Об одной полной ортонормированной системе

Б. С. Кашин (Москва)

В этой работе мы докажем, что справедлива следующая

Теорема 1. *Существует ортонормированная, полная в пространстве $L_2(0, 1)$ система функций** $\{\psi_n(x)\}_{n=9}^{\infty}$ (о. н. п. с.), обладающая следующими свойствами: пусть дан ряд*

$$\sum_{n=9}^{\infty} c_n\psi_n(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=9}^{\infty} c_n^2 = \infty, \tag{2}$$

тогда ряд (1) *расходится на множестве положительной меры.*

Остается открытым вопрос, поставленный П. Л. Ульяновым в работе [6]: существует ли о. н. п. с. $\{\psi_n(x)\}$, для которой всякий ряд вида (1) при условии (2) расходится почти всюду, если же условие (2) не выполнено, то ряд (1) сходится почти всюду?

Для формулировки следствий из теоремы 1 напомним некоторые известные понятия (подробнее см. [1], [2]).

Пусть дана система измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, пусть, кроме того, задан какой-то класс F функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Систему $\{f_n(x)\}$ будем называть системой представления в смысле сходимости почти всюду (п. в.) для класса F, если для всякой функции $g(x) \in F$ найдется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nf_n(x)$, сходящийся к $g(x)$ п. в. на $[0, 1]$.

Далее, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nf_n(x)$ называется нуль-рядом в смысле сходимости п. в., если он сходится к нулю почти всюду и $a_{n_0}\neq 0$ при некотором n_0. Аналогично дается определение нуль-ряда в смысле сходимости по мере. А. А. Талалян [1] доказал, что по любой о. н. п. с. найдется нуль-ряд в смысле сходимости по мере.

Было неизвестно (см., например, [6], стр. 25), существует ли по любой о. н. п. с. нуль-ряд в смысле сходимости п. в. Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующая теорема, дающая ответ на этот вопрос.

* Нам удобнее при построении системы $\{\psi_n(x)\}$ нумеровать ее члены с $n=9$. Это, очевидно, не влияет на существо дела.

Теорема 2. *Существует о. н. п. с., по которой нет нуль-рядов в смысле сходимости п. в.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекает также

Теорема 3. *Не всякая о. н. п. с. является системой представления в смысле сходимости п. в. для класса измеримых и конечных на отрезке* $[0, 1]$ *функций.*

Вопрос, на который отвечает теорема 3, довольно долго оставался открытым (см. [1], стр. 137, задача 1).

Следует отметить, что построенная нами система $\{\psi_n(x)\}$ не является системой сходимости п. в., а поэтому некоторые «хорошие» функции (например, некоторые функции из пространства $L_2(0, 1)$) не представимы сходящимися п. в. рядами по этой системе.

Прежде чем доказать теорему 1, установим несколько лемм.

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная $b > 0$ такая, что для каждого $N > 3$ существует ортонормированная матрица $A_N = \{a_{ji}\}_{j,i=1}^{N}$, элементы которой имеют вид*

$$a_{ji} = \begin{cases} 1 - \alpha_1/N & \text{при} \quad i = j < N, \\ \alpha_2/N & \text{при} \quad i, j < N, \ i \neq j, \\ \alpha_3/\sqrt{N} & \text{при} \quad i = N, \ j \neq N, \\ \alpha_4/\sqrt{N} & \text{при} \quad i \neq N, \ j = N, \\ \alpha_5/\sqrt{N} & \text{при} \quad i = j = N, \end{cases}$$

где числа α_k зависят от N, но $|\alpha_k| \leqslant b$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A'_N = \{a'_{ji}\}_{j,i=1}^{N}$, где

$$a'_{ji} = \begin{cases} 1, & i = j < N, \\ \lambda, & i \neq j, \ i, j < N, \\ 1/\sqrt{N} & i = N, \ j \neq N \ \text{или} \ j = N, \ i \neq N, \\ \beta/\sqrt{N} & i = j = N. \end{cases}$$

