МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 2 (1979)

ДОКТОРСКИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Б. С. Кашин. **Общие ортонормированные системы и некоторые вопросы теории приближений.**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Диссертация защищена 8 декабря 1977 г. на заседании Специализированного ученого совета Д. 002.38.03 при Математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР. Официальные оппоненты: член-корреспондент АН СССР, доктор физико-математических наук В. Я. Козлов; член-корреспондент АН Арм. ССР, доктор физико-математических наук А. А. Талалян; профессор, доктор физико-математических наук В. М. Тихомиров. Библ. 48 назв.

Диссертация посвящена той части теории функций, основным понятием в которой является понятие ортогональности. В последние годы теория ортогональных рядов быстро развивается, одна из причин этого состоит в том, что ряд классических теорем о свойствах тригонометрической системы оказался справедлив для широких классов ортонормированных систем.

Мы рассматриваем общие ортонормированные системы прежде всего потому, что в ряде случаев они обладают существенно лучшими свойствами, чем тригонометрическая и другие классические системы.

Работа состоит из введения и трех глав, каждая из которых разбита на несколько параграфов.

В главах II и III изучается в основном сходимость почти всюду (п. в.) ортогональных рядов.

В главе I решается ряд задач теории приближений; при этом существенно используются некоторые свойства ортонормированных систем.

Все главы работы связаны между собой, в частности, некоторые результаты главы I являются, грубо говоря, конечномерными аналогами теорем, полученных в главах II и III.

Изложим результаты, полученные в диссертации.

В главе I изучаются поперечники классов гладких функций и некоторых конечномерных множеств. Дадим предварительно несколько определений.

Определение 1. Пусть X — банахово пространство, K — компакт в X. n-поперечником в смысле Колмогорова множества K в пространстве X называется величина

$$d_n(K, X) = \inf \sup_{x \in K} \min_{y \in L_n} \| x - y \|_X,$$

где inf берется относительно всех возможных n-мерных плоскостей $L_n \subset X$.

Далее, если $\Phi = \{\varphi_i\}$ — последовательность элементов из X, то положим

$$E_n^{\Phi}(K, X) = \sup_{x \in K} \min_{\{\alpha_i\}_{i=1}^n \in R^n} \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\|_X .$$

Через l_p^n мы обозначаем пространство R^n, снабженное нормой

$$\| x \|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n | x_i |^p \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i | & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

а через B_p^n — единичный шар в l_p^n.

Наконец, напомним, что W_p^r ($r \geqslant 1$, целое)— это класс гладких функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и

$$\| f(x) \|_{L^p} + \| f^{(r)}(x) \|_{L^p} \leqslant 1,$$

а $\widetilde{W}_p^r$ — аналогичный класс периодических функций.

Много работ различных авторов посвящено изучению поперечников классов W_p^r и $\widetilde{W}_p^r$ в банаховых пространствах $L^q(0, 1)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Подробный обзор полученных результатов см. в [1], [2], [3].

В главе I доказывается ряд окончательных теорем о поведении поперечников $d_n(W_p^r, L^q)$ и $d_n(B_p^m, l_q^m)$. Под окончательностью мы понимаем точное определение порядка поперечников [1]).

Глава I состоит из трех параграфов. В § 1 содержатся основные теоремы главы — теоремы I.1 и I.2. В § 2 доказываются два геометрических результата. По этим результатам, носящим отчасти модельный характер, можно судить, какого типа вопросы возникают при оценке поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$. Наконец, в § 3 уточняются оценки, полученные в § 1 для $d_n(B_p^m, l_q^m)$ в частном случае, когда $p = 1$, $q = \infty$.

Первые оценки поперечников $d_n(W_p^r, L^q)$ были получены в 1936 г. А. Колмогоровым [4] (при $p = q = 2$). В 50-х годах Рудиным [5] и С. Б. Стечкиным [6] были определены порядки (при $n \to \infty$) поперечников $d_n(W_1^r, L^2)$ и $d_n(W_\infty^r, C)$. В 1960 г. В. М. Тихомиров [7] впервые вычислил точное значение поперечников $d_n(W_\infty^r, C)$, а затем в работах [8], [9], [10], [2] были определены порядки величины $d_n(W_p^r, L^q)$ при любых $p \geqslant q$, а также при $1 \leqslant p < q \leqslant 2$. При этом выяснилось, что если $T = \{1, \sin 2\pi nx, \cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ — тригонометрическая система, то

$$d_n(W_p^r, L^q) \asymp E_n^T(\widetilde{W}_p^r, L^q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p \geqslant q, \\ n^{-r-1/q+1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < q \leqslant 2. \end{cases} \qquad (1)$$

