СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М., 1965.
2. Дьяченко М. И. Тригонометрические ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами//Изв. вузов. Математика. 1986. № 7. 39—50.

Поступила в редакцию
19.11.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 5

УДК 517.518

Б. С. Кашин

О СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ± 1

Пусть F_n, $n=1, 2, \ldots$ — множество всех полиномов вида

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k z^k;\ z=e^{2\pi i\theta},\ \varepsilon_k=\pm 1,\ k=0, \ldots, n, \tag{1}$$

и для $P\in F_n$

$$m(P)=\min_{z\in C,\ |z|=1}|P(z)|. \tag{2}$$

В статье рассматривается, в частности, вопрос о значении функции (2) для случайного полинома $P\in F_n$ (на F_n или, что то же самое, на множестве Ω_n всех векторов $\varepsilon=\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{n}$ с координатами ± 1 задана естественная вероятностная мера $\mu_n:\mu_n(P)=2^{-(n+1)}$ для любого $P\in F_n$).

В работе Литлвуда [1] сформулированы три гипотезы о свойствах семейства полиномов F_n. Одна из них (см. [1, с. 368]) состоит в том, что при $n\to\infty$ для большинства полиномов $P\in F_n$ имеет место оценка $m(P)=o\{(n+1)^{1/2}\}$. Точнее говоря, в [1] предполагается, что найдутся такие последовательности α_n, δ_n, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$, что

$$\mu_n\{P\in F_n: m(P)\geqslant\delta_n(n+1)^{1/2}\}\leqslant\alpha_n;\quad n=1, 2, \ldots$$

Из доказанной ниже теоремы 1 вытекает справедливость этого предположения.

Пусть при $\nu=1, 2, \ldots$ $\theta_\nu=2\pi 2^{-\nu}$, $z_\nu=\exp(i\theta_\nu)$.

Теорема 1. *При достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\mu_n\{P\in F_n: \inf_{\nu=1, 2\ldots}|P(z_\nu)|>(n+1)^{1/2}[\log(n+1)]^{-1/3}\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\{-[\log(n+1)]^{1/4}\}.* \tag{3}$$

Замечание 1. В [1] отмечается возможность быстрого убывания (при $n\to\infty$ и фиксированном значении c) величины $\mu(c, n)\equiv\mu_n\{P\in F_n: m(P)\geqslant c(n-1)^{1/2}\}$ и указано, что, может быть, $\mu(c,n)=O(n^2\cdot 2^{-n})$. Метод доказательства теоремы 1 не позволяет получить точные оценки скорости убывания величины $\mu(c, n)$. Однако, как легко видеть, если найдется последовательность полиномов $P_n\in F_n$ с $m(P_n)\geqslant c_0(n+1)^{1/2}$, $c_0>0$, $n=1, 2, \ldots$ (а существование такой последовательности — дру-

* Логарифмы берутся по основанию 2.

гое, до сих пор не подтвержденное предположение Литлвуда [1]), то заведомо для $\mu(c_0/2, n)$ имеет место оценка $\mu(c_0/2, n) \geqslant n^{\rho\sqrt{n}} \cdot 2^{-n}$, $\rho > 0$, $n=1, 2, \ldots$ (Дело в том, что изменение $\leqslant s$ коэффициентов полинома P_n изменяет величину $m(P_n)$ не более чем на $2s$.)

Замечание 2. В доказательстве теоремы 1 используется (см. лемму 2) следствие центральной предельной теоремы для сумм двумерных независимых векторов. Для наших целей вполне достаточно самой первой такой теоремы, полученной Журавским [2] еще в 1933 г. При этом вполне возможно, что использование более точных оценок остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме позволит существенно улучшить оценку мер $\mu(c, n)$.

Ниже мы используем неравенство (см., например, [3, с. 76]): для любого набора действительных чисел a_k, $k=0, 1, \ldots, n$, и $y \geqslant 0$

$$\mu_n \left\{ \varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=0}^{n} : \left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k \right| \geqslant y \right\} \leqslant 2 \exp \left\{ -\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{-1} \cdot \frac{y^2}{2} \right\}. \tag{4}$$

Нам потребуются также две леммы.

