi, X) = \inf_{P_m} \|f - P_m\|_X, \tag{10}$$

где inf берется по всем полиномам P_m вида

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_{n_k}, \qquad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m.$$

В последнее время такой «неклассический» способ приближения активно изучался для конкретных пространств X и систем Φ. Было выяснено (см., например, [2, 3]), что в случае, когда $X = C[0, 1] \equiv C$ — пространство непрерывных функций, для многих естественных функциональных компактов K и систем Φ (в частности, для тригонометрической системы или системы Фабера — Шаудера) величина

$$\sup_{f\in K} e_m(f, \Phi, C)$$

убывает при $m \to \infty$ существенно быстрее, чем

$$\sup_{f\in K} E_m(f, \Phi, C),$$

где $E_m(f, \Phi, C)$ — наилучшее приближение функции f полиномами вида $\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n(x)$.

В этой работе изучаются величины (10) в случае, когда $X = L^2(0, 1) = L^2$, а $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная полная ортонормированная система (п. о. н. с.). Для полных ортонормированных систем величины $e_m(f, \Phi, L^2)$ были введены С. Б. Стечкиным [4] при рассмотрении им вопросов абсолютной сходимости общих ортогональных рядов. В [4] показано, что для $f \in L^2$

$$\|f\|_{L^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} e_m(f, \Phi, L^2) \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_0^1 f\varphi_n\, dx\right|. \tag{11}$$

Мы будем рассматривать поведение величин $e_m(f, \Phi, L^2)$ для гладких функций f. Пусть при $r = 0, 1, \ldots$ и $\alpha \in (0, 1]$

$$H^{r,\alpha} = \left\{ f(x) : \|f\|_C + \|f^{(r)}\|_C \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant 1, \qquad x, y \in [0, 1] \right\}$$

($f^{(r)}$ — r-я производная функции f, $f^{(0)} \equiv f$).

Следующая теорема отвечает на вопрос, поставленный К. И. Осколковым:

Теорема 2. *Для* $r = 0, 1, \ldots$ *и* $\alpha \in (0, 1]$ *найдется такая постоянная* $c = c(r, \alpha) > 0$, *что для* $m = 1, 2, \ldots$ *и любой п. о. н. с.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$

$$\sup_{f \in H^{r,\alpha}} e_m(f, \Phi, L^2) \geqslant cm^{-(r+\alpha)}.$$

Теорема 2 вытекает из такого следствия теоремы 1:

Следствие 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — *п. о. н. с. и* $B_N \subset L^2(0, 1)$ — N-*мерный куб, т. е.*

$$B_N = \left\{ \sum_{j=1}^N a_j \psi_j, \quad |a_j| \leqslant 1, j = 1, \ldots, N, \{\psi_j\}_{j=1}^N \text{— о. н. с.} \right\}.$$

Тогда

$$\sup_{f \in B_N} e_m^2(N^{-1/2} f, \Phi, L^2) \geqslant \frac{3}{4},$$

если $m \leqslant c_0 N$, *где* $c_0 > 0$ — *постоянная из следствия* 1.

В самом деле, пусть при $i = 1, 2, \ldots$ $e_i = e_i(x)$ — ортогональная проекция функции φ_i на подпространство L_N, натянутое на функции ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\sum_{i=1}^\infty \|N^{-1/2} e_i\|_{L^2}^2 = 1, \qquad \max_{1 \leqslant i < \infty} \|N^{-1/2} e_i\|_{L^2} = \rho \leqslant N^{-1/2}.$$

Легко видеть, что для $f \in L_N$

$$e_m^2(N^{-1/2} f, \Phi, L^2) = \|N^{-1/2} f\|_{L^2} - \sup_{\Omega \in E_m} \sum_{i \in \Omega} (f, N^{-1/2} e_i)^2 \tag{12}$$

(здесь $(f, g) = \int_0^1 fg\,dx$). Используя изоморфизм всех N-мерных евклидовых пространств и следствие 1, мы из (12) выводим, что при $m \leqslant c_0 N$

$$\sup_{f \in B_N} e_m^2(N^{-1/2} f, \Phi, L^2) \geqslant 1 - {}^1/_4 = {}^3/_4.$$

Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $r = 0$. При $N = 1, 2, \ldots$ положим

$$\Lambda_N(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant (2N)^{-1}, \\ \text{линейна и непрерывна на } [0, (2N)^{-1}] \text{ и } [-(2N)^{-1}, 0] \end{cases}$$

и рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ семейство функций

$$B_N = \left\{ f : f = (3N)^{1/2} \sum_{i=1}^N a_i \Lambda_N \left\{ x - \left(\frac{2i-1}{N} \right) \right\}, |a_i| \leqslant 1, i = 1, \ldots N \right\}$$

(такие семейства функций использовались и в задачах об абсолютной сходимости общих ортогональных рядов, см., например, [5]).

Легко видеть, что B_N — куб в L^2 и что при $0 < \alpha \leqslant 1$

$$(3N^{\alpha+1/2})^{-1} B_N \subset H^{0,\alpha},$$

поэтому, если взять число N таким, что $m \leqslant c_0 N < m + 1$, то из следствия 2 мы получим

$$\sup_{f \in H^{0,\alpha}} e_m(f, \Phi, L^2) \geqslant \frac{1}{3N^\alpha} \sup_{f \in B_N} e_m(N^{-1/2} f, \Phi, L^2) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6} N^{-\alpha} \geqslant \frac{c_0}{8} m^{-\alpha},$$

что и требовалось проверить. Случай $r > 0$ рассматривался аналогично, при этом вместо функций $\Lambda_N(x)$ надо использовать подобные им гладкие функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
2. *Осколков К. И.* Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры.— Мат. сб., 1977, т. 103, № 4, с. 563—589.
3. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 5, с. 1127—1130.
4. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов.— Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 1, с. 37—40.
5. *Бочкарев С. В.* Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов.— Тр. МИАН СССР, 1978, т. 146, с. 1—87.