Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 38, N° 12, 1985

МАТЕМАТИКА
Теория аппроксимации

ОБ ОДНОМ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ОПЕРАТОРЕ В $L^2(0, 1)$

Б. С. Кашин

(Представлено академиком К. Илиевым 16. IV. 1985)

Ниже $L^p = L^p(0, 1)$, $1 \le p \le \infty$, $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(0,1)}$ для $N = 1, 2, \ldots$ D_N — пространство кусочно-постоянных функций на $(0, 1)$:

$$D_N = \left\{ f : f(x) = \text{const} = a_i \text{ при } x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right),\ 1 \le i \le N \right\}$$

Оператор $T: G \to G$ называем изометрическим, если $\|f\|_G = \|Tf\|_G$ для любого элемента f банахова пространства G. Справедлива

Теорема. Существует изометрический оператор $T: L^2 \to L^2$ и постоянная $c > 0$ такие, что

1) для любой функции $f \in L^2$

$$c\|f\|_2 \le \frac{\|f\|_1 + \|Tf\|_1}{2} \le \|f\|_2 \tag{1}$$

и кроме того

2) $$T(D)_{2^k} = D_{2^k},\ k = 0, 1, \ldots$$

в 2) использовано обозначение: для $E \subset L^2$ $T(E) = \{g : g = Tf, f \in E\}$; отметим также, что из 2) вытекает равенство $T(L^2) = L^2$). Доказательство теоремы основано на следующем утверждении:

Лемма. ([1]) Для каждого $s = 1, 2, \ldots$ существует изометрический оператор $T_s : l_2^s \to l_2^s$ такой, что для каждого $x \in l_2^s$

$$s^{-1/2}(\|x\|_{l_1^s} + \|T_s x\|_{l_p^s}) \ge c_0 \|x\|_{l_2^s},\ c_0 > 0,$$

и следовательно для $x \in l_2^s$

$$s^{1/2-1/p}(\|x\|_{l_p^s} + \|T_s x\|_{l_p^s}) \ge c_0 \|x\|_{l_2^s},\ 1 < p < 2 \tag{2}$$

(напомним, что $\|x\|_{l_p^s} = \left(\sum_{i=1}^{s} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $x = \{x_i\}_{i=1}^s \in R^s$) Кроме того мы используем хорошо известное неравенство: для любой системы функций $\{g_k\} \subset L^p$, $1 \le p \le 2$

$$\left(\sum_k \|g_k\|_p^2\right)^{1/2} \le C_p \left\|\left(\sum_k g_k^2\right)^{1/2}\right\|_p \tag{3}$$

Доказательство теоремы. Прежде всего отметим, что правое неравенство в (1) справедливо для любого изометрического оператора T. Далее, для того чтобы установить для изометрического оператора T выполнение левой оценки в (1), достаточно проверить, что

$$\|f\|_p+\|Tf\|_p\geq c\|f\|_2,\ p=\frac{3}{2},\ f\in L^2. \tag{4}$$

В самом деле, $\|f\|_1^{1/3}\cdot\|f\|_2^{2/3}\geq\|f\|_{3/2}$ и если для любой функции $f\in L^2$, $\|f\|_2=1$, выполняется (4), то и

$$\max(\|f\|_1^{1/3},\ \|Tf\|_1^{1/3})\geq\max(\|f\|_{3/2}\cdot\|f\|_2^{-2/3},\ \|Tf\|_{3/2}\cdot\|Tf\|_2^{-2/3})$$

$$=\max(\|f\|_{3/2},\ \|Tf\|_{3/2})\geq\frac{c}{2}.$$

Для того, чтобы построить изометрический оператор T со свойством (4), оставляющий инвариантными подпространства D_{2^k}, $k=0,1,\dots$, рассмотрим разложение функции $f\in L^2$ в ряд по системе Хаара:

$$f(x)=a_{-1}^1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k}a_k^i\chi_k^i(x) \tag{5}$$

Согласно теореме Пэли-Марцинкевича (см. [2]) при $p=3/2$

$$\|f\|_p=\left\|\left\{(a_{-1}^1)^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^k}a_k^i\chi_k^i\right)^2\right\}^{1/2}\right\|_p,$$