Лемма 1. *Пусть r, p — целые числа, $r \geqslant 2$, $-r \leqslant p \leqslant r$, и*

$$\Omega(p) = \left\{ \varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=0}^{r-1} \in \Omega_{r-1} : \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k = p \right\}.$$

Далее, пусть $\{a_k\}_{k=0}^{r-1}$, $\{b_k\}_{k=0}^{r-1}$ — наборы чисел с

$$\sum_{k=0}^{r-1} a_k = \sum_{k=0}^{r-1} b_k = 0, \quad \left(\sum_{k=0}^{r-1} a_k^2 \right)^{1/2} = A.$$

Положим для $\varepsilon \in \Omega(p)$ $u(\varepsilon) = \Sigma \varepsilon_k a_k$, $v(\varepsilon) = \Sigma \varepsilon_k b_k$. Тогда

$$1.\ E(u) = 0. \quad 2.\ |E(uv)| \leqslant 2 \left| \sum_{k=0}^{r-1} a_k b_k \right|. \quad 3.\ \text{а)}\ [E(u^2)]^{1/2} \leqslant 2A;$$

$$\text{б)}\ [E(u^2)]^{1/2} \geqslant \frac{4}{10} A, \text{ если } |p| \leqslant \frac{9}{10} r. \quad 4.\ [E(u^4)]^{1/4} \leqslant CA.$$

(Здесь $E(f)$ — математическое ожидание случайной величины $f(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \Omega(p)$; считаем, что на $\Omega(p)$ задана мера ν: $\nu(\varepsilon) = 2^{-r}\{\mu_{r-1}[\Omega(p)]\}^{-1}$ для каждого вектора $\varepsilon \in \Omega(p)$.)

Лемма 2. *Пусть $\{\beta_i = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}),\ i=1, \ldots, q\}$ — набор независимых случайных векторов в $\mathbb{R}^2$ (заданных на некотором вероятностном пространстве Ω с мерой ν), причем для $i=1, \ldots, q$*

1) $E(\beta_i) = 0$; 2) $0 < c_1 A^2 \leqslant E([\beta_i^{(1)}]^2)$, $E([\beta_i^{(2)}]^2) \leqslant A^2$;

3) $|E(\beta_i^{(1)} \beta_i^{(2)})| \leqslant bA^2$; 4) $E(|\beta_i|^4) \leqslant C_2 A^4$.

Тогда при $b < b_0 = b_0(c_1, C_2)$, $q > q_0(c_1, C_2)$ и $y \in (0, 1)$ имеет место оценка

$$\nu \left\{ \varepsilon \in \Omega : \left| \sum_{i=1}^{q} \beta_i(\varepsilon) \right| < y q^{1/2} A \right\} \geqslant K_1 y^2 - K_2 q^{-1/2} \tag{5}$$

(здесь $|\beta| = [(\beta^{(1)})^2 + (\beta^{(2)})^2]^{1/2}$, а постоянные $K_1 > 0$, K_2 зависят только от c_1 и C_2). Лемма 1 проверяется непосредственно вычислением. Лемма 2 есть простое следствие теоремы 17.1 из [4] (чтобы воспользоваться

этой теоремой, надо учесть, что собственные значения λ, Λ, $\lambda \leqslant \Lambda$, матрицы $q^{-1} \sum_{i=1}^{q} \operatorname{cov}(\beta_i)$ в условиях леммы 2 при достаточном малых b удовлетворяют неравенству $c/2 \cdot A^2 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant 2A^2$; см. подробнее [4, с. 172]).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Установим оценку (3) для чисел n вида $n=2^s-1$ $(s \geqslant s_0)$, а затем укажем, какие изменения следует внести в общем случае. Фиксировав число $n=2^s-1$, для вектора $a=\{(a)_k\}^n_{k=0} \in R^{n+1}$ через $\hat{a}$ обозначим 1-периодическую функцию на оси R^1 с

$$\widehat{a}=\widehat{a}(x)=(a)_k \text{ при } x \in \left(\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right), \; k=0, \ldots, n. \tag{6}$$

