УДК 517.5

Б.С. Кашин

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО МОДУЛЮ, РАВНЫМИ НУЛЮ ИЛИ ЕДИНИЦЕ

Определим для $n = 1, 2, \ldots$ три класса тригонометрических полиномов:

$$F_n = \left\{ P : P = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k e^{ik\theta}, \ \varepsilon_k = +1 \text{ или } -1 \right\}, \qquad (1)$$

$$G_n = \left\{ P : P = \sum_{k=0}^{n} \omega_k e^{ik\theta}, \ |\omega_k| = 1, \ \omega_k \in \mathbb{C} \right\}, \qquad (2)$$

$$H_n = \left\{ P : P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ik\theta}, \ \lambda_k = +1, -1 \text{ или } 0 \right\}. \qquad (3)$$

В статье дается обзор ряда результатов о построении полиномов из классов F_n, G_n и H_n с определенными экстремальными свойствами. Полиномам вида (1)-(3) (особенно полиномам из классов F_n и G_n) посвящена большая литература и обзор не претендует на полноту освещения вопроса. Интерес ряда авторов к рассматриваемой тематике объясняется, видимо, как её приложениями в анализе, так и естественностью возникающих здесь задач.

Ньюман [7] справедливо отметил, что в ряде экстремальных задач в разной форме спрашивается об одном и том же: насколько близким к постоянной величине может быть модуль полинома $P(\theta)$ вида (1) или (2). Нетрудно видеть, что при $n \geq 1$ модуль полинома $P(z) \in G_n$ (и тем более $P(z) \in F_n$) не может быть постоянным на окружности $|z| = 1$, более того при $n = 1, 2, \ldots$

$$\inf_{P \in G_n} \min_{-\infty < \gamma < \infty} \| P(\theta) - \gamma \|_\infty \geq C \cdot n^{-1/2}, \qquad (4)$$

$$\inf_{P\in F_n}\ \min_{-\infty<\gamma<\infty} \|P(\theta)-\gamma\|_\infty \geq C_1 \tag{5}$$

(через $C, C_1, \ldots$ мы обозначим различные положительные абсолютные постоянные; $\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(0,2\pi)}, 1\leq p\leq\infty$). Для доказательства оценок (4), (5) достаточно рассмотреть разложение в ряд Фурье функции

$$q(\theta)=|P(\theta)|^2=\Big(\sum_{k=0}^{n}\omega_k e^{ik\theta}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n}\bar\omega_k e^{-ik\theta}\Big)$$

и заметить, что для её коэффициентов Фурье имеют место соотношения

$$|\hat q(n)|=1 \quad \text{для} \quad P\in G_n \quad \text{и} \quad |\hat q(n-2\nu)|\geq 1,$$

$0\leq \nu < \frac{n}{2}$, если $P\in F_n$ (последнее соотношение есть следствие того факта, что сумма нечетного числа слагаемых, равных ± 1, отлична от нуля). С помощью аналогичных рассуждений проверяется (см. [6]), что

$$I_n \equiv \max_{P\in F_n} (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|P(\theta)|\,d\theta \leq (n+0{,}97)^{1/2}$$

(тривиальная оценка для I_n, вытекающая из неравенства $\|P\|_1\leq(2\pi)^{1/2}\|P\|_2$ и равенства Парсеваля: $I_n\leq(n+1)^{1/2}$). Более точные "оценки снизу" для отличия от постоянной величины модуля полинома из классов F_n и G_n, видимо, не установлены. Известно гораздо больше результатов противоположного характера. Прежде, чем начать их рассмотрение, сформулируем одну нерешенную задачу, имеющую значение для комбинаторики (точнее, для выяснения вопроса о несуществовании матриц Адамара порядка $(n+1)>4$, являющихся циркулянтами, см. подробнее [20, с.68]).

<u>Задача</u>. Верно ли, что не существует полинома $P\in F_n$, $n>4$, для которого при $j=0,1,\ldots,n$ $|P(\theta_j)|=(n+1)^{1/2}$, где $\theta_j=\frac{2\pi j}{n+1}$?