В случае $p < q$, $q > 2$ о величине $d_n(W_p^r, L^q)$ было известно существенно меньше. Некоторые авторы предполагали, что и в этом случае $d_n(W_p^r, L^q) \asymp E_n^T(\widetilde{W}_p^r, L^q)$, однако Р. С. Исмагилов [2] показал, что уже при $p = 1$, $q = \infty$, $r = 2$

$$d_n(W_1^2, C) \asymp$$
$$\asymp d_n(\widetilde{W}_1^2, C) < Cn^{-6/5} \ln n < C'n^{-1/5} \ln n E_n^T(\widetilde{W}_1^2, C).$$

Из этого результата следует, что тригонометрическая система не является хорошим аппаратом приближения функций из класса W_1^2 в метрике $C(0, 1)$.

---

[1]) Отметим в связи с этим, что в силу соотношения $d_n(W_p^r, L^q) \asymp d_n(\widetilde{W}_p^r, L^q)$ достаточно определить порядки только для $d_n(W_p^r, L^q)$.

Порядки поперечников $d_n(W_p^r, L^q)$ при $q > \max(2, p)$, $p > 1$ были неизвестны (о случае $p = 1$ см. ниже). Более того, известные оценки для $d_n(W_p^r, L^q)$ не были точными даже в степенной шкале.

Автором была получена следующая

ТЕОРЕМА I.1. *Пусть* $1 < p < q \leqslant \infty$, $q > 2$. *Тогда справедливы соотношения*

$$d_n(W_p^r, L^q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p > 2, \\ n^{-r-1/2+1/p}, & \text{если } p \leqslant 2. \end{cases}$$

Теорема I.1 завершает решение задачи об определении порядков величин $d_n(W_p^r, L^q)$, $r > 1$.

В диссертации показано, что оценки для поперечника $d_n(W_p^r, L^q)$, полученные в теореме I.1, верны и для классов W_p дробного порядка $r > 0$ при $rp > 1$, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $q > 2$.

Справедливо также

Следствие I.2. *Для любых чисел* p, q, r *с* $q > \max(p, 2)$, $p > 1$ *существует ортонормированная система* $\Phi = \Phi_{p,r,q} = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, *такая, что*

$$d_n(W_p^r, L^q) \asymp E_n^{\Phi}(W_p^r, L^q) \quad (n \to \infty).$$

В силу сказанного ранее, ортонормированная система Φ, о которой говорится в следствии I.2, обладает существенно лучшими свойствами (с точки зрения приближения классов $\widetilde{W}_p^r$), чем тригонометрическая система.

В работе [11], а также [12] были предложены достаточно точные способы сведения задачи об оценке поперечников $d_n(W_p^r, L^q)$ к задаче об оценке величин $d_n(B_p^m, l_q^m)$. Такое сведение задачи к конечномерной и применение затем результатов автора (см. теорему I.6) и Р. С. Исмагилова [2] о поведении поперечников $d_n(B_1^m, l_\infty^m)$ позволили Е. Д. Глускину и В. Е. Майорову (см. [11], [13], [14]) определить порядки поперечников $d_n(W_1^r, L^q)$, $r > 1$.

Однако при $p > 1$ хороших оценок для $d_n(B_p^m, l_q^m)$ ($q > \max(p, 2)$) не было; это не позволяло достаточно точно оценить поперечники $d_n(W_p^r, L^q)$.

Изучение поведения поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ представляет самостоятельный геометрический интерес. Этому вопросу посвящен ряд работ (см. подробнее [1]).

При $p \geqslant q$ величина $d_n(B_p^m, l_q^m)$ определяется точно (см. [1, стр. 232]).

В случае $1 \leqslant p < q \leqslant 2$, используя установленное С. Б. Стечкиным [6] равенство

$$d_n(B_1^m, l_2^m) = (1 - n/m)^{1/2},$$

нетрудно получить удовлетворительные оценки для поперечника $d_n(B_p^m, l_q^m)$.

