Математические заметки

том 50 выпуск 3 сентябрь 1991

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, МАЛО УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ОТРЕЗКЕ

Б. С. Кашин

Пусть π_n, $n = 1, 2, \ldots$ — линейное пространство алгебраических многочленов степени $\leqslant n$ с действительными коэффициентами и $\pi_n(\mathbf{Z})$ — подмножество в π_n, состоящее из многочленов с целыми коэффициентами.

Согласно классической теореме Чебышева для любого отрезка $[a, b] \subset R^1$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\inf_{\pi_n \ni q(x) = x^n + \ldots} \|q(x)\|_{C[a, b]} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n. \tag{1}$$

Давнюю историю имеет и рассматриваемый в этой статье вопрос о построении для данного отрезка $[a, b]$ многочлена $P \in \pi_n(\mathbf{Z})$, $P \not\equiv 0$, мало уклоняющегося от нуля в той или иной метрике (подробнее об этой тематике см. [1]—[4]). Еще в 1894 г. Гильберт [5], используя геометрические соображения, показал, что для любого отрезка $[a, b]$

$$\inf_{0 \not\equiv P \in \pi_n(\mathbf{Z})} \|P\|_{L^2(a, b)} \leqslant C \cdot n^{1/2} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n/2}, \quad n = 1, \ldots \tag{2}$$

(здесь и ниже через $c, C, C_1, \ldots$ мы обозначаем абсолютные положительные постоянные).

Фекете [6] установил, что для любого отрезка $[a, b]$

$$E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b]) \equiv \inf_{0 \not\equiv P \in \pi_n(\mathbf{Z})} \|P\|_{C[a, b]} \leqslant 2^{1 - \frac{1}{2n+1}} (n+1) \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n/2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Доказательство оценки (3), данное в [6], во многом аналогично рассуждениям из [5]. Отметим еще, что неравенства (2) и (3) представляют интерес только если $b - a < 4$, так как в противном случае нужные оценки имеют место для $P \equiv 1$. Кроме того, при $b - a \geqslant 4$ величины $E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b])$ не стремятся к нулю при $n \to \infty$ (см. (1)).

Теорема Фекете нашла применение в теории алгебраических чисел и теории целых функций (см., в частности, [7]—[9]).

Из (1) и (3) вытекает, что величина

$$q[a, b] \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \{E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b])\}^{1/n} \tag{4}$$

удовлетворяет неравенствам $(b - a < 4)$

$$\frac{b-a}{4} \leqslant q[a, b] \leqslant \left(\frac{b-a}{4}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Точное значение $q[a, b]$ не найдено ни для одного отрезка $[a, b]$, но известно, что оценка (5) в ряде случаев может быть улучшена. Так, в работах Апарисио показано (см. [1], [9]), что

$$(2.37686)^{-1} < q[0, 1] < (2.33071)^{-1}. \tag{6}$$

Метод доказательства правого неравенства в (6) и других известных уточнений теоремы Фекете состоит в подборе для данного отрезка $[a, b]$ одного многочлена с целыми коэффициентами $R(x)$ достаточно малой степени r (в [9] для $[a, b] = [0, 1]$ берется $r = 17$) так, что при $n \geqslant n_0$

$$\| R^{[n/r]} \|_{C[a,b]} \leqslant \gamma^n, \quad \gamma < \left(\frac{b-a}{4}\right)^{1/2}$$

(здесь $[x]$ — целая часть x). Такой подход к получению оценок сверху для $q[a, b]$ перестает работать, если длина отрезка $[a, b]$ становится близкой к 4. Степень многочлена $R(x)$ с $\| R \|_{C[a,b]} < 1$ должна при этом неограниченно возрастать, что весьма затрудняет его подбор. Насколько известно автору, для отрезков большой длины $(b - a > 3)$ не было никаких уточнений оценки сверху (5) для $q[a, b]$, хотя возможно именно этот случай наиболее интересен с точки зрения приложений. В данной работе уточняются оценки для $E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b])$, полученные Фекете. В частности (см. теорему 1) для любого отрезка вида $[-a, a]$, $a < 2$ улучшена оценка сверху (5) для $q[-a, a]$. Наши рассуждения имеют геометрический характер и (как и в [5], [6]) используют теорему Минковского о точках решетки, лежащих в выпуклом теле. Прежде всего отметим, что следуя [6] (см. также [2]), но используя вместо тривиальной оценки объема множества коэффициентов тригонометрических многочленов, ограниченных по модулю единицей, оценки, установленные автором [11], [12] (см., в частности, лемму 2 и утверждение 1 в [11]), получим