Среди результатов о полиномах из классов (1),(2) наибольшее число приложений имеют утверждения о существовании в этих классах полиномов с достаточно малой равномерной нормой. Ясно, что для $P\in G_n$

$$\|P\|_\infty \geq (2\pi)^{-1/2}\|P\|_2=(n+1)^{1/2}.$$

Первый пример последовательности полиномов $P_n\in G_n$, $n=1,2,\ldots$, с $\|P_n\|_\infty\leq C_2(n+1)^{1/2}$ при $n=1,2,\ldots$ был указан в 1914 г. Хар ди и Литлвудом [4], которые показали, что частные суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{k^2\pi i\tau} \cdot e^{ik\theta} \qquad (6)$$

удовлетворяют равномерно по θ соотношению

$$|S_n(\theta)| = \underline{\underline{O}}(n^{1/2}), \qquad (7)$$

если $\tau = \sqrt{q}$ - квадратичная иррациональность. Вероятно, более известен (см. [I, с.3I9]) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\beta k \log k} e^{ik\theta}, \quad \beta > 0,$$

частные суммы которого также обладают свойством (7). Вопрос о существовании полиномов $P_n \in F_n$, $n = 1, 2, \ldots$ с $\|P_n\|_\infty \leq C n^{1/2}$ довольно долго оставался открытым и был решен Шапиро [I8], а также Рудиным [I9], которые построили такую последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, что

$$\Big\|\sum_{k=p}^{p+q} \varepsilon_k e^{ik\theta}\Big\|_\infty \leq 5 q^{1/2}, \quad p = 0, 1, \ldots, \quad q = 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

Последовательность $\{\varepsilon_k\}$ задается явной конструкцией, именно по индукции определяются полиномы V_r, W_r, $r = 0, 1, \ldots$, $V_0 = W_0 = 1$ и при $r = 0, 1, \ldots$

$$V_{r+1}(z) = V_r(z) + z^{2^r} W_r(z), \quad W_{r+1}(z) = V_r(z) - z^{2^r} W_r(z),$$

где $z = e^{i\theta}$. Тогда

$$\varepsilon_k = \hat{V}_r(k) \qquad \text{, если } k < 2^r. \qquad (8')$$

Подробному изучению свойств последовательности (8') посвящены работы [24] - [27] (см. также [2]).

Начиная с тридцатых годов, для построения полиномов из рассматриваемых классов с какими-то дополнительными свойствами используются вероятностные соображения. К сожалению, "случайный" подход часто дает результаты с лишними логарифмическими множителями. Например (см. подробнее [2I]),

$$E\,\Big\|\sum_{k=0}^{n} \pm e^{ik\theta}\Big\|_\infty \asymp n^{1/2} (\log n)^{1/2}, \quad n \to \infty \qquad (9)$$

(здесь E обозначает среднее значение по всем выборам знаков), т.е. получить с помощью усреднения по всем полиномам из F_n результат Шапиро-Рудина нельзя.

Все же с помощью вероятностных соображений можно получать и точные результаты о полиномах из F_n. В 1975 г. автором (см. [12], [13]), как уточнение одного результата Салема [22], было получено следующее

Утверждение А. Для $n=1,2,\dots$ найдется полином $P_{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\varepsilon_k e^{ik\theta}\in F_{2n}$

$$\|S_n(P_{2n})\|_\infty \geqslant \left|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right| \geqslant c\, n^{1/2}\log n \geqslant c_1 \log n \|P_{2n}\|_\infty . \quad (10)$$

Один из элементов конструкции полиномов P_{2n}, имеющий вероятностный характер, оказался полезным и в других задачах (см. ниже) и состоит в следующем:

допустим, что уже построены полиномы $P'_{2n}=\sum_{k=0}^{2n}a_k e^{ik\theta}$,

$$n=1,2,\dots \ c \ \|P'_{2n}\|_\infty < C n^{1/2},\ \sum_{k=0}^{n}a_k > c' n^{1/2}\log n,$$

причем $a_k\in[-1,1]$ при $k=0,1,\dots,2n$ и $|\{k:|a_k|\neq 1\}|\leqslant n^{1-\delta}$ ($\delta>0$ - абсолютная постоянная; через $|A|$ мы обозначаем число элементов конечного множества A). Рассматривается функция

$$Q_{2n}(t,\theta)=P'_{2n}(\theta)+\sum_{k=0}^{2n}\gamma_k(t)e^{ik\theta}\equiv P'_{2n}(\theta)+q(t,\theta), \quad (10')$$