Сложнее обстоит дело, если число $q > 2$. Даже в случае $m = 2n$, при $1 < p < q$, $q > 2$, порядки величин $d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n})$ были неизвестны. Например, в наиболее важном случае, когда $p = 2$, $q = \infty$, известно было (см. [15], [2]) только, что $C_1 \cdot n^{-1/2} < d_n(B_2^{2n}, l_\infty^{2n}) < C \cdot n^{-1/4}$. Автором была доказана

ТЕОРЕМА I.2. *При $m \geqslant n$ справедливо неравенство*

$$d_n(B_2^m, l_\infty^m) \leqslant C \cdot n^{-1/2} (1 + \ln(m/n))^{3/2}.$$

В конце § 1 главы I определяются порядки поперечников $d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n})$ во всех случаях, когда они были неизвестны. Доказывается

ТЕОРЕМА I.3. *Пусть $q > \max(p, 2)$, $p > 1$. Тогда*

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} n^{-1/2+1/q}, & \text{если } p \leqslant 2, \\ n^{-1/p+1/q}, & \text{если } p > 2. \end{cases}$$

Отметим, что поведение величины $d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n})$ полезно знать для приложений к другим задачам теории приближений.

В § 2 гл. I доказывается

ТЕОРЕМА I.4. *Для любого $n \geqslant 1$ существует ортогональное преобразование T пространства R^n такое, что*

$$C \| x \|_{l_2^n} \leqslant (n^{-1/2}/2)(\| Tx \|_{l_1^n} + \| x \|_{l_1^n}) \leqslant \| x \|_{l_2^n}, \qquad x \in R^n.$$

В конце § 2 дается оценка размерности почти сферического сечения n-мерного октаэдра B_1^n. Доказывается

ТЕОРЕМА I.5. *Для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c_\varepsilon > 0$ такая, что при любом $n \geqslant 1$ найдется плоскость $L_{n,\varepsilon} \subset R^n$, $\dim L_{n,\varepsilon} > n(1 - \varepsilon)$, такая, что* *для любого* $x \in L_{n,\varepsilon}$ *выполнены неравенства*

$$c_\varepsilon \| x \|_{l_2^n} \leqslant n^{-1/2} \| x \|_{l_1^n} \leqslant \| x \|_{l_2^n}.$$

Теорема I.5 показывает, что известный результат Дворецкого [16], о существовании почти сферических сечений у выпуклого, центрально симметричного тела, можно существенно усилить, если это тело — октаэдр B_1^n.

Близкий к теореме I.5 результат был независимо получен в работе Фигеля, Линденштраусса и Мильмана [17]. Отметим, что если сама постановка задачи, решаемой в теореме I.5, традиционна, то формулировка теоремы I.4 представляется нам новой и небезынтересной.

В § 3 даются оценки поперечников октаэдров B_1^m в банаховом пространстве l_∞^m. Как отмечалось выше, эти оценки (полученные до доказательства теорем I.2, I.1) применялись другими авторами для определения порядков величин $d_n(W_1^r, L^q)$, $d_n(H_1^r, L^q)$. В случае октаэдра найденные оценки для $d_n(B_1^m, l_\infty^m)$ оказались весьма слабо зависящими от числа m. Точнее говоря, справедлива

ТЕОРЕМА I.6. а) *Пусть* $m^\lambda < n < \theta \cdot m$, $\lambda > 0$, $\theta < 1$. *Тогда*

$$0 < c_\theta \cdot n^{-1/2} < d_n(B_1^m, l_\infty^m) < C_\lambda \cdot n^{-1/2};$$

б) *при любых* m *и* n $(m \geqslant n)$

$$d_n(B_1^m, l_\infty^m) \leqslant (C/n^{1/2})(1 + \ln(m/n))^{1/2}.$$

До работы автора лучшей оценкой поперечника $d_n(B_1^m, l_\infty^m)$ была оценка Р. С. Исмагилова [2]:

$$d_n(B_1^m, l_\infty^m) \leqslant (C/n^{1/2}) \cdot (m/n)^{1/2}.$$

В главе II диссертации даются оценки множителя Вейля и рассматриваются некоторые другие задачи, связанные со сходимостью п. в. ортогональных рядов.

Определение 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная система функций (о. н. с.), определенных на отрезке $[0, 1]$. Последовательность $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n)$ называется множителем Вейля для сходимости п. в. рядов по этой системе, если из условия

$$\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \lambda_n < \infty$$

следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

сходится п. в. на отрезке [0, 1].

Последовательность $\{\lambda_n\}$, являющаяся множителем Вейля, называется точным множителем Вейля, если для любой последовательности $\beta_n = o(\lambda_n)$ найдется ряд вида (2), расходящийся на множестве положительной меры, хотя

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \beta_n < \infty.$$

Определение 3. О. н. с. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если последовательность $\lambda_n \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots,$— множитель Вейля для сходимости п. в. рядов по этой системе.