а следовательно (см. (3)):

$$\|f\|_p\geq c'\left\{|a_{-1}^1|^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{2^k}a_k^i\chi_k^i\right\|_p^2\right\}^{1/2}=\left\{|a_{-1}^1|^2+\sum_{k=0}^{\infty}2^k\cdot 2^{-2k/p}\left(\sum_{i=1}^{2^k}|a_k^i|^p\right)^{2/p}\right\}^{1/2} \tag{6}$$

Определим оператор T, положив для функции f вида (5):

$$Tf=a_{-1}^1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k}b_k^i\chi_k^i,$$

где $\{b_k^i\}_{i=1}^{2^k}=T_{2^k}(\{a_k^i\}_{i=1}^{2^k})$, $k=0,1,\dots$, а операторы T_{2^k}, $k=0,1,\dots$ определены в лемме. Ясно, что T — изометрический оператор и в силу простейших свойств системы Хаара

$$T(D_{2^k})=D_{2^k},\ k=0,\ 1,\dots$$

Нам остается проверить выполнение оценки (4)
Учитывая (6),

$$\|f\|_p+\|Tf\|_p\geq\frac{c'}{4}\left\{|a_{-1}^1|^2+\sum_{k=0}^{\infty}2^{\left(1-\frac{2}{p}\right)k}[\|\{a_k^i\}\|_{l_p^{2^k}}+\|\{b_k^i\}\|_{l_p^{2^k}}]^2\right\}^{1/2}$$

и так как (см. (2))

$$\|\{a_k^i\}\|_{l_p^{2^k}}+\|\{b_k^i\}\|_{l_p^{2^k}}\geq c_0\|\{a_k^i\}\|_{l_2^{2^k}}\cdot 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)k},\ k=0,1,\dots$$

мы имеем:

$$\|f\|_p+\|Tf\|_p\geq c\left\{|a_{-1}^1|^2+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k}|a_k^i|^2\right\}^{1/2}=c\|f\|_2.$$

Теорема доказана.

Следующий результат может применяться в задачах, рассмотренных, например в [3]:

Утверждение. Существует такая абсолютная постоянная K, что для любого набора векторов $\{e_j\}_{j=1}^m \subset l_2^n$, $\|e_j\|_{l_2^n}=1$, $j=1, 2, \ldots m$, найдется вектор $z=\{z_i\}_{i=1}^n \in l_2^n$ с координатами $z_i=0$, $+1$ или -1, такой, что $\|z\|_{l_1^n} \geq \frac{n}{6}$ и

$$|(z, e_j)| \leq K \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}, \; j=1, 2, \ldots m$$

(здесь (z, e) — скалярное произведение в l_2^n). Доказательство утверждения основано на том факте, что при $\gamma < K^{-1} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-1/2}$ n — мерный объем $V_n(E_\gamma)$ множества

$$E_\gamma = \{z=\{z_i\}_{i=1}^n : |z_i| \geqq 1.99, \quad \gamma \cdot |(z, e_j)| \leq 1.99; \quad i, j=1, 2, \ldots\}$$

удовлетворяет неравенству $V_n(E_\gamma) \geq (1.9)^n \cdot 2^n$ (это проверяется с помощью теоремы Ваалера [4]), а значит (см. [5] стр. 95) множество E_γ должно содержать $\geq (1.9)^n$ различных точек с целочисленными координатами. Из определения E_γ ясно, что координаты этих точек равны 0, $+1$ или -1.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР,
Москва, ул. Вавилова д. 42
117—966 ГСП1, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1 Кашин, Б. С. Известия АН СССР (матем.) **41**, 1977, 2, 334. 2 Кашин, Б. С., А. А. Саакян. Ортогональные ряды. Наука, Москва, 1984. 3 Кашин, Б. С. Матем. сборник **126**, 1985, 3, 420. 4 Vaaler, J. D. Pacific J. of math. **83**, 1979, **2**, 543. 5 Касселс, Дж. Ввведение в геометрию чисел. Мир, Москва, 1965.