где $t\in(0,1)$, $\{\gamma_k(t)\}_{k=0}^{2n}$-набор независимых функций с нулевым средним значением, принимающих два значения: $\gamma_k(t)=1-a_k$ или $\gamma_k(t)=-1-a_k$ (т.е. $\gamma_k(t)\equiv 0$, если $|a_k|=1$). Тогда при любом t полином (от θ) $Q_{2n}(t,\theta)\in F_{2n}$ и в силу хорошо известных экспоненциальных оценок для сумм независимых функций мы имеем

$$E_t\|q(t,\theta)\|_U \leqslant C\, \ln^{1/2} n\cdot n^{\frac{1-\delta}{2}} \leqslant n^{\delta'},\quad \delta'<\frac{1}{2}$$

(здесь $\|f\|_U\equiv \sup_r\|S_r(f)\|_\infty$). Следовательно, для некоторого t справедлива оценка

$$\|P_{2n}-P'_{2n}\|_U\leqslant n^{\delta'},\ \delta'<\frac{1}{2};\ P_{2n}\equiv Q_{2n}(t_0,\theta), \quad (10'')$$

из которой, в частности, вытекает, что P_{2n} удовлетворяет утверждению А (см.(10)).

Литлвуд, Эрдеш и другие интересовались вопросом о возможности построения полиномов P_n из классов F_n и G_n с

$$cn^{1/2} \leqslant |P_n(\theta)| \leqslant Cn^{1/2}, \ \theta \in (0, 2\pi), \ n = 1, 2, \ldots \qquad (11)$$

Эрдеш [8] предполагал, что существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого полинома $P \in G_n$ $\|P\|_\infty \geqslant (1+C)(2\pi)^{-1/2}\|P\|_2 = (1+C)(n+1)^{1/2}$.

Литлвуд [4] высказал сомнение в справедливости этого предположения и оказался прав (см. ниже утверждение $\mathcal{D}$). Основанием для сомнения был, видимо, следующий результат, полученный им в [4] (см. также [5]):

Утверждение В. Пусть $n = 8q + 1$; q - натуральное и $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Тогда для полинома

$$P_{n-1}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{\frac{1}{2}k(k+1)} e^{ik\theta} \qquad (12)$$

имеют место соотношения :

1) $|n^{-\frac{1}{2}} P_{n-1}(\theta) - 1| \leqslant C_\delta n^{-\frac{1}{2}+\delta}$, если $n^{-\delta} \leqslant |\theta| \leqslant \pi$

($\delta > 0$ - произвольная фиксированная постоянная);

2) $|P_{n-1}(\theta)| \leqslant 1.35 \cdot n^{1/2}$ для любого $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Таким образом, для полиномов (12) равенство $|P_{n-1}(\theta)| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|P_{n-1}\|_2 (1 + \bar{o}(1))$ выполняется при всех $\theta \in (-\pi, \pi)$, за исключением малой окрестности: $|\theta| \leqslant n^{-\delta}$, $\delta < 1/2$. Использованные в работах [3], [4] (см.(6),(12)) полиномы вида

$$\sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i q(k)} e^{ik\theta}, \qquad (12')$$

где $q(k)$ - некоторый многочлен второй степени от k с действительными коэффициентами, применялись затем и другими авторами. Так, Ньюман [7] показал, что полиномы

$$P_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \omega^{k^2} e^{ik\theta}, \ \omega = e^{\frac{\pi i}{n+1}}, \ n = 1, 2, \ldots, \qquad (13)$$

обладают свойствами :

1) $\|P_n\|_1 \geqslant (n+1)^{1/2} - C = \|P_n\|_2 \cdot (2\pi)^{-\frac{1}{2}} - C$;

