О ВОЗМОЖНОСТИ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМ "ОБ ИСПРАВЛЕНИИ"

Б. С. Кашин

В работе автора [1] был установлен аналог известной теоремы Д. Е. Меньшова "об исправлении" для произвольных дискретных полных ортонормированных систем. В [2] при изучении другой задачи теории ортогональных рядов рассмотрены свойства мажоранты частных сумм ортогонального ряда относительно некоторого семейства подмножеств. Точнее, пусть I – произвольное множество индексов с числом элементов $\#I < \infty$ и Ω – семейство подмножеств I. Далее, пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ – ортонормированная система функций, заданных на пространстве с мерой (X,Σ,μ), $\mu(X) = 1$, и "занумерованных" элементами из I. Для ортогонального разложения

$$f(x) \sim \sum c_\alpha \varphi_\alpha(x)$$

определим "Ω-мажоранту частных сумм":

$$S^*_\Omega f(x) = \sup_{\Lambda\in\Omega} \left|\sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha\varphi_\alpha(x)\right|. \qquad (1)$$

В "обычном" случае $I = I_N \equiv \{1,2,\dots,N\}$ и

$$\Omega = \{I_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Для d-кратных ортогональных рядов рассмотрение мажоранты прямоугольных частных сумм сводится к (1), если $I = (I_N)^d$, а

$$\Omega = \{I_{k_1}\times\dots\times I_{k_d} : 1 \leqslant k_s \leqslant N,\ s = 1,2,\dots,d\}.$$

В этой заметке, дополняющей работу [1], при некоторых условиях на семейство Ω и систему $\{\varphi_\alpha\}$ установлена возможность исправления произвольной ограниченной функции f до функции с ограниченной Ω-мажорантой. Ниже мы рассматриваем только конечные ортонормированные системы $\Phi_N = \{\varphi^N_k(x)\}^N_{k=1}$, $N = 1,2,\dots$, удовлетворяющие следующим трем условиям:

i) $\|\varphi^N_k(x)\|_{L^\infty(X,\mu)} \leqslant M_1$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $N = 1,2,\dots$;

ii) для $N = 1,2,\dots$ существует набор точек $\{x_j\}^N_{j=1} \subset X$ такой, что матрица $\{N^{-1/2}\varphi^N_k(x_j)\}^N_{k,j=1}$ – ортонормированная;

iii) для $N = 1,2,\dots$ существует набор точек $\{z_j\}^Q_{j=1}$ с $Q \leqslant M_2N$ такой, что для любого полинома

$$P = \sum_{k=1}^N a_k\varphi^N_k(x) \qquad (2)$$

имеет место неравенство

$$\|P\|_{L^\infty(X,\mu)} \leqslant M_3 \max_{1\leqslant j\leqslant Q} |P(z_j)|$$

(здесь и далее M_i, $i = 1,2,\dots,$ – абсолютные постоянные).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00094 и № 96-15-96102, и фонда INTAS, грант № 93-1376.

Отметим, что условие iii) – свойство *квазиматричности* (или *квазидискретности*) систем Φ_N, введенное в [3], – естественно возникает в ряде вопросов анализа. Кроме того, отметим, что условия i)–iii) очевидно выполнены в случае, когда при $N = 1, 2, \dots$ Φ_N – равномерно ограниченные дискретные системы (т.е. $X = (0,1)$ и $\varphi_k^N(x) = \mathrm{const}$ при $x \in ((i-1)/N, 1/N)$, $1 \leqslant i \leqslant N$).

Ниже через $P_N\bigl(x, \{y_k\}_{k=1}^N\bigr)$ мы обозначаем (единственный в силу ii)) полином вида (2), для которого

$$P(x_k) = y_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Введем теперь ограничение на "сложность" последовательности семейств Ω_N подмножеств отрезков натурального ряда I_N, $N = 1, 2, \dots$. Именно, предположим, что

$*$) для некоторого $\rho < 1$ при $N = 1, 2, \dots$ найдутся семейства Δ_s, $\varnothing \in \Delta_s$, $s = 1, \dots, s_0$, с $\#\Delta_s \leqslant M_4 \exp\exp s^\rho$ такие, что каждое множество $\omega \in \Omega_N$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=1}^{s_0} E_s, \qquad E_s \in \Delta_s, \quad \#E_s \leqslant \frac{N}{2^s}, \quad E_s \cap E_{s'} = \varnothing \ \text{ при } s \neq s'.$$

Замечание 1. Близкие к $*$) условия на семейства множеств Ω_N играют важную роль в теории коммуникационной сложности (см., например, [4]).