Числа λ и β выберем чуть позднее. Пусть $e_j = \{a'_{j1}, \ldots, a'_{jN}\}$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$ — j-я строка матрицы A'_N. Тогда

$$(e_k, e_r) = 2\lambda + (N-3)\lambda^2 + \frac{1}{N} \ \text{при} \ k \neq r, \ k, r \neq N,$$

$$(e_k, e_N) = \frac{\beta}{N} + \frac{\lambda(N-2)}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Положим $\lambda = -(1/(N-3))(1 + \sqrt{3/N})$ (λ — корень уравнения $2\lambda + (N-3)\lambda^2 + \frac{1}{N} = 0$), и $\beta = -\sqrt{N}(\lambda(N-2) + 1)$.

Тогда

$$\frac{\beta}{N} = -\left(-\frac{N-2}{N-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{N-2}{N-3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{N} + \frac{1}{\sqrt{N}}\right) = $$

$$= -\left(-\frac{1}{\sqrt{N}(N-3)} - \frac{N-2}{N-3}\frac{\sqrt{3}}{N}\right),$$

отсюда следует, что $|\beta| < 6$.

Далее,

$$1 < s_j \equiv \sqrt{(e_j, e_j)} = \sqrt{1 + (N-2)\lambda^2 + \frac{1}{N}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{10}{N}} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j < N,$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{N}} \leqslant s_N \equiv \sqrt{(e_N, e_N)} = \sqrt{\frac{N-1}{N} + \frac{\beta^2}{N}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{36}{N}}.$$

Следовательно, при $1 \leqslant j \leqslant N$ имеем: $\left|\frac{1}{s_j} - 1\right| < \frac{100}{N}$.

Из последнего неравенства вытекает, что матрица A_N, образованная строками e_j/s_j, будет удовлетворять всем требованиям леммы *.

Лемма 2 (см. [3], стр. 347). *Пусть* $P(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k r_k(x)$ — *полином по системе Радемахера, тогда существуют абсолютные постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ $(C_1, C_2 < 1)$ *такие, что мера*

$$\mu\left\{x : x \in [0, 1], \ |P(x)| > C_1 \sqrt{\int_0^1 P^2(x)\,dx}\right\} \geqslant C_2.$$

Лемма 3. *Пусть* $C \geqslant 1$. *Тогда для любой функции* $f(x)$ *такой, что*

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \geqslant 1, \qquad \int_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant C^2,$$

справедлива оценка:

$$\mu\left\{x : |f(x)| \geqslant \frac{1}{4}\right\} \geqslant \frac{1}{8C^2}.$$

Доказательство. Введем множества

$$Q = \left\{x : x \in [0, 1], \ |f(x)| \geqslant \frac{1}{4}\right\},$$

$$E = \{x : x \in [0, 1], \ |f(x)| \geqslant 2C^2\}.$$

Тогда $C^2 \geqslant \int_E |f(x)|^2\,dx \geqslant 2C^2 \int_E |f(x)|\,dx$, и, следовательно,

$$\int_E |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}; \quad \int_{[0,1]\setminus E} |f(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{2}.$$

Стало быть,

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_{[0,1]\setminus E} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{4} + \mu Q \cdot 2C^2,$$

и поэтому $\mu Q \geqslant \frac{1}{8C^2}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для каждого* $N > 3$ *определим на отрезке* $[0, 1]$ *систему*

---

* Матрицы, которые удовлетворяют условиям леммы 1, применялись ранее А. М. Олевским.