Г. Вейль доказал, что последовательность $\lambda_n = \sqrt{n}$ является множителем Вейля для сходимости п. в. рядов по любой о. н. с. Затем в работах ряда авторов (см. подробнее [18]) этот результат последовательно усиливался. Наконец, в 1921 г. Д. Меньшовым и, независимо, Радемахером была доказана следующая

ТЕОРЕМА А (Меньшов, Радемахер). *Последовательность $\lambda_n = \log^2 n$ является множителем Вейля для сходимости п. в. рядов по любой о. н. с.*

Одновременно Д. Меньшовым был получен результат, показывающий точность этой теоремы.

ТЕОРЕМА В (Д. Меньшов). *Существует о.н.с. $\Phi_0 = \{\varphi_n(x)\}$, для которой последовательность $\lambda_n = \log^2 n$ — точный множитель Вейля.*

Часто получение более точной, чем вытекающая из теоремы А, оценки множителя Вейля для какой-то конкретной о.н.с. Φ представляет очень сложную задачу. Например, в случае, когда Φ — тригонометрическая система, окончательный результат был получен только в 1966 г. Карлесоном [19], который доказал, что тригонометрическая система — система сходимости.

Так как функции $\{\varphi_n(x)\}$ в системе Φ_0, построенной Д. Меньшовым, были существенно неограничены, то существовала надежда, что для любой о.н.с., ограниченной в совокупности, множитель Вейля можно взять растущим медленнее, чем $\log^2 n$. Однако в 1938 г. Д. Меньшов [20] доказал, что для любого $K > 1$ существует о.н.с. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ такая, что

1) $|\varphi_n(x)| \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in [0, 1]$;

2) последовательность $\{\log^2 n\}$ — ее точный множитель Вейля.

Представляет интерес и не входящий в теорему Д. Меньшова случай $K = 1$. В этом случае все функции $\varphi_n(x)$ из системы Φ таковы, что $|\varphi_n(x)| \equiv 1$, что вместе с ортогональностью накладывает на систему Φ весьма жесткие ограничения.

Еще в 1927 г. А. Колмогоровым и Д. Меньшовым [21] была доказана

ТЕОРЕМА C. *Существует о. н. с.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, *такая, что*

1) $|\varphi_n(x)| = 1$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) *любая последовательность* β_n с $\beta_n = o(\log n)$ *не является множителем Вейля для сходимости п. в. рядов по этой системе.*

В 1969 г. Тандори [22] получил следующий результат в этом же направлении.

ТЕОРЕМА D. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют о. н. с.* $\{\varphi_n(x)\}$ *с* $|\varphi_n(x)| = 1$ *при* $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, *и ряд вида* (2) *такой, что*

1) $\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log n (\log\log n)^{1-\varepsilon} < \infty$;

2) *ряд* (2) *расходится п. в. после некоторого изменения порядка членов.*

В § 1 гл. II доказывается результат, усиливающий теоремы C и D.

ТЕОРЕМА II.1. *Существует о. н. с.* $\{\varphi_n(x)\}$ *с* $|\varphi_n(x)| = 1$ *при* $x = [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая, что последовательность* $\lambda_n = \log^2 n$ *является точным множителем Вейля для сходимости п. в. рядов по этой системе.*

Используя один промежуточный результат, полученный в доказательстве теоремы II.1, в конце § 1 доказывается

ТЕОРЕМА II.2. *Существует непрерывная на* $[-\pi, \pi]$ *функция*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

такая, что

1) *модуль непрерывности*

$$\omega(\delta, f) = O(1/\log(1/\delta));$$

2) $|a_1| > |a_2| > \ldots$;

3) *ряд Фурье функции* $f(x)$ *расходится при* $x = 0$.

Этот результат является усилением одной теоремы Салема [23], который установил аналогичное утверждение без условия 1). Заметим, что в силу теоремы Дини — Липшица (см. [24, стр. 280]) гладкость функции $f(x)$, гарантируемая условием 1), не может быть увеличена.

Множители Вейля имеет смысл рассматривать только для бесконечных о. н. с. В § 2 гл. II изучается «конечномерный» аналог понятия множителя Вейля.