Ясно, что скалярное произведение векторов a, $b \in R^{n+1}$ равно

$$(a, b)=(n+1) \cdot \int_0^1 \widehat{a}\widehat{b}\, dx.$$

Рассмотрим набор векторов $\{e_\nu\}^s_{\nu=1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$, где $(e_\nu)_k=e^{i\theta_\nu k}$, $k=0, \ldots, n$. Тогда

$$e_\nu=\varphi_\nu+i\psi_\nu; \; \varphi_\nu, \psi_\nu \in R^{n+1}, \tag{7}$$

$$(\varphi_\nu)_k=\cos 2\pi k \cdot 2^{-\nu}, \; (\psi_\nu)_k=\sin 2\pi k \cdot 2^{-\nu}; \; k=0, 1, \ldots$$

Функции $\widehat{\varphi}_\nu$, $\widehat{\psi}_\nu$ имеют период $2^{-s+\nu}$, и

$$\int_\Delta \widehat{\varphi}_\nu dx=\int_\Delta \widehat{\psi}_\nu dx=0, \text{ если } \Delta=(a, b), \; b-a=2^{-s+\nu}. \tag{8}$$

Разложим функции $\widehat{\varphi}_\nu$, $\widehat{\psi}_\nu$, $\nu=1, \ldots, s$, в ряд по ортонормированной системе Уолша $\{w_j\}_{j=0}^\infty$ (см. [5, с. 158]); нетрудно проверить, что разложения имеют вид (см. (8))

$$\widehat{\varphi}_\nu=\sum_{j=2^{s-\nu}}^{2^s-1} a_j^{(\nu)} w_j, \; \widehat{\psi}_\nu=\sum_{j=2^{s-\nu}}^{2^s-1} b_j^{(\nu)} w_j, \; \nu=1, \ldots, s,$$

причем коэффициенты $a_j^{(\nu)}$ и $b_j^{(\nu)}$ равны нулю, если в представление функции w_j в виде произведения функций Радемахера $w_j=\prod_{q=1}^{q_0} r_{p_q}$ входят функции r_{p_q} с номерами, меньшими $s-\nu+1$, т. е. если $\min_q\{p_q\} < s-\nu+1$.

Пусть при $q<\nu$

$$\sigma_{\nu,q}^{(1)}=\sum_{j=2^{s-\nu}}^{2^{s-q}-1} a_j^{(\nu)} w_j, \; \sigma_{\nu,q}^{(2)}=\sum_{j=2^{s-\nu}}^{2^{s-q}-1} b_j^{(\nu)} w_j.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\|\widehat{\varphi}_\nu-\sigma_{\nu,q}^{(1)}\|_\infty=\left\|f_\nu-\sum_{j=1}^{2^{\nu-q}-1} c_j(f_\nu) w_j\right\|_\infty, \tag{9}$$

где $f_\nu(x)=\cos 2\pi k\cdot 2^{-\nu}$ при $x\in(k\cdot 2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu})$, $k=0, \ldots, 2^\nu-1$, и $c_j(f)$ — коэффициенты Фурье—Уолша функции f. Аналогичное равенство верно и для $\widehat{\psi}_\nu$. Используя (9) и оценку аппроксимации функций частными суммами рядов Фурье—Уолша (см., например, [5, с. 166]), находим, что

$$\|\widehat{\varphi}_\nu-\sigma^{(1)}_{\nu,q}\|_\infty+\|\widehat{\psi}_\nu-\sigma^{(2)}_{\nu,q}\|_\infty\leqslant C\,[(\nu-q)\,2^{-(\nu-q)}+2^{-\nu}]. \tag{9'}$$

Выберем последовательность натуральных чисел $\{\nu_r\}^{r_0}_{r=1}$ таким образом, что

$$s/3<\nu_{r_0}<\nu_{r_0-1}<\ldots<\nu_1<2/3\cdot s,\quad \nu_r-\nu_{r+1}>\log^2 s,\ r=1, \ldots, r_0-1,$$

$$r_0>s\,[4\log^2 s]^{-1}.$$

Тогда если $\varphi_r'=\sigma^{(1)}_{\nu_r,\nu_{r+1}}$, $\psi_r'=\sigma^{(2)}_{\nu_r,\nu_{r+1}}$, $\rho_s=(\log s)^2\cdot 2^{-(\log s)^2}$, то (см. (9')) при $r=1, \ldots, r_0-1$

