Математические заметки

том 58 выпуск 6 декабрь 1995

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОЦЕНКЕ АППРОКСИМАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков

Эта заметка является дополнением к нашей недавней работе [1]. В §2 работы [1] установлены оценки объема множества коэффициентов Фурье полиномов из единичного L_1-шара подпространства $T(\Lambda)$, натянутого на произвольное конечное множество гармоник $e^{i(k,x)}$, $k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. В качестве следствия из указанных оценок объемов в [1] были получены оценки снизу для энтропийных чисел $\varepsilon_m(W^r_{\infty,0}, L_1)$ и поперечников по Колмогорову $d_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_p)$ классов $W^r_{\infty,\alpha}$ функций d переменных ($d > 1$) с ограниченной смешанной производной. В данной работе, используя построения из [1] и подход, предложенный Э. С. Белинским в работе [2] (о которой мы, к сожалению, не знали при написании работы [1]), мы завершаем нахождение порядков величин $\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_p)$ и $d_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_p)$ для всех $1 \leqslant p < \infty$ и $r > 0$.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00240.

Сначала приведем результаты об ε-энтропии. Порядки величин $\varepsilon_m(W^r_{q,\alpha}, L_p)$ для всех $1 < q, p < \infty$ получены в работах [3], [4] (там же смотри историю вопроса). В работе [4] доказано, что для всех $1 \leqslant q < \infty$ и $r > 0$

$$\varepsilon_m(W^r_{q,\alpha}, L_1) \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{1}$$

В [2] установлена следующая оценка, усиливающая (1) для $r > 1/2$

$$\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{2}$$

В [1] доказана оценка (2) для $\alpha = 0$ и всех $r > 0$. Здесь мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всех* $\alpha \in \mathbb{R}^d$ *и* $r > 0$ *имеем*

$$\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{$2'$}$$

Доказательство. Используем построения и обозначения из доказательства теоремы 2.2 работы [1] (см. также [1, с. 70]). Там для $m = 1, 2, \dots$ и наименьшего $n = n(m)$ такого, что $|D_n| \geqslant m$ (отметим, что $2^n \cdot n^{d-1} \asymp m$, если $m \to \infty$) построены полиномы $t_j \in T(D_n)$, $j = 1, \dots, 2^m$, обладающие следующими свойствами

$$E^{\perp}_{D_n}(t_j)_\infty \leqslant 1, \qquad j = 1, \dots, 2^m;$$
$$\|t_i - t_j\|_2 \geqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 > 0, \qquad i \neq j.$$

Взяв $t_j^{\perp} \in T(D_n)^{\perp}$ так, что $\|t_j - t_j^{\perp}\|_\infty \leqslant 2$ и положив

$$\varphi_j = \tfrac{1}{2}(t_j - t_j^{\perp}), \quad f_j = \varphi_j * F_r(x, \alpha), \qquad j = 1, \dots, 2^m,$$

мы получим набор функций $f_j \in W^r_{\infty,\alpha}$, обладающих свойством

$$\|f_i - f_j\|_2 \geqslant \tfrac{1}{2}\|t_i - t_j\|_2 \cdot 2^{-rn} \geqslant \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 \cdot 2^{-rn}, \qquad i \neq j.$$

Эта оценка влечет оценку ($r > 0$)

$$\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_2) \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{3}$$

Из оценки (3) так же, как в [2], используя интерполяционное неравенство для энтропийных чисел (см. [5, с. 189])

$$\varepsilon_{2m-1}(W^r_{\infty,\alpha}, L_2) \leqslant 2\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_1)^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_p)^{\frac{p}{2(p-1)}},$$

$2 < p < \infty$, неравенство (3) и известную оценку (см. [6])

$$\varepsilon_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_p) \leqslant \varepsilon_m(W^r_{p,\alpha}, L_p) \ll m^{-r}(\log m)^{r(d-1)},$$

получим утверждение теоремы 1.

Перейдем к оценкам поперечников по Колмогорову. Порядки поперечников $d_m(W^r_{q,\alpha}, L_p)$ для $1 < q,\ p < \infty$ при достаточно больших r известны (см., например, [7]). В [1] для $r > 0$ доказана следующая оценка снизу, справедливая для всех $1 < p \leqslant \infty$

$$d_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_p) \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{4}$$

Соответствующая оценка сверху для $1 < p < \infty$ вытекает из хорошо известной оценки (см. [8, с. 69])

$$d_m(W^r_{p,\alpha}, L_p) \ll m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{5}$$

В этой работе мы устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и $r > 0$ имеем*

$$d_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{6}$$

Доказательство этой теоремы сводится к применению одного общего результата Г. Лоренца, позволяющего вывести оценку (6) из оценки (2′). Подобный прием применялся ранее в работе [2].

Сформулируем в виде леммы утверждение, непосредственно вытекающее из одного результата Г. Лоренца (см. [9, теорема 6, с.915]).

Лемма 1. *Пусть A – произвольный компакт в сепарабельном банаховом пространстве X и для некоторых действительных чисел $r > 0$ и a имеем*

$$\varepsilon_m(A, X) \asymp m^{-r}(\log m)^a,$$

если $m \to \infty$. Тогда для поперечника по Колмогорову справедливо соотношение

$$d_m(A, X) \gg m^{-r}(\log m)^a.$$

Утверждение теоремы 2 вытекает немедленно из теоремы 1 и леммы 1.

Замечание 1. Оценка (6) в теореме 2 не может быть усилена. Это утверждение вытекает из следующего очевидного неравенства

$$d_m(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \ll d_m(W^r_{2,\alpha}, L_2)$$

и известной (см., например, [8]) оценки

$$d_m(W^r_{2,\alpha}, L_2) \ll m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}. \tag{7}$$

Замечание 2. В доказательстве теоремы 2 вместо леммы 1 можно использовать замечание 1 и следующее утверждение, являющееся следствием результата Б. Карла (см., например, [10]).

Лемма 2. *Пусть A – произвольный компакт в сепарабельном банаховом пространстве X и для некоторых действительных чисел $r > 0$ и a имеем*

$$d_m(A, X) \ll m^{-r}(\log m)^a$$

и

$$\varepsilon_m(A, X) \gg m^{-r}(\log m)^a.$$

Тогда справедливы соотношения

$$d_m(A, X) \asymp \varepsilon_m(A, X) \asymp m^{-r}(\log m)^a.$$

Отметим в заключение аналогию между утверждениями и доказательствами лемм 1 и 2.

Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН

Поступило
08.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашин Б. С., Темляков В. Н. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №5 . С. 57–86. **2**. Белинский Э. С. Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1990. С. 22–37. **3**. Темляков В. Н. // ДАН СССР. 1988. Т. 301. №2. С. 288–291. **4**. Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168. **5**. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982. **6**. Динь Зунг. Приближение гладких функций многих переменных средствами гармонического анализа. Дисс. … д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1985. **7**. Temlyakov V. N. Approximation of Periodic Functions: Nova Science Publishers, 1993. **8**. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. **9**. Lorentz G. G. // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 903–937. **10**. Pisier G. The volume of convex bodies and Banach space geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.