Пусть $\Phi = \Phi(n) = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, $x \in [0, 1]$,— некоторый набор ортонормированных функций. Определим оператор мажоранты частных сумм S_Φ^*: $l_2^n \to L^2(0, 1)$ следующим образом:

если $y = \{y_i\}_{i=1}^n \in l_2^n$, то

$$S_\Phi^*(y) = f(x) = \sup_{1 \leqslant r \leqslant n} \left| \sum_{i=1}^r y_i \varphi_i(x) \right|. \tag{3}$$

Пусть $s(\Phi)$ — норма оператора S_Φ^*, т. е.

$$s(\Phi) = \sup_{\|y\|_{l_2^n} \leqslant 1} \| S_\Phi^*(y) \|_{L^2}.$$

При изучении сходимости п. в. ортогональных рядов часто возникает задача оценки для данного набора Φ числа $s(\Phi)$. Например, основная лемма в теореме Меньшова — Радемахера (см. сформулированную ранее теорему А) состоит в том, что для любого набора $\Phi = \Phi(n)$ справедливо неравенство

$$s(\Phi) \leqslant C \ln n.$$

В то же время Д. Меньшовым, при доказательстве теоремы В, для каждого $n \geqslant 1$ был указан пример такого ортонормированного набора $\Phi_0 = \Phi_0(n)$, что

$$s(\Phi_0) \geqslant c \ln n. \tag{4}$$

В § 2 гл. II выясняется, каково «среднее значение» нормы $s(\Phi)$. Чтобы придать понятию «среднее значение» точный смысл, мы рассматриваем множество ортонормированных систем $Q^n = \{\Phi\}$ следующего вида: если $\Phi \in Q^n$, то $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ и при этом каждая функция $\varphi_i(x)$ постоянна на интервалах $((j-1)/n, j/n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Существует естественное взаимно однозначное соответствие между системами $\Phi \in Q^n$ и элементами группы O^n ортогональных матриц порядка n, а именно: системе $\Phi = \{\varphi_i\}$ ставится в соответствие матрица $A = \{a_{ij}\} \in \in O^n$ следующего вида:

$$a_{ij} = n^{-1/2}\varphi_i\,((j - 1/2)/n), \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

С помощью этого соответствия мера Хаара μ_n, определенная на группе O^n, переносится на множество Q^n.

Доказывается следующая

ТЕОРЕМА II.3. *Существуют абсолютные постоянные C и $\gamma > 0$ такие, что при любом $n \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$*

$$\mu_n\,\{\Phi \in Q^n\colon\ s\,(\Phi) \geqslant t\} \leqslant (C \cdot e^{-\gamma t^2})^n.$$

Из теоремы II.3 вытекают следующие следствия.

Следствие II.1. *Существует такая постоянная B, что при $n = 1, 2, \ldots$*

$$\mu_n\,\{\Phi \in Q^n\colon s\,(\Phi) \geqslant B\} < e^{-n}.$$

Следствие II.1 показывает, что пример системы $\Phi_0\,(n)$, указанный Д. Меньшовым (см. (4)), является резким исключением из общего правила (отметим, что систему $\Phi_0\,(n)$ со свойством (4) можно выбрать лежащей в Q^n).

Следствие II.2. *Пусть S^n — множество всех перестановок набора чисел $1, 2, \ldots, n$, $\sigma \in S^n$, Φ_σ — переставленный в порядке σ набор функций Φ ($\Phi \in Q^n$). Тогда*

$$\mu_n\,\{\Phi \in Q^n\colon \max_{\sigma \in S^n} s\,(\Phi_\sigma) > C \ln^{1/2} n\} < n^{-n}.$$

Из теоремы I.4 и следствия II.1 вытекает

Следствие II.3. *Существует множество систем $E_n \subset Q^n$ с $\mu_n\,(E_n) < 2^{-n}$ такое, что для всякой системы $\Phi = \{\varphi_i\} \in Q^n$, не лежащей в E_n, справедливы неравенства:*

1) $s\,(\Phi) < B$;

2) *для любого набора* $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$,

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant n} m \left\{x \in [0, 1]\colon \left|\sum\nolimits_{i=1}^r a_i\varphi_i\,(x)\right| > c_1\right\} > c_2,$$

где B, c_1, c_2 — положительные абсолютные постоянные.

Следствие II.3 показывает, что «большинство» систем Φ из Q^n обладают свойствами, которые обнаруживались только у «лакунарных» систем (например, у систем независимых функций).

В § 3, завершающем гл. II, рассматривается связь между суммируемостью п. в. и сходимостью п. в. ортогональных рядов.