Утверждение 1. *Существует такая абсолютная постоянная C, что для любого отрезка $[a, b]$ и $n = 1, 2, \ldots$*

$$E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b]) \leqslant C \cdot n^{1/2} \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n/2}.$$

Замечание. В [4 с. 315] при изложении модификации доказательства теоремы Фекете допущена неточность: приведенные там рассуждения могут привести лишь к оценке $E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b]) \leqslant Cn^{1/2} \ln n\, [(b-a)/4]^{n/2}$, а не к неравенству $E_n^{\mathbf{Z}}(0, [a, b]) \leqslant C \cdot \ln n\, [(b-a)/4]^{n/2}$, как там утверждается.

Если отрезок $[a, b]$, $b - a < 4$ фиксирован, а $n \to \infty$, то улучшение оценки (3), данное в утверждении 1 становится малозначительным. Естественно встает вопрос об уточнении значения величины $q\,[a, b]$. В этом направлении нами установлена

ТЕОРЕМА 1. *Для любого a, $0 < a < 2$ имеет место строгое неравенство*

$$q\,[-a, a] < (a/2)^{1/2}.$$

Более точно

$$q\,[-a, a] \leqslant \inf_{0 \leqslant \alpha < 1} a^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}\, 2^{-\frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1}} \exp \frac{1}{4} W(\alpha), \tag{7}$$

где

$$W(\alpha) = (1-\alpha)^{-1} \cdot \{(\alpha+1)^2 \ln (1+\alpha) + (\alpha-1)^2 \ln (1-\alpha) - 2\alpha^2 \ln 2\alpha\}.$$

При этом для $1 \leqslant a < 2$

$$(a/2)^{1/2} - q\,[-a, a] \geqslant C\,(2-a)^2 \ln^{-1} (1 + (2-a)^{-1}), \tag{8}$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

З а м е ч а н и е. Вычисления показывают, что применительно к отрезку $[0, 1]$, с учетом равенств $q\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = (q\,[0, 1/4])^{1/2} = q\,[0, 1]$ (см. [4], [1]), соотношение (7) дает:

$q\,[0, 1] \leqslant (2.3263)^{-1}$, что несколько хуже оценки (6).

Ниже используются следующие обозначения: если H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $H \supset L$ — d-мерное подпространство и $A \subset L$, то через $\mathrm{Vol}_d(A)$ обозначаем d-мерный объем множества A (стандартную меру Лебега, построенную, исходя из скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$). Далее, если $Y = \{y_1, \ldots, y_d\} \subset H$, то пусть

$$|\det Y| \equiv \mathrm{Vol}_d \left\{ \sum\nolimits_{i=1}^{d} \lambda_i y_i;\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, d \right\}$$

и $G(Y)$ — матрица Грама набора Y, т. е.

$$G(Y) = \{g_{ij}\},\ g_{ij} = (y_i, y_j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant d.$$

Мы будем рассматривать, в частности, случай, когда $H = L^2(-a, a)$, $(f, g) = \int_{-a}^{a} f \cdot g \,\mathrm{d}x$.

Определим для $a > 0$, $\alpha \in [0, 1)$ и $n = 2, 3, \ldots$ набор элементов пространства $L^2(-a, a)$:

$$E_{\alpha, n}(a) = \{x^{2k},\ \alpha n \leqslant 2k \leqslant n,\ k \in \mathbf{Z}\} \tag{9}$$

и пусть $E_{\alpha, n}(1) \equiv E_{\alpha, n}$.