2) $(2\pi)^{-\frac{1}{4}}\|P_n\|_4 = [n^2 + \underline{O}(n^{3/2})]^{1/4}$,

т.е. их L^1, L^2 и L^4 средние почти совпадают (отметим, что ное равенство возможно только для функций с постоянным модулем). Беллер [10], оценив сверху L^p - нормы $(p > 2)$ полиномов (13), показал, что для величины

$$J_{n,p} = \inf_{p\in G_n} (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \|P\|_p$$

при $p \geq 2$ и $n = 1,2,\ldots$ справедливы неравенства

$$(n+1)^{1/2} \leq J_{n,p} \leq (n+1)^{1/2} + C_p(\log(n+1))^{p-2}.$$

В работе Литлвуда [9] содержится ряд задач и гипотез о свойствах классов F_n и G_n и, в частности, ставится задача о существовании в F_n или G_n полиномов P_n, удовлетворяющих соотношению (11). Приведем две гипотезы, сформулированные в [9]:

I) Найдутся такие постоянные $c>0$ и C, что при $n=2,3,\ldots$ для некоторого полинома $P\in F_n$ имеет место (11).

II) При $n=1,2,\ldots$ найдется полином $P\in F_n$, для которого $|P(\theta)|=(n+1)^{1/2}[1+o_n(1)]$ на всем периоде $(0,2\pi)$, кроме, быть может, множества значений θ меры $\bar{o}_n(1)$. Результатов, подтверждающих или опровергающих эти гипотезы, пока нет. Что касается вопроса о существовании полиномов $P_n \in G_n$ со свойством (11), то, как уже отмечалось, он решен положительно (см. утверждение С). В 1977 г. Бирнс [14] рассмотрел полиномы

$$P(\theta) \equiv P_{n^2-1}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi ijk}{n}\right) z^{j+kn} \qquad (14)$$

и установил ряд их свойств. В частности, в [14] показано, что при $n = 2,3,\ldots$

1) $\left|P\left(\frac{2\pi q}{n^2}\right)\right| = n$ для $q = 1,2,\ldots n^2$;

2) $cn \leq |P(\theta)| \leq Cn$, если $C_1 n^{-1} \leq |\theta| \leq \pi$;

3) $\|P\|_\infty \leq C_2 n$.

Как непосредственное следствие оценок для полиномов (I4) в [I4] (см. также [I6]) получено

Утверждение. Для $n = m^2$, $m = 2, 4, 6, \ldots$, найдется целое $M \le Cn^{3/4}$ и комплексные числа

$b_1, \ldots, b_{2M}, b'_{M+1}, \ldots, b'_{n-M}, b_{2n-M+2}, \ldots, b_{2n+M}$,

по модулю равные единице, такие, что для функции

$$V_n(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2M} b_j e^{ij\frac{\theta}{2}} + \sum_{k=M+1}^{n-M} b'_k e^{ik\theta} + \frac{1}{2}\sum_{j=2n-M+2}^{2n+M} b_j e^{ij\frac{\theta}{2}} \qquad (I5)$$

справедливо соотношение

$$\left| |V_n(\theta)| - n^{1/2} \right| \le C n^{1/4}, \quad -\infty < \theta < \infty. \qquad (I6)$$

В 1980 г. Кёрнер [I6] рассмотрел полином

$$P'(z) = g(z)\, V_n(z^4), \qquad z = e^{i\theta},$$

где функция $V_n(z)$ определена в (I5), а $g(z) = 1 + z - z^2 + z^3$ (отметим, что $g(z)$ не обращается в ноль на окружности $|z| = 1$). Ясно, что

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{4n+2M+3} a_k z^k$$

и

а) $|a_k| = 1$, если $2M + 4 \le k \le 4n - 2M + 3$;

б) $|a_k| \le 1$ для любого k;

в) $|P'(z)| = |g(z)| \cdot n^{1/2} + O(n^{1/4})$.

Описанное нами (см. (I0′), (I0″)) "случайное" исправление полинома $P'(e^{ik\theta})$ позволяет установить

Утверждение С ([I6]). Для $n = 2, 3, \ldots$ существует полином $P_n \in G_n$, удовлетворяющий соотношениям (II).