П. Л. Ульяновым была поставлена следующая задача: существует ли полная в $L^2(0, 1)$ о. н. с. $\{\varphi_n(x)\}$, ограниченная в совокупности (т. е. $|\varphi_n(x)| < M$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$) и такая, что для сходимости п. в. ряда (2) необходима и достаточна суммируемость ряда (2) методом средних арифметических. (О причинах постановки этой задачи см. подробнее в [25].) Из следующей теоремы, доказанной в § 3 гл. II, вытекает положительный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА II.4. *Существует такая перестановка* $\{u_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *о. н. системы Уолша* $\{u_k(x)\}$, *что для сходимости п. в. ряда* (2) *по системе* $\varphi_n(x) = u_{k_n}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (2) *суммировался п. в. методом средних арифметических.*

Последняя, третья глава диссертации состоит из двух параграфов. §2 гл. III посвящен вопросам представления измеримых функций сходящимися п. в. ортогональными рядами. К настоящему времени создана обширная теория представления функций рядами. Параллельно вопросам представления функций всегда рассматриваются вопросы единственности представления.

Результаты автора относятся к той части теории представления функций рядами, которая была начата в 1916 г. Д. Меньшовым, доказавшим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА Е (Д. Меньшов). *Существует тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

такой, что $a_{n_0} \neq 0$ *при некотором* n_0, *и сходящийся п. в. на отрезке* $[0, 2\pi]$ *к функции* $f(x) \equiv 0$.

Напомним, что вопрос о существовании таких рядов был поставлен Лузиным.

Определение 4. Пусть задана система измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ называется нуль-рядом в смысле сходимости п. в., если он сходится п. в. на $[0, 1]$ к $f(x) \equiv 0$ и $a_{n_0} \neq 0$ при некотором n_0.

Теорема E утверждает, иными словами, что существует нуль-ряд в смысле сходимости п. в. по тригонометрической системе.

Аналогично определению 4 дается определение нуль-ряда в смысле сходимости по мере; при этом ясно, что всякий нуль-ряд в смысле сходимости п. в.— нуль-ряд в смысле сходимости по мере.

Вопрос о существовании нуль-ряда естественно переносится с тригонометрической системы на произвольную полную о. н. с. Впервые в такой общей постановке этот вопрос рассматривался, вероятно, Марцинкевичем (см. [26, стр. 312]), который в 1937 г. получил следующий результат.

ТЕОРЕМА F (Марцинкевич). *Для любой полной о. н. с.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *найдется ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, $a_{n_0} \neq 0$, $1 \leqslant n_0 < \infty$, *у которого некоторая подпоследовательность частных сумм* $S_{m_\nu}(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *сходится п. в. на отрезке* $[0, 1]$ *к* $f(x) \equiv 0$.

В 1956 г. А. А. Талалян [27] усилил этот результат.

ТЕОРЕМА G (А. А. Талалян). *По любой полной о. н. с. существует нуль-ряд в смысле сходимости по мере.*

Пример нуль-ряда Д. Меньшова был перенесен на системы Хаара и Уолша (см. [28], [29]). Позднее рядом авторов находились условия на полную о. н. с. $\{\varphi_n(x)\}$, из которых следовало существование нуль-рядов в смысле сходимости п. в. по этой системе. К настоящему времени было доказано существование нуль-рядов в смысле сходимости п. в. для широкого класса полных о. н. с. (подробнее см. [30], [31], [32]). Однако задача о существовании нуль-ряда по любой полной о. н. с. оставалась открытой.

Основным результатом главы III является доказываемая в § 2

ТЕОРЕМА III.3. *Существует полная в* $L^2(0, 1)$ *о. н. с.* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что для сходимости п. в. ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x) \tag{5}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{6}$$

Из теоремы III.3 непосредственно вытекает

Следствие III.1. *Существует полная о. н. с. $\{\psi_n(x)\}$, по которой нельзя построить нуль-ряд в смысле сходимости п. в., и, следовательно, представление любой функции сходящимся п. в. рядом по этой системе единственно.*

Отметим, что вопрос о существовании систем, удовлетворяющих теореме III.3, был впервые поставлен П. Л. Ульяновым [33].

Определение 5. Пусть задан какой-то класс $\mathcal{F}$ функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, и система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой представления в смысле сходимости п. в. для класса $\mathcal{F}$, если для всякой функции $g(x) \in \mathcal{F}$ найдется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$, сходящийся к $g(x)$ п. в. на $[0, 1]$.

А. А. Талалян [27], [34] доказал, что произвольная полная о. н. с. $\{\varphi_n(x)\}$ является системой представления в смысле сходимости по мере для класса всех измеримых (не обязательно конечных п. в.) функций.