$$\begin{aligned}&\text{а) } \|\widehat{\varphi}_{\nu_r}-\varphi_r'\|_\infty+\|\widehat{\psi}_{\nu_r}-\psi_r'\|_\infty\leqslant C\rho_s;\\ &\text{б) } \int_0^1\varphi_r'\psi_r'\,dx=\int_0^1\widehat{\varphi}_{\nu_r}\widehat{\psi}_{\nu_r}\,dx+\Delta=\Delta,\quad |\Delta|\leqslant C'\rho_s;\end{aligned} \tag{10}$$

в) функции φ_r', ψ_r' постоянны на интервалах $(k2^{-s+\nu_{r+1}}, (k+1)\,2^{-s+\nu_{r+1}})$, а функции φ'_{r+1}, ψ'_{r+1} имеют период $2^{-s+\nu_{r+1}}$. Отметим, что для полинома P вида (1)

$$P(z_\nu)=(\varepsilon, \varphi_\nu)+i(\varepsilon, \psi_\nu)=(n+1)\int_0^1\widehat{\varepsilon}(\widehat{\varphi}_\nu+i\widehat{\Psi}_\nu)\,dx$$

и в силу (10, а) и (4)

$$\mu_n\Big\{\varepsilon:\max_r\Big[\Big(\int_0^1\widehat{\varepsilon}(\widehat{\varphi}_{\nu_r}-\varphi_r')\,dx\Big)^2+\Big(\int_0^1\widehat{\varepsilon}(\widehat{\psi}_{\nu_r}-\Psi_r')\,dx)^2\Big]\geqslant 2^{1-s}s^{-2}\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant 2s\,\{\exp-[\|\widehat{\varphi}_{\nu_r}-\varphi_r'\|_2\cdot 2s]^{-2}+\exp-[\|\psi_{\nu_r}-\psi_r'\|_2\cdot 2s]^{-2}\}\leqslant n^{-10}$$

$$\text{при } n\geqslant n_0.$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что при $n\geqslant n_0$

$$\mu_n\{\varepsilon:\min_r I_r(\varepsilon)\geqslant[2^{1+s/2}s^{1/3}]^{-1}\}\leqslant\frac{1}{2}\exp-s^{1/4}, \tag{11}$$

где $I_r^2(\varepsilon)\equiv\Big(\int_0^1\widehat{\varepsilon}\varphi_r'\,dx\Big)^2+\Big(\int_0^1\widehat{\varepsilon}\psi_r'\,dx\Big)^2.$

Пусть при $\nu=1, 2, \ldots, s$ и $j=0, \ldots, 2^{s-\nu}-1$ $\delta(\nu, j)=\{j2^\nu, j2^\nu+1, \ldots$ $\ldots, (j+1)\,2^\nu-1\}$ и если $\varepsilon=\{\varepsilon_k\}^n_{k=0}$, $\varepsilon_k=\pm 1$, то $\tau^j_\nu(\varepsilon)=\sum\limits_{k\in\delta(\nu,j)}\varepsilon_k$.

Пусть также

$$\Omega_0=\Big\{\varepsilon:|\tau^j_{\nu_1}(\varepsilon)|\leqslant\frac{9}{10}2^{\nu_1},\quad 0\leqslant j\leqslant 2^{s-\nu_1}-1\Big\}$$

и при $r=1, 2, \ldots$

$$\Omega_r = \{\varepsilon \in \Omega_{r-1} : I_r(\varepsilon) > s^{-1/3}\, 2^{-s/2-1}\} \cap$$

$$\cap \left\{\varepsilon : |\tau^j_{\nu_{r+1}}(\varepsilon)| \leqslant \frac{9}{10} 2^{\nu_{r+1}},\ 0 \leqslant j \leqslant 2^{s-\nu_{r+1}} - 1\right\}. \qquad (12)$$

Покажем, что при $r=1, 2, \ldots$

$$\mu_n\{\varepsilon \in \Omega_{r-1} : I_r(\varepsilon) \geqslant s^{-1/3}\, 2^{-s/2-1}\} \leqslant \mu_n(\Omega_{r-1})(1 - cs^{-2/3}) \qquad (13)$$