функций * $\{f_j^N(x)\}_{j=1}^N$, *положив при* $x \in \left(\frac{i-1}{N+1}, \frac{i}{N+1}\right)$

$$f_j^N(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{i-j} & \text{при } i \neq j,\ |i-j| < \sqrt{N}, \\ 0 & \text{при } i = j \text{ или } |i-j| \geqslant \sqrt{N}. \end{cases}$$

Систему функций $\{f_j^N(x)\}$ *можно продолжить на отрезок* $[0, 2]$ *так, что*:

1) $\int\limits_0^2 f_j^N(x) f_k^N(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ B & \text{при } j = k, \end{cases}$

где постоянная B *не зависит от* N;

2) *при* $x \in [1, 2]$ *функции* $f_j^N(x)$ *кусочно постоянные с интервалами постоянства длины* 2^{-r} *(при некотором* r*).*

Доказательство. Легко видеть, что если мы сумеем продолжить систему $\{f_j^N(x)\}$ так, чтобы выполнялось условие 1), то затем ее можно изменить так, чтобы выполнялось условие 2).

В силу теоремы Шура (см. [4], стр. 84) для доказательства 1) достаточно показать, что **

$$q_N^2 \equiv \sup_{\sum\limits_{j=1}^N a_j^2 = 1} \int\limits_0^1 \left(\sum_{j=1}^N a_j f_j^N(x)\right)^2 dx \leqslant C.$$

Так как функции $f_j^N(x)$ кусочно постоянны, то

$$q_N = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sup_{\sum\limits_{j=1}^N a_j^2 = \sum\limits_{i=1}^{N+1} y_i^2 = 1} \sum_{i=1}^{N+1} y_i \sum_{j=1}^N a_j f_j^N\left(\frac{2i-1}{2(N+1)}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}} \sup_{\sum\limits_{j=1}^N a_j^2 = \sum\limits_{i=1}^{N+1} y_i^2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^N a_j y_i \gamma_{i,j},$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N}} f_j^N\left(\frac{2i-1}{2(N+1)}\right) = \begin{cases} 1/(i-j) & \text{при } 0 < |i-j| < \sqrt{N}, \\ 0 & \text{при } |i-j| \geqslant \sqrt{N} \text{ или } i = j. \end{cases}$$

Поэтому

$$q_N \leqslant \sup_{\sum\limits_{j=1}^\infty a_j^2 = \sum\limits_{i=1}^\infty y_i^2 = 1} \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_j y_i \delta_{i-j}, \tag{3}$$

---

* Эта система похожа на систему функций, рассмотренную Д. Е. Меньшовым (см. [4], стр. 193).

** Через C и C' в дальнейшем обозначаются различные абсолютные положительные постоянные.

где

$$\delta_\nu = \begin{cases} 1/\nu, & 0 < |\nu| < \sqrt{N}, \\ 0, & \nu = 0 \text{ или } |\nu| \geqslant \sqrt{N}. \end{cases}$$

Хорошо известно, что при такой последовательности $\{\delta_\nu\}$ правая часть неравенства (3) ограничена постоянной, не зависящей от N (см., например, [5], стр. 263, теор. 303).

Лемма доказана.

Отметим для дальнейшего, что при $1 \leqslant j,\ k < N - \sqrt{N}$

$$\int\limits_{j/(N+1)}^{1} f_j^N(x)\,dx = \int\limits_{k/(N+1)}^{1} f_k^N(x)\,dx > \frac{C \ln N}{\sqrt{N}}. \tag{4}$$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Возьмем последовательность $N_k = 2^k - 1$ $(k = 3, 4, \ldots)$, и пусть при $2^k < n < 2^{k+1}$ и $x \in [0, 3]$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} r_{s_k}(x)\, f_{n-2^k}^{N_k}(x)/\sqrt{2B} & \text{при} \quad x \in [0, 2], \\ r_n(x)/\sqrt{2} & \text{при} \quad x \in [2, 3], \end{cases} \tag{5}$$

где функции $f_j^N(x)$ определены на отрезке $[0, 2]$ по лемме 4, а последовательность функции Радемахера* $r_{s_k}(x)$ выбрана такой редкой, чтобы система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=9,\, n \neq 2^k}^{\infty}$ была ортогональной и нормированной системой на отрезке $[0, 3]$ (это можно в силу условия 2) леммы 4). При $n = 8, 16, \ldots$ $\ldots, 2^s, \ldots$ функции $\varphi_n(x)$ не определяем совсем.