З а м е ч а н и е. Полиномы P_n построены в [I6] только для достаточно больших n. Чтобы охватить и случай малых n, достаточно построить полином $g \in F_n$, $n = 2, 3, \ldots$ с $g(z) \ne 0$ на окружности $|z| = 1$. Таким свойством обладает полином $g(z) = 1 + z + \ldots + z^{n-1} - z^n$. Действительно, $g(1) \ne 0$ и при $z \ne 1$

$$g(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1} - z^n = \frac{1}{1 - z}(z^{n+1} - 2z^n + 1).$$

Если $g(z)=0$, то $|z^{n+1}-2z^n|=1$, в то время как на множестве $\{z:|z|=1,\ z\neq 1\}$ мы имеем $|z^{n+1}-2z^n|=|z-2|>1$. Кахан [17], следуя приведенной выше схеме доказательства утверждения C, но используя вместо полиномов Бирнса некоторые модификации полиномов (12'), усилил результат Кёрнера:

<u>Утверждение $\mathcal{D}$</u> [17]. Для $n=2,3,\ldots$ существует полином $P_n\in G_n$: с

$$\||P_n(\theta)|-(n+1)^{1/2}\|_\infty\leqslant Cn^{1/2-1/17}(\log n)^{1/2}. \qquad (17)$$

Из сопоставления оценок (4) и (17) естественно возникает вопрос: для каких последовательностей R_n, $n=1,2,\ldots$ найдутся полиномы

$P_n\in G_n$, $n=1,2,\ldots$ с

$|P_n(\theta)|=(n+1)^{1/2}+O_n(R_n)$ для любого $\theta\in(0,2\pi)$?

Коснемся теперь полиномов из классов H_n. Свойства таких полиномов оказываются существенными в некоторых вопросах теории тригонометрических рядов (см., напр., [23]). Мы рассмотрим только одну задачу: о построении полиномов из H_n с заданным спектром и минимальной по порядку равномерной нормой. Автором был предложен геометрический подход к этой задаче, в основе которого лежит

<u>Утверждение Е.</u> ([28]). Для любого набора векторов $\{e_j\}_{j=1}^m\subset\ell_2^n$ с $\|e_j\|_{\ell_2^n}=1$, $j=1,\ldots,m$ найдется вектор $z=\{z_i\}_{i=1}^n\in\ell_2^n$ с координатами $z_i=+1,-1$ или 0, такой, что $|\{i:z_i=0\}|\leqslant n/2$ и

$|(z,e_j)|\leqslant C(m/n)^{1/2}$ при $j=1,\ldots,m$

(здесь (z,e) – скалярное произведение в n – мерном евклидовом пространстве ℓ_2^n).

Как следствие утверждения Е по схеме, намеченной в [29] и использованной в [30], устанавливается доложенное автором на Всесоюзной конференции по теории функций в Днепропетровске в июне 1985 г.

<u>Утверждение $\mathcal{F}$</u>. Для каждого множества натуральных чисел

$$\Lambda\subset\{1,\ldots,n\}\ \text{с}\ |\Lambda|\geqslant\delta n,\quad \delta>0.$$

а) найдется полином $Q_\Lambda\in H_n$ с $\hat{Q}_\Lambda(k)=0$, если $k\notin\Lambda$ и $|\{k:\hat{Q}_\Lambda(k)\neq 0\}|\geqslant\frac{1}{2}|\Lambda|$, для которого $\|Q_\Lambda\|_\infty\leqslant C_\delta|\Lambda|^{1/2}$;

б) найдется полином $P_\Lambda\in H_n$, $\{k:\hat{P}_\Lambda(k)\neq 0\}=\Lambda$ с $\|P_\Lambda\|_\infty\leqslant C_\delta\cdot|\Lambda|^{1/2}\ln\ln(\Lambda+3)$.