ЛЕММА 1. *Для фиксированного $\alpha \in [0, 1)$ при $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|\det E_{\alpha, n}^{*}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2/4} \exp \left[\frac{n^2}{8} \tilde{Q}(\alpha) + o(n^2)\right].$$

где

$$\tilde{Q}(\alpha) = (1+\alpha)^2 \ln(1+\alpha) + (1-\alpha)^2 \ln(1-\alpha) - 2\alpha^2 \ln 2\alpha. \tag{10}$$

Доказательство. Найдем асимптотику определителя матрицы Грама $G(E_{\alpha,n}) \equiv G(\alpha, n)$, а затем воспользуемся равенством

$$|\det E_{\alpha,n}| = \{\det G(\alpha, n)\}^{1/2}. \tag{11}$$

Элементы матрицы $G(\alpha, n)$ удобно нумеровать так:

$$G(\alpha, n) = \{g_{p,q}\}, \ \alpha n \leqslant 2p, \ 2q \leqslant n, \tag{12}$$

и

$$g_{p,q} = \int_{-1}^{1} x^{2p} x^{2q} dx = 2\int_0^1 x^{2(p+q)} dx = \frac{1}{p+q+1/2}.$$

Применяя тождество Коши (см., например, [13], с. 104), находим:

$$\det G(\alpha, n) = \prod_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p < p' \leqslant \frac{n}{2}} (p'-p) \prod_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant q < q' \leqslant \frac{n}{2}} (q'-q) \cdot$$
$$\cdot \Big[\prod_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p,\, q \leqslant \frac{n}{2}} (p+q+1/2)\Big]^{-1} = \Big\{\prod_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p < p' \leqslant \frac{n}{2}} (p'-p)\Big\}^2 \cdot$$
$$\cdot \Big\{\prod_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p,\, q \leqslant \frac{n}{2}} \Big(p+q+\frac{1}{2}\Big)\Big\}^{-1} \equiv \{\pi_1(\alpha, n)\}^2 \cdot \{\pi_2(\alpha, n)\}^{-1}. \tag{13}$$

Вычисления показывают, что при $n \to \infty$

$$\{\pi_1(\alpha, n)\}^2 = \Big\{\prod_{1 \leqslant s < s' \leqslant 1/2 \cdot n(1-\alpha)} (s'-s)\Big\}^2 \cdot \exp\{O(n \ln n)\} =$$
$$= r^{r^2} \cdot e^{-\frac{3}{2} r^2} \cdot \exp\{o(n^2)\}; \quad r = 1/2 \cdot n(1-\alpha). \tag{14}$$

Произведение $\pi_2(\alpha, n)$ может быть представлено в виде

$$\pi_2(\alpha, n) = \Big(\frac{n}{2}\Big)^{r^2} \prod_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p,\, q \leqslant \frac{n}{2}} \Big(\frac{p+q+1/2}{n/2}\Big) \cdot \rho_{\alpha,n},$$

где $r = {}^1/_2 n(1-\alpha)$, $n^{-5n} \leqslant \rho_{\alpha,n} \leqslant n^{5n}$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\ln \pi_2(\alpha, n) = (1-\alpha)^2 \frac{n^2}{4} \cdot \ln n/2 +$$
$$+ \Big(\frac{n}{2}\Big)^2 \sum_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p,\, q \leqslant \frac{n}{2}} \Big(\frac{n}{2}\Big)^{-2} \ln \frac{p+q+1/2}{n/2} + o(n^2). \tag{15}$$

Далее, при $n \to \infty$

$$\sum_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p,\, q \leqslant \frac{n}{2}} \Big(\frac{n}{2}\Big)^{-2} \ln \frac{p+q+1/2}{n/2} = I_\alpha + o(1),$$