Добавим к системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=9,\, n \neq 2^k}^{\infty}$ такой набор функций $\{u_k(x)\}_{k=3}^{\infty}$, что система $\{\varphi_n(x)\} \bigcup \{u_k(x)\}$ образует полную ортогональную и нормированную систему на отрезке $[0, 3]$.

Определим наконец искомую систему $\{\psi_n(x)\}_{n=9}^{\infty}$. Мы построим систему $\{\psi_n(x)\}$ на отрезке $[0, 3]$, а потом ее можно перенести на отрезок $[0, 1]$ преобразованием подобия.

Пусть $n = 2^k + \nu$, где $0 < \nu \leqslant 2^k$, $k = 3, 4, \ldots$. Рассмотрим матрицу $A_{2^k} = \{a_{ji}\}$, существование которой гарантируется леммой 1, и положим при $x \in [0, 3]$

$$\psi_n(x) = \sum_{r=1}^{2^k - 1} a_{\nu, r}\varphi_{2^k + r}(x) + a_{\nu, 2^k} u_k(x). \tag{6}$$

Полученная система $\{\psi_n(x)\}_{n=9}^{\infty}$ образует о. н. п. с. на отрезке $[0, 3]$, так как матрицы A_{2^k} ортонормированные, и все функции $\varphi_n(x)$ и $u_k(x)$ можно выразить через функции $\psi_n(x)$. Покажем, что построенная система удовлетворяет всем требованиям теоремы.

* Мы считаем, что функции Радемахера продолжены с периодом 1 с отрезка $[0,1]$ на всю числовую ось.

Рассмотрим произвольный ряд вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют условию (2). Положим

$$\beta_k=\sqrt{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n^2}\,,\quad d_k=\frac{1}{2^{k/2}}\left|\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n\right|,\quad k=3,4,\ldots .$$

По неравенству Коши $\beta_k\geqslant d_k$. Пусть абсолютная постоянная

$$C_0=\frac{C_1\sqrt{C_2}}{10b}\leqslant\frac{1}{10b}$$

(где C_1 и C_2 — постоянные из леммы 2, а b — из леммы 1). Разобьем все натуральные числа $k>2$ на две группы. В первую группу S_1 отнесем те числа k, для которых

$$C_0\beta_k\leqslant d_k. \tag{7}$$

Остальные числа отнесем к группе S_2.

Возможны два случая:

1) Ряд $\sum\limits_{k\in S_1}\beta_k^2=\infty$. Тогда мы покажем, что ряд (1) не сходится на множестве E, $E\subset[0,1]$, $\mu E>0$.

2) Ряд $\sum\limits_{k\in S_1}\beta_k^2<\infty$. Тогда в силу (2) ряд $\sum\limits_{k\in S_2}\beta_k^2=\infty$, и мы покажем, что ряд (1) не сходится по мере на отрезке [2, 3].

Рассмотрим случай 1). Пусть число $k\in S_1$. Из свойств матрицы A_{2^k} (см. лемму 1) и равенства (6) сразу следует, что при $2^k<n<2^{k+1}$

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)+\Delta_n(x),$$

где

$$\int_0^3|\Delta_n(x)|\,dx\leqslant 3\sqrt{\int_0^3\Delta_n^2(x)\,dx}\leqslant\frac{C}{2^{k/2}}.$$

