Доклады Академии наук СССР
1976. Том 228, № 2

УДК 517.523 *МАТЕМАТИКА*

Б. С. КАШИН

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ СХОДИМОСТИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 22 I 1976)

Ортонормированная система (о.н.с.) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенная на отрезке $[0, 1]$, называется системой сходимости, если всякий ряд

$$\sum_{n=1} c_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2<\infty, \tag{2}$$

сходится почти всюду (п.в.) на отрезке $[0, 1]$.

О.н.с. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой строгой сходимости, если для сходимости п.в. ряда (1) необходимо и достаточно выполнение условия (2).

Если задана некоторая система сходимости $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то можно определить оператор мажоранты частных сумм T_Φ, действующих из пространства l_2 в пространство L_0 всех измеримых и конечных п.в. на отрезке $[0,1]$ функций, следующим образом: если $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$, то

$$T_\Phi(a)=f(x)\equiv \sup_{1\leqslant k<\infty}\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\varphi_n(x)\right|.$$

А. М. Олевский ([1]) показал, что существует такая система сходимости $\Phi_0=\{\varphi_n(x)\}$ и такой элемент $a_0\in l_2$, что

$$T_{\Phi_0}(a_0)\notin \bigcup_{p>0} L_p(0, 1).$$

Е. М. Никишин ([2]) доказал следующую теорему противоположного характера:

Т е о р е м а А. *Пусть* $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *ортонормированная система сходимости; тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдутся множество* $E_\varepsilon\subset[0,1]$, $\mu E_\varepsilon>1-\varepsilon$, *и постоянная* C_ε *такие, что для любого* $a\in l_2$ *мера*

$$\mu\{x\in E_\varepsilon\colon |T_\Phi(a)|>y\}\leqslant C_\varepsilon\left(\frac{\|a\|_{l_2}}{y}\right)^2 \tag{3}$$

Из этой теоремы непосредственно следует, что оператор T_Φ есть ограниченный оператор из пространства l_2 в пространство $L_p(E_\varepsilon)$ при любом $p<2$.

Возникал вопрос, насколько окончательна оценка (3).

Оказывается, что теорема А неусиляема, точнее, справедлива

Т е о р е м а 1. *Существует ортонормированная система сходимости* $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что для любого множества* $E\subset[0,1]$, $\mu E>0$, *найдется последовательность* $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$ *такая, что*

$$T(a)\notin L_2(E).$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей заметки.

Т е о р е м а 2. *Существует полная в пространстве* $L_2(0,1)$ *ортонормированная система строгой сходимости.*

Теорема 2 дает ответ на задачу, поставленную в работе ([3]) П. Л. Ульяновым.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 из нашей работы ([4]), однако необходимо внести два основных изменения. Во-первых, функции из системы Меньшова, которые применялись в ([4]) (см. ([4]), лемма 4), нужно заменить на функции из о.н. системы, которая удовлетворяет теореме 1 этой работы. Кроме того, в доказательстве теоремы 2 применяется следующий вспомогательный результат, который может быть полезен и в других случаях.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $E\subset L_2(0,1)$ — *замкнутое линейное многообразие; тогда в* E *можно выбрать ортонормированный базис* $\{\varphi_n(x)\}$ *такой, что система* $\{\varphi_n(x)\}$ *является системой сходимости.*

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. М. Олевский,* Матем. сб., т. 71, № 3 (1966). [2] *Е. М. Никишин,* Резонансные теоремы и функциональные ряды, Докт. диссер., М., 1971. [3] *П. Л. Ульянов,* УМН, т. 19, № 1 (1964). [4] *Б. С. Кашин,* Матем. сб., т. 99, № 3 (1976).