где

$$I_\alpha = \int_\alpha^1 \int_\alpha^1 \ln(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{2}(1-\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 \ln(1+\alpha) + 2\alpha^2 \ln 2\alpha. \tag{16}$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\ln \pi_2(\alpha, n) = (1-\alpha)^2 \frac{n^2}{4} \ln \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} I_\alpha + o(n^2),$$

$$\pi_2(\alpha, n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n^2}{4}(1-\alpha)^2} \mathrm{e}^{\frac{n^2}{4} I_\alpha + o(n^2)}. \tag{17}$$

Из (14) и (17), учитывая (13) и (16), выводим: при $n \to \infty$

$$\det G(\alpha, n) = \frac{\left[\frac{n}{2}(1-\alpha)\right]^{\frac{n^2}{4}(1-\alpha)^2} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\left[\frac{n}{2}(1-\alpha)\right]^2 + o(n^2)}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n^2}{4}(1-\alpha)^2} \mathrm{e}^{\frac{n^2}{4} I_\alpha + o(n^2)}} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n^2}{4}\left[(1-\alpha)^2 \ln(1-\alpha) - \frac{3}{2}(1-\alpha)^2 - I_\alpha + o(1)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n^2}{4}[-2\ln 2 + (1-\alpha)^2 \ln(1-\alpha) + (1+\alpha)^2 \ln(1+\alpha) -\right.$$

$$\left. - 2\alpha^2 \ln 2\alpha + o(1)]\right\}. \tag{18}$$

Из (18) и (11) вытекает утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. *Для фиксированных $a > 0$, $\alpha \in [0, 1)$ при $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|\det E_{\alpha, n}(a)| = |\det E_{\alpha, n}| \cdot a^{\frac{n^2}{4}(1-\alpha^2) + O(n)}. \tag{19}$$

Достаточно проверить (см. (11)), что

$$\det G(E_{\alpha, n}(a)) = a^{\frac{n^2}{2}(1-\alpha^2) + O(n)} \det G(E_{\alpha, n}).$$

Пусть $G(a) \equiv G(E_{\alpha, n}(a))$. Тогда

$$(G(a))_{p, q} = \int_{-a}^{a} x^{2p} x^{2q} dx = \frac{a^{2(p+q+1/2)}}{p+q+1/2} = (G(1))_{p, q} \cdot a^{2(p+q+1/2)}$$

(мы использовали для элементов $(G(a))_{p,q}$ матрицы $G(a)$ ту же нумерацию, что и в лемме 1 (см. (12)). Поэтому

$$\det G(a) = \det G(1) \cdot a^{2r},$$

$$r = \sum_{\frac{\alpha}{2} n \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}} p + \sum_{\frac{\alpha}{2} \ldots} \ldots q + 1/2) = \frac{n^2}{4}(1-\alpha^2) + O(n),$$

что и требовалось показать.

ЛЕММА 3. *Пусть при* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $a > 0$ $L_{n,a}$ — *подпространство в* $L^2(-a, a)$, *натянутое на функции* $1, x, \ldots, x^n$ *и*

$$Q_{n,a} = \{P \in L_{n,a}: \| P \|_{C[a,b]} \leqslant 1\}. \tag{20}$$

Тогда для любого d-мерного подпространства $L \subset L_{n,a}$ $(1 \leqslant d \leqslant n + 1)$ *объем*

$$\mathrm{Vol}_d \{L \cap Q_{n,a}\} \geqslant c_1^n n^{-\frac{3}{2}n} a^{\frac{d}{2}}. \tag{21}$$

Замечание. Лемма 3 допускает уточнение (см. ниже Утверждение 2), однако для наших целей достаточно грубой оценки (21).