Поэтому для любой целочисленно измеримой функции $N(x)$ такой, что $2^k+1\leqslant N(x)<2^{k+1}$, $x\in[0,3]$,

$$\int_0^3\left|\sum_{n=2^k+1}^{N(x)} c_n\psi_n(x)\right|dx=\int_0^3\left|\sum_{n=2^k+1}^{N(x)} c_n\varphi_n(x)+\sum_{n=2^k+1}^{N(x)} c_n\Delta_n(x)\right|dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^3\left|\sum_{n=2^k+1}^{N(x)} c_n\varphi_n(x)\right|dx-\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1}|c_n|\int_0^3|\Delta_n(x)|\,dx\geqslant \tag{8}$$

$$\geqslant\int_0^3\left|\sum_{n=2^k+1}^{N(x)} c_n\varphi_n(x)\right|dx-\frac{C}{2^{k/2}}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|c_n|\geqslant\int_0^3\left|\sum_{n=2^k+1}^{N(x)} c_n\varphi_n(x)\right|dx-C\beta_k.$$

Пусть $a(k)=2^k-[2^{k/2}]-2$ и

$$\widetilde N(x)=\begin{cases} i-1 & \text{при}\quad x\in((i-1)\,2^{-k},\,i2^{-k}),\quad 2\leqslant i\leqslant a(k),\\ a(k) & \text{при}\quad x\in((i-1)\,2^{-k},\,i2^{-k}),\quad a(k)<i\leqslant 2^k,\end{cases}$$

оценим число

$$q=\int_0^1\left|\sum_{n=2^k+1}^{2^k+\widetilde{N}(x)} c_n\varphi_n(x)\right|dx.$$

Пусть $\alpha_j=c_{2^k+j}$, $j=1, 2, \ldots, 2^k$. Ясно, что

$$\sum_{j=}^{2^k}\alpha_j^2=\beta_k^2, \quad \frac{1}{2^{k/2}}\left|\sum_{j=1}^{2^k}\alpha_j\right|=d_k.$$

В силу равенства (5)

$$q\sqrt{2B}=\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(x)}\alpha_j f_j^{N_k}(x)\right|dx, \tag{9}$$

где $N_k=2^k-1$, а система функций $\{f_j^{N_k}(x)\}$ определена в лемме 4.

Из (9), очевидно, вытекает, что

$$q\sqrt{2B}\geqslant\left|\int_0^1\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(x)}\alpha_j f_j^{N_k}(x)\,dx\right|.$$

В силу (4) и определения функции $N(x)$

$$q\sqrt{2B}\geqslant\left|\int_0^1\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(x)}\alpha_j f_j^{N_k}(x)\,dx\right|=\left|\sum_{j=1}^{a(k)}\alpha_j\int_{j/2^k}^1 f_j^{N_k}(x)\,dx\right|= \tag{10}$$

$$=\left|\left(\sum_{j=1}^{a(k)}\alpha_j\right)\int_{2^{-k}}^1 f_1^{N_k}(x)\,dx\right|\geqslant\frac{C\ln 2^k}{2^{k/2}}\left|\sum_{j=1}^{a(k)}\alpha_j\right|.$$

Далее, так как по неравенству Коши

$$\left|\sum_{j=a(k)+1}^{2^k}\alpha_j\right|\leqslant 2^{1+\frac{k}{4}}\sqrt{\sum_{j=1}^{2^k}\alpha_j^2}\leqslant 2\beta_k 2^{k/4},$$

то при достаточно большом k получим:

$$\frac{1}{2^{k/2}}\left|\sum_{j=1}^{a(k)}\alpha_j\right|\geqslant\frac{1}{2^{k/2}}\left|\sum_{j=1}^{2^k}\alpha_j\right|-\frac{4\beta_k}{2^{k/4}}\geqslant d_k-\frac{4\beta_k}{2^{k/4}}\geqslant C\beta_k,$$

ибо $k\in S_1$ (см. (7)). Поэтому (см. (9) и (10)) $q\geqslant C(\ln 2^k)\beta_k$. Вспоминая определение числа q и учитывая (8), получаем

$$\int_0^1\left|\sum_{n=2^k+1}^{2^k+\widetilde{N}(x)} c_n\psi_n(x)\right|dx\geqslant C(\ln 2^k)\beta_k\geqslant Ck\beta_k. \tag{11}$$