В 1965 г. А. А. Талалян и Ф. Г. Арутюнян [35] обнаружили, что ряд по системе Хаара (и Уолша) не может сходиться к бесконечности на множестве положительной меры. Отсюда следует, что уже система Хаара не есть система представления для класса всех измеримых функций Однако еще раньше Н. К. Бари (см. [34]) доказала, что любую конечную п. в. измеримую функцию можно представить сходящимся п. в. рядом по системе Хаара. Аналогичное утверждение верно и для системы Уолша. Довольно долго было неизвестно (см., например, [34]), является ли всякая полная о. н. с. системой представления в смысле сходимости п. в. для класса всех конечных п. в. измеримых функций. Из теоремы II.3 следует отрицательный ответ на этот вопрос; более того, справедлива

ТЕОРЕМА III.4. *Существуют непрерывная функция $f(x)$, $x \in [0, 1]$, и полная о. н. с. $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что не существует ряда вида* (5), *сходящегося к $f(x)$ почти всюду.*

В первом параграфе гл. III изучаются свойства ортогональных систем сходимости. Результаты § 1 существенно используются в доказательстве теоремы III.3.

Если $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ — о. н. с. сходимости, то аналогично равенству (3) определяется оператор мажоранты частных сумм, S_Φ^*: $l^2 \to L^0(0, 1)$, действующий в пространстве $L^0(0, 1)$ всех измеримых и конечных п. в. функций.

А именно, если $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l^2$, то

$$S_\Phi^*(a) = f(x) = \sup_{1 \leqslant r < \infty} \left| \sum\nolimits_{n=1}^r a_n \varphi_n(x) \right|.$$

А. М. Олевский [36] показал, что существуют система сходимости $\Phi_1 = \{\varphi_n(x)\}$ и элемент $a \in l^2$, такие, что

$$S_{\Phi_1}^*(a) \notin \bigcup_{p>0} L^p(0, 1).$$

Е. М. Никишиным ([37]; см. также [38]) была доказана

ТЕОРЕМА Н (Е. М. Никишин). *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система сходимости, тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся множество* $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $mE_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, *и постоянная* C_ε *такие, что для любого* $a \in l^2$ *мера*

$$m\{x \in E_\varepsilon : S_\Phi^*(a) \geqslant y\} \leqslant C_\varepsilon (\|a\|_{l^2}/y)^2. \tag{7}$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что для любой системы сходимости Φ оператор S_Φ^* — ограниченный оператор из l^2 в пространство $L^p(E_\varepsilon)$ ($E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $mE_\varepsilon > 1 - \varepsilon$), при любом $p < 2$.

Для приложений важен вопрос (см. [37, стр. 134]) о возможности замены неравенства «слабого типа» (7) более сильным неравенством «сильного типа».

В § 1 доказывается неусиляемость теоремы Н.

ТЕОРЕМА III.1. *Существует о. н. с. сходимости* $\Phi_2 = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *такая, что для любого множества* E *с* $mE > 0$

$$S_\Phi^*(a) \notin L^2(E)$$

при некотором, зависящем от множества E, *элементе* $a = \{a_n\} \in l^2$.

В конце § 1 гл. III доказывается

ТЕОРЕМА III.2. *Пусть* L — *произвольное подпространство в* $L^2(0, 1)$. *Тогда в* L *можно выбрать такой ортонормированный базис* $\{\varphi_n(x)\}$, *что* $\{\varphi_n(x)\}$ — *система сходимости.*

Теорема III.2 дает возможность избежать специальных построений при доказательстве некоторых теорем о сходимости п. в. ортогональных рядов.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., МГУ, 1976.
[2] Исмагилов Р. С., Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами, Успехи матем. наук, 29, № 3 (1974), 161—178.
[3] Корнейчук Н. П., О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения, Успехи матем. наук, 29, № 3 (1974), 9—42.
[4] Kolmogoroff A., Uber die besste Annaherung von Functionen einer gegebenen Functionklassen, Ann. Math., 37 (1936), 107—111.
[5] Rudin W., L^2 approximation by partial sums of orthogonal developments, Duke Math. J., 19, № 1 (1952), 1—14.
[6] Стечкин С. Б., О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, Успехи матем. наук, 9, № 1 (1954), 133—134.
[7] Тихомиров В. М., Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений, Успехи матем. наук, 15, № 3 (1960), 81—120.
[8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, Докт. дисс., М., 1970.
[9] Бабаджанов С. Б., Тихомиров В. М., О поперечниках одного класса в пространствах L_p, Изв. АН Узб.ССР, Сер. физ.-мат., 2 (1967), 24—30.
[10] Маковоз Ю. И., Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве, Матем. сб., 87, № 1 (1972), 136—146.
[11] Глускин Е. Д., Об одной задаче о поперечниках, Докл. АН СССР, 219, № 3 (1974), 527—530.
[12] Майоров В. Е., Дискретизация задачи о поперечниках, Успехи матем. наук, 30, № 6 (1975), 179—180.
[13] Майоров В. Е., О наилучшем приближении классов $W_1^r(I^s)$ в пространстве $L_\infty(I^s)$, Матем. заметки, 19, № 5 (1976), 699—705.
[14] Майоров В. Е., Теоремы о представлении и наилучшие приближения на классах W_p^r, H_p^r, Докл. АН СССР, 228, № 2 (1976), 293—296.
[15] Соломяк М. З., Тихомиров В. М., О геометрических характеристиках вложения классов W_p^α в C, Изв. вузов, Матем., 10 (1967), 76—81.