Доказательство. Пусть $p_0, \ldots, p_n$ — набор полиномов Лежандра, образующих ортонормированный базис в $L_{n,1}$. Хорошо известно (см. [14, с. 80 и с. 171]), что

$$\| p_j \|_{C[-1,1]} \leqslant C_2 j^{1/2}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Набор функций

$$\{f_j(x)\}_{j=0}^n,$$

$$f_j(x) = f_j(x, a) = a^{-1/2} p_j(x/a), \ j = 0, \ldots, n$$

образует ортонормированный базис в $L_{n,a}$. При этом (см. (22)) для любых чисел b_j, $0 \leqslant j \leqslant n$

$$\left| \sum_{j=0}^n b_j f_j(x) \right| \leqslant \left(\sum_{j=0}^n b_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^n f_j^2\right)^{1/2} \leqslant C_3 a^{-1/2} n \left(\sum_{j=0}^n b_j^2\right)^{1/2},$$

то есть

$$\left\{\sum_{j=0}^n b_j f_j, \left(\sum_{j=0}^n b_j^2\right)^{1/2} \leqslant r\right\} \subset Q_{n,a}, r = C_3^{-1} a^{1/2} n^{-1}. \tag{23}$$

Включение (23) означает, что $Q_{n,a}$ содержит евклидов шар радиуса r, а значит,

$$\mathrm{Vol}_d \{L \cap Q_{n,a}\} \geqslant r^d \omega_d \geqslant a^{d/2} C_4^{-d} n^{-d} d^{-d/2} \geqslant a^{d/2} c_1^n n^{-3/2n}.$$

(ω_d — объем единичного евклидова шара в R^d). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть числа $a > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$ фиксированы.

Рассмотрим для достаточно больших n подпространства $L_{n,a}$ (см. (20)) и

$$L(n, a, \alpha) = \left\{\sum_{\alpha n \leqslant 2p \leqslant n} b_p x^{2p}\right\} \subset L_{n,a} \subset L^2(-a, a).$$

Пусть также

$$Q(n, a, \alpha) = Q_{n,\alpha} \cap L(n, a, \alpha).$$

Согласно лемме 3

$$\mathrm{Vol}_d Q(n, a, \alpha) \geqslant c_1^n n^{-\frac{3}{2}n} a^{\frac{d}{2}}, \tag{24}$$

$$d = \dim L(n, a, \alpha) = \frac{n}{2}(1 - \alpha) + O(1).$$

Рассмотрим теперь выпуклое, центрально-симметричное множество $\rho Q(n, a, \alpha)$ в $L(n, a, \alpha)$ и выясним, при каких ρ это множество содержит точки решетки

$$\Lambda(n, a, \alpha) = \{\sum_{\alpha n \leqslant 2p \leqslant n} b_p x^{2p}, b_p \in \mathbf{Z}\}$$

(это будет означать, что существует многочлен P с целыми коэффициентами и $\| P \|_{C[-a, a]} \leqslant \rho$, $P \in \pi_n$). По теореме Минковского (см. [15], с. 87)

$$\Lambda(n, a, \alpha) \cap \rho Q(n, a, \alpha) \neq 0, \tag{25}$$

если (см. (9))

$$2^d |\det E_{\alpha, n}(a)| \leqslant \mathrm{Vol}_d [\rho Q(n, a, \alpha)] = \rho^d \cdot \mathrm{Vol}_d Q(n, a, \alpha).$$

Итак, для выполнения (25) достаточно (см. также (24)), чтобы $\rho = \rho(n, a, \alpha)$ удовлетворяло неравенству

$$\rho \geqslant (c_1^{-1} n)^{c(\alpha)} \cdot a^{-1/2} \cdot |\det E_{\alpha, n}(a)|^{1/d} \geqslant$$
$$\geqslant 2 |\det E_{\alpha, n}(a)|^{1/d} \cdot \mathrm{Vol}_d^{-1/d} Q(n, a, \alpha). \tag{26}$$

Для любого фиксированного $\alpha \in [0, 1)$ при $n \to \infty$ имеет место асимптотика (см. леммы 1, 2 и (24)):

$$|\det E_{\alpha, n}(a)|^{1/d} = \exp\left\{(\ln a)\left[\frac{n^2}{4}(1-\alpha^2) + O(n)\right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left[\frac{n}{2}(1-\alpha) + O(1)\right]^{-1}\right\} 2^{-\frac{n^2}{4}\left[\frac{n}{2}(1-\alpha)+O(1)\right]^{-1}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\left[\frac{n^2}{8}\tilde{Q}(\alpha) + o(n^2)\right]\left[\frac{n}{2}(1-\alpha) + O(1)\right]^{-1}\right\} =$$
$$= [U(a, \alpha)]^n \exp[o(n)],$$