С другой стороны, в силу известной леммы Меньшова — Радемахера (см. [4], стр. 188)

$$\sqrt{\int_0^1\left(\sum_{2^k+1}^{\widetilde{N}(x)+2^k} c_n\psi_n(x)\right)^2dx}\leqslant C'(\ln 2^k)\beta_k\leqslant C'k\beta_k, \tag{12}$$

и остается применить лемму 3 к функции

$$\frac{1}{Ck\beta_k}\left(\sum_{n=2^k+1}^{N(x)+2^k} c_n\psi_n(x)\right),$$

чтобы получить (см. (11) и (12)), что

$$\mu\left\{x\in[0,\ 1]:\ \left|\sum_{n=2^k+1}^{2^k+\widetilde{N(x)}} c_n\psi_n(x)\right|\geqslant Ck\beta_k\right\}\geqslant C. \tag{13}$$

Оценка (13) верна при любом достаточно большом $k\in S_1$. Так как мы предположили, что $\sum\limits_{k\in S_1}\beta_k^2=\infty$, то $\varlimsup\limits_{\substack{k\to\infty\\ k\in S_1}} k\beta_k=\infty$, и из оценки (13) вытекает расходимость ряда (1) на множестве E с $\mu E>0$, $E\subset[0,\ 1]$, в случае 1).

Рассмотрим случай 2).

Возьмем число $k\in S_2$. В силу (6) и ортонормированности матрицы A_{2^k} мы имеем:

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n\psi_n(x)=\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1}\gamma_n\varphi_n(x)+\omega_k u_k(x),$$

где

$$\beta_k^2=\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n^2=\omega_k^2+\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1}\gamma_n^2.$$

При этом из свойств матрицы A_{2^k} сразу следует, что

$$\omega_k\leqslant\frac{b}{2^{k/2}}\left|\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n\right|+\frac{2b}{2^{k/2}}\max_{2^k<n\leqslant 2^{k+1}}|c_n|\leqslant bd_k+2^{1-\frac{k}{2}}b\beta_k,$$

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1}\gamma_n^2=\beta_k^2-\omega_k^2\geqslant\beta_k^2-(bd_k+2^{1-\frac{k}{2}}b\beta_k)^2.$$

Из этих оценок и того, что при $k\in S_2$

$$bd_k\leqslant\frac{C_1\sqrt{C_2}}{10}\beta_k\leqslant\frac{1}{10}\beta_k,$$

при достаточно больших $k\in S_2$ мы имеем:

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1}\gamma_n^2\geqslant\frac{1}{2}\beta_k^2,\qquad\left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1}\gamma_n^2\right)\frac{C_1^2C_2}{20Q}\geqslant\omega_k^2. \tag{14}$$

Возьмем последовательность натуральных чисел $\{m_s\}_{s=1}^{\infty}$ такую, что оценки (14) верны при $k\geqslant m_1$ $(k\in S_2)$ и

$$\sum_{k=m_s}^{m_{s+1}-1}\beta_k^2=\sum_{n=2^{m_s}+1}^{2^{m_{s+1}}} c_n^2\geqslant s. \tag{15}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=2^{m_s}+1}^{2^{m_{s+1}}} c_n\psi_n(x) = I_s'(x) + I_s''(x), \tag{16}$$

где

$$I_s'(x) = \sum_{k\in S_1\cap[m_s, m_{s+1})} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n\psi_n(x),$$

$$I_s''(x) = \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n\psi_n(x).$$

Так как $\sum\limits_{k\in S_1} \beta_k^2 < \infty$, то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int_0^3 (I_s'(x))^2\,dx \leqslant \sum_{k\in S_1} \beta_k^2 \leqslant C < \infty. \tag{17}$$

