Математические заметки

том 77 выпуск 2 февраль 2005

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СПРАВЕДЛИВОСТИ ДЛЯ ФРЕЙМОВ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова

В заметке установлены оценки снизу канонических n-членных приближений по фреймам общего вида одного естественного с точки зрения приложений семейства функций. Обобщаются результаты, установленные в [1] для ортогональных базисов пространств $L^2(0,1)$. Целесообразность такого обобщения связана в основном с систематическим использованием фреймов и неортогональных базисов в прикладных задачах сжатия графической информации. Введем необходимые определения.

Определение 1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Система ненулевых элементов $\Phi=\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}\subset H$ называется *фреймом*, если выполнены неравенства

$$A\|v\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}(v,\varphi_j)^2\leqslant B\|v\|^2\qquad\forall\, v\in H,$$

где $0<A\leqslant B<\infty$ – абсолютные константы, а $\|\cdot\|$ и $(\cdot\,,\,\cdot)$ – норма и скалярное произведение соответственно. Постоянные B и A называются соответственно *верхней* и *нижней границами* фрейма Φ.

Очевидно, что фреймом является любая полная ортонормированная система в H, а также произвольный базис Рисса. Критерий того, что система Φ является фреймом см. в [2]. Для каждого фрейма $\Phi=\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ определен двойственный фрейм $\widetilde{\Phi}=\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=1}^{\infty}$, причем каждый элемент $f\in H$ представим сходящимся по норме рядом

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\widetilde{\varphi}_j)\varphi_j.$$

Этот ряд называется *каноническим разложением* элемента $f\in H$ по фрейму Φ (см. подробнее [3]).

Определение 2. *Наилучшим каноническим n-членным приближением* $(n=1,2,\dots)$ элемента $f\in H$ по фрейму Φ будем называть величину

$$e_n(f,\Phi,H)=\inf_{\Lambda\subset\mathbb{N},\ \#\Lambda\leqslant n}\biggl\|f-\sum_{j\in\Lambda}(f,\widetilde{\varphi}_j)\varphi_j\biggr\|$$

(здесь $\Lambda\subset\mathbb{N}$ – подмножество натурального ряда, $\#$ – число элементов в множестве).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00062.

Далее, если K – подмножество H, то *наилучшим каноническим n-членным приближением* класса K мы назовем

$$e_n(K,\Phi,H)=\sup_{f\in K} e_n(f,\Phi,H).$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\mathbb{X}=\{\chi_t\}$, $t\in[0,a]$, характеристических функций подмножеств единичного куба I^d в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d=1,2,\dots$, таких, что

$$\chi_t=\chi_{\Omega_t}=\begin{cases}1, & x\in\Omega_t,\\ 0, & x\notin\Omega_t,\end{cases} \qquad \mu_d\{\Omega_t\}=t, \qquad \Omega_{t_1}\subset\Omega_{t_2} \ \text{при } 0\leqslant t_1<t_2\leqslant a \tag{1}$$

(здесь μ_d – мера Лебега множества в I^d).

Примером семейств со свойством (1) является множество характеристических функций интервалов $(0,t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, лежащее в $L^2(0,1)$, или семейство характеристических функций концентрических шаров в $L^2(I^d)$. Наша задача состоит в нахождении оценок снизу наилучших канонических n-членных приближений для классов со свойством (1).

Теорема 1. *Пусть $\Phi=\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}\subset L^2(I^d)$ – фрейм с границами A и B. Тогда каноническое n-членное приближение по фрейму Φ любого класса функций $\mathbb{X}=\{\chi_t\}$, $t\in[0,a]$, со свойством* (1) *оценивается снизу следующим образом*:

$$e_n(\mathbb{X},\Phi,L^2(I^d))\geqslant\bigl(C(A,B,a)\bigr)^{-n}, \qquad n=1,2,\dots,$$

где $C(A,B,a)>0$ – постоянная, зависящая только от A, B и a.

Теорема 2. *Пусть $\Phi=\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – базис Рисса в $L^2(I^d)$ такой, что*

$$\|\varphi_j\|_{L^\infty(I^d)}\leqslant M, \quad \|\widetilde{\varphi}_j\|_{L^\infty(I^d)}\leqslant\widetilde{M}, \qquad j=1,2,\dots. \tag{2}$$

Тогда при $n=1,2,\dots$ для канонического n-членного приближения по базису Φ любого класса $\mathbb{X}$ со свойством (1) *выполнена оценка*

$$e_n(\mathbb{X},\Phi,L^2(I^d))\geqslant\frac{C(\Phi,a)}{n^{1/2}}>0,$$

где $C(\Phi,a)$ – постоянная, зависящая только от Φ и a.

Теорема 2 показывает, что использование для аппроксимации базисов, "похожих" на тригонометрическую систему, не позволяет обеспечить порядок приближения лучший, чем $n^{-1/2}$, даже для такого "тонкого" класса функций, как семейство со свойством (1). Этот факт есть косвенное подтверждение целесообразности использования в приложениях систем типа всплесков.

Доказательство теорем 1 и 2 получается модификацией доказательств из [1]. Существенно новым обстоятельством является неединственность разложений по фрейму, которая проявляется, в частности, в том, что каноническое разложение полинома по фрейму не всегда является полиномом. Это приводит, например, к ухудшению оценки снизу из теоремы 2 с $\ldots\geqslant cn^{-1/2}$ до $\ldots\geqslant cn^{-1}$ при рассмотрении тем же методом произвольных фреймов со свойством (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kashin B. S. // Approximation Theory. Volume Dedicated to B. Sendov. Sofia: Darba, 2002. P. 241–257. **2**. Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. №6. С. 941–945. **3**. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001.

(Б. С. Кашин) Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
(Т. Ю. Куликова) Научно-исследовательский актуарно-финансовый центр
E-mail: kashin@mi.ras.ru, koulikt@mi.ras.ru

Поступило
19.09.2004