($c>0$ — абсолютная постоянная) и поэтому

$$\mu_n(\Omega_r) \leqslant \mu_n(\Omega_{r-1})\,(1 - cs^{-2/3}). \qquad (13')$$

Чтобы установить (13), отметим, что в силу (10, в) множество Ω_{r-1} представимо в виде

$$\Omega_{r-1} = \bigcup_{Q \in \Lambda} \Omega_{r-1}(Q),$$

где Λ — некоторое множество наборов целых чисел

$$Q = \{q_j,\ 0 \leqslant j \leqslant 2^{s-\nu_r} - 1\} \left(c\,|q_j| \leqslant \frac{9}{10} 2^{\nu_r} \text{ для всех } j\right),$$

а

$$\Omega_{r-1}(Q) = \{\varepsilon = \{\varepsilon_k\}^n_{k=0} : \tau^j_{\nu_r}(\varepsilon) = q_j,\ \ 0 \leqslant j \leqslant 2^{s-\nu_r} - 1\}$$

(мы учли, что для данного вектора $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}^n{}_{k=0} \in \Omega_{r-1}$ каждый вектор ε', полученный перестановкой чисел ε_k внутри групп $\{\varepsilon_k,\ k \in \delta(\nu_r, j)\}$, $0 \leqslant j \leqslant 2^{s-\nu_r} - 1$, также входит в Ω_{r-1}). Фиксируем набор $Q = \{q_j,\ 0 \leqslant j \leqslant 2^{s-\nu_r} - 1\}$ и проверим, что

$$\mu_n\{\varepsilon \in \Omega_{r-1}(Q) : I_r(\varepsilon) \geqslant s^{-1/3} 2^{-1-s/2}\} \leqslant \mu_n(\Omega_{r-1}(Q)) \cdot (1 - cs^{-2/3}). \qquad (14)$$

Суммируя затем неравенства (14) по всем $Q \in \Lambda$, получим нужную оценку (13).

Пусть при $j = 0, 1, \ldots, 2^{s-\nu_r} - 1$ и $\varepsilon \in \Omega_{r-1}(Q)$

$$\beta_j(\varepsilon) = \beta_j = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}) = \left(\int\limits_{j2^{\nu_r - s}}^{(j+1)2^{\nu_r - s}} \widehat{\varepsilon\varphi_r'}\, dx,\ \int\limits_{j2^{\nu_r - s}}^{(j+1)2^{\nu_r - s}} \widehat{\varepsilon\psi_r'}\, dx\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Набор $\{\beta_j\}$, рассматриваемый на вероятностном пространстве $\Omega_{r-1}(Q)$ (с мерой $\nu = \mu_n \cdot \mu_n^{-1}\{\Omega_{r-1}(Q)\}$), есть набор независимых случайных векторов в $\mathbb{R}^2$. При этом, пользуясь леммой 1 и учитывая свойства функций φ_r', ψ_r' (см. (10)), находим, что при каждом j (и $n \geqslant n_0$)

$$E\beta_j^{(1)} = E\beta_j^{(2)} = 0;\quad |E(\beta_j^{(1)}\beta_j^{(2)})| \leqslant 2^{\nu_r - 2s}\rho_s;$$

$$\frac{1}{10} \cdot 2^{\nu_r - 2s} \leqslant E([\beta_j^{(1)}]^2),\ E([\beta_j^{(2)}]^2) \leqslant 2 \cdot 2^{\nu_r - 2s};$$

$$E[|\beta_j^{(1)}|^2 + |\beta_j^{(2)}|^2]^2 \leqslant C2^{2\nu_r - 4s}.$$

Кроме того (см. (11)),

$$\Big|\sum_{0 \leqslant j < 2^{s-\nu_r}} \beta_j(\varepsilon)\Big|^2 = I_r^2(\varepsilon).$$

Применяя к набору векторов $\{\beta_i\}$ лемму 2 с $A^2=2^{\nu_r-2s}$, $b=C\rho_s$, находим (см. (5)), что при $y\in(0, 1)$

$$\nu\{\varepsilon : I_r(\varepsilon)\leqslant y\,2^{s/2-\nu_r/2}\cdot 2^{\nu_r/2-s}\}\geqslant K_1y^2-K_2 2^{s/2-\nu_r/2},$$