Далее,

$$I_s''(x) = \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n\psi_n(x) = \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1} \gamma_n\varphi_n(x) + \omega_k u_k(x)\right).$$

При этом в силу (14) и (15) имеем

$$J_s \equiv \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}-1} \gamma_n^2\right) \geqslant \left(\frac{C_1^2C_2}{20}\right)^{-1} \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \omega_k^2, \quad J_s \geqslant \frac{s}{2}.$$

В силу (5) $\varphi_n(x) = r_n(x)/\sqrt{2}$ при $x\in[2, 3]$ и $n\neq 2^k$ $(k=1, 2, \ldots)$, и поэтому

$$I_s''(x) = P_s(x) + \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \omega_k u_k(x) \quad (x\in[2, 3]),$$

где $P_s(x)$ — полином по системе Радемахера, и

$$\int_2^3 P_s^2(x)\,dx = \frac{1}{2}J_s \geqslant \frac{s}{4}, \qquad \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \omega_k^2 \leqslant J_s \frac{C_1^2C_2}{20}.$$

Так как функции $u_k(x)$ ортогональны и $\int\limits_0^3 u_k^2(x)\,dx = 1$, то

$$\int_0^3 \left(\sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \omega_k u_k(x)\right)^2 dx = \sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \omega_k^2 \leqslant J_s \frac{C_1^2C_2}{20}.$$

Следовательно, по неравенству Чебышева получаем

$$\mu\left\{x\in[2, 3] : \left|\sum_{k\in S_2\cap[m_s, m_{s+1})} \omega_k u_k(x)\right| \geqslant \frac{\sqrt{J_s}\,C_1}{3}\right\} \leqslant \frac{C_2}{2}. \tag{18}$$

Далее, в силу леммы 2

$$\mu\left\{x\in[2,3]:\quad |P_s(x)|\geqslant\frac{\sqrt{J_s}}{\sqrt{2}}C_1\right\}\geqslant C_2. \tag{19}$$

Из оценок (18) и (19) следует, что

$$\mu\left\{x\in[2,3]:\quad |I_s''(x)|\geqslant\frac{\sqrt{J_s}}{6}C_1\geqslant\frac{\sqrt{s}}{10}C_1\right\}\geqslant\frac{C_2}{2}.$$

Отсюда, учитывая (17) и (см. также (16)), сразу получаем, что в случае 2) ряд (1) не сходится по мере на отрезке [2, 3]. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказывая теорему, мы пополняли систему $\{\varphi_n(x)\}$ произвольным образом, добавляя к ней функции $\{u_k(x)\}$. Используя тот факт, что система Уолша есть система сходимости, легко выбрать функции $u_k(x)$ так, чтобы из условия $\sum\limits_{n=9}^{\infty} c_n^2<\infty$ следовала сходимость на множестве положительной меры ряда (1). Теорема 1 с этим замечанием дают положительный ответ на одну задачу П. Л. Ульянова (см. [6], стр. 17).

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой для широкого класса методов суммирования, т. е. можно построить систему $\{\psi_n(x)\}$ так, чтобы ряд (1) не суммировался на множестве положительной меры, если его коэффициенты удовлетворяют условию (2).

(Поступила в редакцию 20/V 1975 г.)

Литература

1. **А. А. Талалян,** Представление измеримых функций рядами, Успехи матем. наук, **XV**, вып. **5 (100)** (1960), 77—141.
2. **П. Л. Ульянов,** Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, Успехи матем. наук, **XXVII**, вып. **2 (164)** (1972), 3—52.
3. **А. Зигмунд,** Тригонометрические ряды, т. 1, Москва, ИЛ, 1965.
4. **С. Качмаж, Г. Штейнгауз,** Теория ортогональных рядов, Москва, Физматгиз, 1958.
5. **Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа,** Неравенства, Москва, ИЛ, 1948.
6. **П. Л. Ульянов,** Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, Успехи матем. наук, **XIX**, вып. **1 (115)** (1964), 3—69.