Ниже под *исправлением полинома вида* (2) мы понимаем замену его на полином $\widetilde{P}$, отличный от P только в малой доле точек x_k, $1 \leqslant k \leqslant N$. Ясно, что для дискретных систем такое исправление есть изменение функции на множестве малой меры.

Метод работы [1] позволяет установить следующий результат

Теорема. *Пусть при $N = 1, 2, \dots$ заданы ортонормированные системы $\Phi_N = \{\varphi_k^N(x)\}_{k=1}^N$, причем выполнены условия* i)–iii), *и семейства Ω_N подмножеств I_N со свойством $*$). Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε, зависящая от ε, а также от ρ и M_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, такая, что при $N = 1, 2, \dots$ для любого набора $\{y_j\}_{j=1}^N$ с $|y_j| \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant N$, найдется набор $\{\widetilde{y}_j\}_{j=1}^N$ такой, что*

$$\#\{j : y_j \neq \widetilde{y}_j\} \leqslant \varepsilon N$$

и

$$\|S_\Omega^* P(x, \{\widetilde{y}_j\})\|_{L^\infty} \leqslant C_\varepsilon.$$

Замечание 2. Метод доказательства теоремы позволяет рассматривать и мажоранты, в определении которых допускается зависимость семейства подмножеств Ω от точки x (т.е. $\Omega = \Omega(x)$).

Как отмечалось в [2], результаты об оценках мажорант S_Ω^* применимы к исследованию мажоранты прямоугольных частных сумм кратного ортогонального ряда. В частности, пусть при $d = 1, 2, \dots$ и $N = 1, 2, \dots$

$$F_{d,N} = \bigl\{\bar{\jmath} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d : -N \leqslant j_s \leqslant N,\ s = 1, \dots, d\bigr\}$$

и

$$\Gamma_{d,N} = \left\{ z_{\bar{\jmath}} = \left(\frac{2\pi j_1}{2N+1}, \dots, \frac{2\pi j_d}{2N+1} \right),\ \bar{\jmath} = (j_1, \dots, j_d) \in F_{d,N} \right\}.$$

Обозначим через $T\bigl(x, \{y_{\bar{\jmath}}\}_{\bar{\jmath} \in F_{d,N}}\bigr)$ тригонометрический полином t степени $\leqslant N$ по каждой из d переменных, для которого $t(z_{\bar{\jmath}}) = y_{\bar{\jmath}}$, если $z_{\bar{\jmath}} \in \Gamma_{d,N}$. Из теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Для* $\varepsilon > 0$ *и* $d = 2, 3, \dots$ *существует постоянная* $C_{\varepsilon,d}$ *такая, что для каждого набора* $\{y_{\bar{\jmath}}\}$ *с* $|y_{\bar{\jmath}}| \leqslant 1$, $\bar{\jmath} \in F_{d,N}$, *найдется набор* $\{\widetilde{y}_{\bar{\jmath}}\}$, $\bar{\jmath} \in F_{d,N}$, *для которого*

$$\#\{\bar{\jmath} \in F_{d,N} : y_{\bar{\jmath}} \neq \widetilde{y}_{\bar{\jmath}}\} \leqslant \varepsilon(2N+1)^d$$

и

$$\max_{\overline{r}} \bigl\| S_{\overline{r}}\bigl(T(x, \{\widetilde{y}_{\bar{\jmath}}\})\bigr) \bigr\|_\infty \leqslant C_{\varepsilon,d}, \qquad (3)$$

где

$$S_{\overline{r}}(f) = \sum_{\overline{k}: -r_s \leqslant k_s \leqslant r_s} \widehat{f}(k) e^{i\overline{k}x}$$

– прямоугольная частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции d *переменных* $f(x)$, *а максимум в* (3) *берется по всем наборам* $r = \{r_s\} \in \mathbb{Z}^d$ *с* $0 \leqslant r_s \leqslant N$ *при* $s = 1, \dots, d$.

Замечание 3. При $d = 1$ утверждение следствия было доказано в [5].

Автор признателен А. А. Разборову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашин Б.С. // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №6. С. 67–74. **2**. Кашин Б.С., Шарек С.Й. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №2. С. 218–230. **3**. Кашин Б. С. О тригонометрических полиномах с коэффициентами по модулю равными нулю или единице // Теория функций и приближений. Ч. 1. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1987. С. 19–30. **4**. Kushilevitz E., Nisan N. Communication Complexity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. **5**. Кашин Б. С. // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 93. №2. С. 281–284.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `kashin@ipsun.ras.ru`

Поступило
30.09.97