Таким образом, для любого множества $\Lambda \subset \{1,\dots,n\}$ "положительной плотности" можно построить "аналог полинома Рудина-Шапиро" со спектром $\Lambda' \subset \Lambda, |\Lambda'| \geq \frac{1}{2}|\Lambda|$. Указанный геометрический подход применим для изучения полиномов по многим системам функций. Сформулируем, в частности, один результат общего характера. Нам потребуется

О п р е д е л е н и е. Систему функций $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на некотором множестве G, назовем <u>квазиматричной</u>, если для некоторых абсолютных постоянных K_1 и K_2 и $n=1,2,\dots$ найдется конечное множество $\Omega_n \subset G$ с $|\Omega_n| \leq K_1 \cdot n$, такое, что для любого полинома $P(\theta)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(\theta)$ имеет место соотношение

$$\sup_{\theta\in G}|P(\theta)| \leq K_2 \sup_{\theta\in\Omega_n}|P(\theta)|. \tag{18}$$

Справедливо

<u>Утверждение G</u>. Пусть $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ – квазиматричная система функций, причем,

$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(\theta)|^2 \leq K_3\cdot n \quad \text{для любого } \theta\in G \text{ и } n=1,2,\dots \tag{19}$$

Тогда при $n=1,2,\dots$ найдется полином $P(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(\theta)$, $\lambda_k=+1,-1$ или 0, $\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k| \geq \frac{n}{2}$, для которого $\sup_{\theta\in G}|P(\theta)| \leq Cn^{1/2}$; $C=C(K_1,K_2,K_3)$ (см. (18),(19)) (утверждение G применимо и к конечным системам функций, если считать, что $\varphi_k(\theta)\equiv 0$ при $k\geq n_0$). Кроме того, для равномерно ограниченных квазиматричных систем справедлив и аналог пункта б) утверждения F; в частности, имеет место

<u>Утверждение G'</u>. Для любого набора векторов $\{e_j\}_{j=1}^{n}\subset R^n$ с $\|e_j\|_{\ell_\infty^n}\leq 1$, $j=1,2,\dots,n$, можно найти выбор знаков $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{n}$, $\varepsilon_j=\pm 1$, такой, что

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e_j\Big\|_{\ell_\infty^n} \leq C\cdot n^{1/2}\ln\ln(n+3).$$

Заключительные з а м е ч а н и я :

а) В 1914 г. С.Н.Бернштейн (см. [35, с.230]) при рассмотрении абсолютной сходимости тригонометрических рядов использовал полиномы

$$f_p(\theta)=\frac{2}{p(p-1)}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{k}{p}\right)(p-k)\cos k\theta \qquad (19')$$

(p - простое число вида $4s+1$, $\left(\frac{k}{p}\right)$ - символ Лежандра), которые, как оказалось, имеют наименьшую норму в L^∞ (равную $p^{1/2}(p-1)^{-1}$) среди всех полиномов вида

$$\sum_{k=1}^{p-1} a_k\cos k\theta,\ \sum_{k=1}^{p-1} a_k=0,\ \sum_{k=1}^{(p-1)/2}|a_k+a_{p-k}|=1.$$

Полиномы (I9) относятся к более широкому, чем G_n , классу полиномов:

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta},\ (2n+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{k=-n}^{n}|a_k|\geqslant c\left(\sum_{k=-n}^{n}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (20)$$

Экстремальные задачи для полиномов (20) и аналогичных полиномов по другим системам находят применения в теории функций (см. [I5], [3I] - [33]).

б) Глубокие результаты теории чисел (см.подробнее [34]) позволяют оценивать в точках $\theta_k=\frac{2\pi k}{p}$, $k=0,1,\ldots,p-1$, полиномы

$$P_q(\theta)=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{q(k)}{p}\right)e^{ik\theta} \qquad (2I)$$

(p -простое число; q -многочлен с целыми коэффициентами; $q\not\equiv R^2(\mathrm{mod}\,p)$; отметим, что число коэффициентов $\hat{P}_q(k)$, отличных от $\pm$I, не превосходит $\deg q$) и доказывать, что

$$|P_q(\theta)|\leq \deg q\cdot p^{1/2},\ \theta=\frac{2\pi k}{p},\ k=0,1,\ldots,p-1.$$

Однако получение точных оценок сверху для $\|P_q(\theta)\|_\infty$ есть нерешенная задача, сводящаяся к известным проблемам теории чисел, поэтому полиномы (2I) используются в теории функций не столь часто, как полиномы (8).