[16] Dvoretzky A., A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45 (1959), 223—226.
[17] Figiel T., Lindenstrauss I., Milman V., The dimension of almost sphericial sections of convex bodies, Acta Math., 139, № 1—2 (1977), 53—94.
[18] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
[19] Carleson L., On convergence and growth of partial sums Fourier series, Acta Math., 116, № 1—2 (1966), 135—157.
[20] Menchoff D., Sur les series des fonctions orthogonales, bornees dans leur ensemble, Матем. сб., 3, № 1 (1938), 103—120.
[21] Kolmogoroff A., Menchoff D., Sur la convergence des series de fonctions orthogonales, Math. Zeits., 26 (1927), 432—441.
[22] Tandori K., Eine Bemerkung zum Konvergenzproblem der Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 20 (1969), 314—322.
[23] Salem R., On a problem of Smithies, Nederl. Acad. Wetensch. Indag. Math., 16 (1954), 403—407.
[24] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
[25] Стечкин С. Б., Ульянов П. Л., Подпоследовательности сходимости рядов, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 86 (1965).
[26] Marcinkiewicz J., Collected Papers, Warszawa, PWN, 1964.
[27] Талалян А. А., О сходимости ортогональных рядов, Докл. АН СССР, 110 (1956), 515—516.
[28] Петровская М. Б., О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, Сер. матем., 28, № 4 (1964), 773—798.
[29] Шнейдер А. А., О единственности разложений по системе Уолша, Матем. сб., 24 (1949), 279—300.
[30] Olevski A. M., Fourier series with respect to general orthogonal system, Berlin, Springer, 1975.
[31] Ульянов П. Л., Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, Успехи матем. наук, 27, № 2 (1972), 3—52.
[32] Арутюнян Ф. Г., Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Матем. сб., 90, № 3 (1973), 483—520.
[33] Ульянов П. Л., Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, Успехи матем. наук, 19, № 1 (1964), 3—69.
[34] Талалян А. А., Представление измеримых функций рядами, Успехи матем. наук, 15, № 5 (1960), 77—141.
[35] Талалян А. А., Арутюнян Ф. Г., О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Матем. сб., 66, № 2 (1965), 240—247.
[36] Олевский А. М., Об одной ортонормальной системе, Матем. сб., 71, № 3 (1966), 297—336.
[37] Никишин Е. М., Резонансные теоремы и функциональные ряды, Докт. дисс., М., 1971.

[38] Никишин Е. М., Автореферат докторской диссертации Матем. заметки, **10**, № 5 (1971), 583—595.

Работы автора по теме диссертации

[39] Об одной полной ортонормированной системе, Матем. сб., **99**, № 3 (1975), 356—365.
[40] О некоторых свойствах ортогональных систем сходимости, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **143** (1977), 68—87.
[41] Об ортогональных системах сходимости, Докл. АН СССР, **228**, № 2 (1976), 285—286.
[42] О множителях Вейля, Докл. АН СССР, **222**, № 5 (1975), 1031—1032.
[43] On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series, Analysis Math., **2**, № 4 (1976), 249—266.
[44] Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций, Изв. АН СССР, Сер. матем., **41**, № 2 (1977), 334—351.
[45] Порядки поперечников некоторых классов гладких функций, Успехи матем. наук, **32**, № 1 (1977), 191—192.
[46] О поперечниках октаэдров, Успехи матем. наук, **30**, № 4 (1975), 251—252.
[47] О колмогоровских поперечниках октаэдров, Докл. АН СССР, **214**, № 5 (1974), 1024—1026.
[48] On the mean value of certain functions connected with the convergence of orthogonal series, Analysis Math., **4** (1978), 27—35.