и, следовательно (здесь $y=\frac{1}{2}\cdot s^{-1/3}$),

$$\nu\left\{\varepsilon : I_r(\varepsilon)\leqslant \frac{1}{2}s^{-1/3}2^{-s/2}\right\}\geqslant cs^{-2/3}.$$

Тем самым неравенство (14), а поэтому и неравенства (13), (13′) доказаны. Из (13′) вытекает, что $(s\geqslant s_0)$

$$\mu_n(\Omega_{r_0})\leqslant \mu_n(\Omega_0)\,(1-cs^{-2/3})^{\frac{s}{4}(\log s)^{-2}}<\frac{1}{10}\exp(-s^{1/4}).$$

Но тогда (см. (12), а также (4)) при достаточно больших n

$$\mu_n\{\varepsilon : \min_{1\leqslant r\leqslant r_0} I_r(\varepsilon)\geqslant s^{-1/3}2^{-1-s/2}\}\leqslant \mu_n(\Omega_{r_0})+$$

$$+\mu_n\left\{\varepsilon : \max_{r,j}(2^{-\nu_r}\cdot|\tau^j_{\nu_r}(\varepsilon)|)\geqslant\frac{9}{10}\right\}\leqslant\frac{1}{10}\exp(-s^{1/4})+$$

$$+Cs^2\exp(-cs)\leqslant\frac{1}{2}\exp(-s^{1/4}).$$

Оценка (11), а значит и искомое неравенство (3) в случае, когда $n=2^s-1$, $s\geqslant s_0$, установлены.

Пусть $n+1\neq 2^s$, $s=1, 2, \ldots$ Представим число $n+1$ в виде

$$n+1=2^sq+r\equiv l+r,\quad 0\leqslant r<2(n+1)\log^{-1}(n+1).$$

Тогда (см., например, [5, с. 149]) при $n\geqslant n_0$

$$\mu_n\left\{P : \Big\|\sum_{k=l}^{n}\varepsilon_k e^{ikx}\Big\|_\infty\geqslant(n+1)^{1/2}\log^{-1/3}(n+1)\right\}\leqslant n^{-10},$$

поэтому достаточно показать, что при $n\geqslant n_0$

$$\mu_n\left\{P : \inf_\nu\left|\sum_{k=0}^{l-1}\varepsilon_k(z_\nu)^k\right|>\frac{1}{2}(n+1)^{1/2}\log^{-1/3}(n+1)\right\}<$$

$$<\frac{1}{2}\exp\{-\log^{1/4}(n+1)\}.$$

Последняя оценка проверяется вполне аналогично доказательству неравенства (3) для $n=2^s-1$. Разница состоит лишь в том, что вектора $e_\nu\in R^l$, $1\leqslant\nu\leqslant s$ (см. (7)), разлагаются не по системе Уолша $\{w_j\}$, а по системе $\{w_j(qx)\}_{j=0}^{2^s-1}$. Доказательство теоремы 1 закончено.

Аналогичные соображения позволяют установить

Утверждение. *При* $n=2^s-1$, $s=2, 3, \ldots,$

$$0<c\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\leqslant E\left(\max_{1\leqslant\nu\leqslant s}\left|\int_0^1\widehat{\varepsilon}(x)\,r_\nu(x)\,dx\right|\right)\leqslant C\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2},$$

где $E(f)$ — *среднее значение случайной величины* f *на множестве* Ω_n, $\widehat{\varepsilon}(x)$ *задается равенством* (6), *а* $r_\nu(x)$ — *функции Радемахера.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Littlewood J. E. On polynomials $\Sigma \pm z^m$, $\sum^n e^{\alpha m i} z^m$, $z=e^{\theta i}$//J. London Math. Soc. 1966. **41**, p. 2. 367—376.
2. Журавский А. О предельной теореме теории вероятностей//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1933. **4**. 9—36.
3. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М., 1972.
4. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М., 1982.
5. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М., 1984.

Поступила в редакцию
12.12.86