ЛИТЕРАТУРА

I. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. 1965. Т.I.
2. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.,1984.
3. Hardy G.H. Littlewood J.E. Some problems of diophantive approximation // Acta Math. 1914. Vol. 37. p. 193-239.
4. Littlewood J.E. On the mean values of certain trigonometrical polynomials // J. Lond. Math. Soc. 1961. Vol. 36. p. 307-334.
5. Littlewood J.E. On the mean values of certain trigonometrical polynomials. II // Illinois J. of Math. 1962. Vol. 6. p. 1-39.

6. Newman D.J. Norms of polynomials // Amer. Math. Monthly 1960. Vol. 67, P. 778–779.
7. Newman D.J. An L^4 extremal problem for polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16. P. 1287–1290.
8. Erdös P. Some unsolved problems // Michigan Math. j 1957. Vol. 4. P. 291–300.
9. Littlewood J.E. On polynomials $\sum^{n} \pm z^m, \sum^{n} e^{\alpha m^2 i} z^m, z = e^{i\theta}$ // J. London Math. Soc. 1966. Vol. 41. P. 367–376.
10. Beller E. Polynomial extremal problem in L^p // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 30. P. 249–259.
11. Beller E., Newman D.J. The minimum modulus of polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 45. P. 463–465.
12. Кашин Б.С. О множителях Вейля // Докл. Ан СССР. 1975. Т. 222. С. 1031–1032.
13. Кашин Б.С. On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series // Analysis Math. 1976. Vol. 2. P. 249–266.
14. Byrnes J.S. On the polynomials with coefficients of modulus one // Bull. Lond. Math. Soc. 1977. Vol. 9. P. 171–176.
15. Körner T.W. A Rudin-Shapiro type theorem // Illinois J. of Math. 1979. Vol. 23. P. 217–240.
16. Körner T.W. On a polynomials of Byrnes // Bull. Lond. Math. Soc. 1980. Vol. 12. P. 219–224.
17. Kahane J.R. Sur les polynomes a coefficients unimodulaires // Bull. Lond. Math. Soc. 1980. Vol. 12. P. 321–342.
18. Shapiro H.S. Extremal problems fo. polynomials and power series. These. M.I.T. 1951.
19. Rudin W. Some theorems on Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 855–859.
20. Davis P. Circulant matrices. N.Y., 1979.
21. Marcus M., Pisier G. Random Fourier series with applications to harmonic analysis // Ann. Math. Stud. 1981. № 101. P. 1–150.
22. Salem R. On a problem of Smithies // Indag. Math. 1954. Vol. 16. P. 403–407.
23. Pisier G. Conditions d'entropic et caracterisations arithmetiques des ensembles de Sidon // Topics in modern harmonic analysis. Roma, 1983. P. 911–944.
24. Brilhart J., Carlitz L. Note on the Shapiro polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 25. P. 114–118.
25. Brilhart J., Erdos P., Morton P. On sums of Rudin-Shapiro coefficient II // Pacif. J. of Math. 1983. Vol. 107. P. 39–70.

26. Rider D. Closed subalgebras of $L^1(T)$ // Duke Math. J. 1969. Vol. 36. P. 105–115.
27. Brilhart J., Morton P. Über Summen von Rudin-Shapiroschen Koeffizienten // Illinois J. of Math. 1978. Vol. 22. P. 126–148.
28. Кашин Б.С. Об одном изометрическом операторе в $L^2(0,1)$ // Докл. Болгарской АН. 1985. Т.38, № 12. С.1613–1616.
29. Кашин Б.С. О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн.Моск. ун-та. Сер.мат., мех. 1981. № 5. С. 8–15.
30. Кашин Б.С. Об однородных полиномах многих переменных на комплексной сфере// Мат. сборник. 1985. Т.126. С.420–425.
31. Кашин Б.С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Тр. Моск. ун-та. 1980. Т.145. С.111–116.
32. Кашин Б.С.О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов,связанных с равномерной сходимостью// Сообщ. АН Груз. ССР. 1979. Т.93. С.281–284.
33. Корегин А.Ф. Об абсолютной сходимости кратных тригонометрических рядов с лакунами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. мех. 1985. № 4. С. 3–9.
34. Хуа-Ло-Ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М., 1964.
35. Бернштейн С.Н. Собр.соч. Т.I.М.1952.