где (см. (10), (7))

$$U(a, \alpha) = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1}} a^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \exp\left[\frac{1}{4}\frac{\tilde{Q}(\alpha)}{1-\alpha}\right] =$$
$$= a^{\frac{1}{2}(1+\alpha)} 2^{-\frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1}} \exp\left[\frac{1}{4}W(\alpha)\right]. \tag{27}$$

Учитывая, что $(c_1^{-1} n)^{c(\alpha)} = o\{(1+\varepsilon)^n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ и пользуясь возможностью произвольного выбора параметра $\alpha \in [0, 1)$, мы получаем, что (25) имеет место при $n \geqslant n_0$, если

$$\rho = \gamma^n, \ \gamma > \gamma_0 \equiv \inf_{\alpha \in [0, 1)} U(a, \alpha).$$

Следовательно, $q[-a, a] \leqslant \gamma_0$ и одно из утверждений теоремы установлено.

Далее, $U(a, 0) = (a/2)^{1/2}$ *) и пользуясь соотношениями $\tilde{Q}(\alpha) = o(\alpha)$ и $\alpha^2(1-\alpha)^{-1} = o(\alpha)$ при $\alpha \to 0$, мы получаем, что для любого $a < 2$ при $0 < \alpha < \alpha(a)$ имеет место неравенство

$$U(a, \alpha) < U(a, 0),$$

*) Отметим еще, что $U(a, \alpha) \to a$, если $\alpha \to 1$.

то есть $q[-a, a] \leqslant \gamma_0 < (a/2)^{1/2}$. Наконец, при $a \in [1, 2)$, используя соотношения

$$\exp\left[\frac{1}{4}\tilde{Q}(\alpha)(1-\alpha)^{-1}\right] \leqslant 1 + C_5\alpha^2 \ln 1/\alpha,$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1}} \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}\left[1 - C_6\alpha\ln\left(\frac{2}{a}\right)\right], \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1/10,$$

находим:

$$\gamma_0 \leqslant \inf_{0 \leqslant \alpha < 1}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1}} \exp\left[\frac{1}{4}\tilde{Q}(\alpha)(1-\alpha)^{-1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} \min_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1/10} [1 - C_6\beta\alpha][1 + C_5\alpha^2 \ln 1/\alpha]; \ \beta = \ln\frac{2}{a} > 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$\min_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1/10} [1 - C_6\beta\alpha]\cdot[1 + C_5\alpha^2 \ln \frac{1}{\alpha}] \leqslant 1 - C_7\beta^2\left(\ln\frac{1}{\beta}\right)^{-1},$$

а значит,

$$\gamma_0 \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}\left(1 - C_7\beta^2\left(\ln\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} - C(2-a)^2 \ln^{-1}(1 + (2-a)^{-1}),$$

откуда следует (8). Теорема полностью доказана. Справедливо также

Утверждение 2. *Пусть* $\rho(x) \in L^1(-1, 1)$ *и*

$$0 < \delta \leqslant \rho(x) \text{ для любого } x \in [-1, 1]. \tag{28}$$

Пусть далее $p_0, p_1, \ldots$ $(p_k \in \pi_k)$ *— последовательность многочленов ортонормированных с весом* $\rho(x)$. *Тогда при* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(\Omega^n_{\rho(x)}) \equiv$$
$$\equiv \mathrm{Vol}_{n+1}\{b = \{b_k\}_{k=0}^n \in R^{n+1}: \|\textstyle\sum_{k=0}^n b_k p_k(x)\|_{C[-1,1]} \leqslant 1\} \geqslant$$
$$\geqslant (c_\delta)^n \cdot n^{-n/2},$$

где постоянная $c_\delta > 0$ *зависит только от* δ.

Доказательство. Пусть

$$K_n(x) = \textstyle\sum_{k=0}^n p_k^2(x), \ n = 1, 2, \ldots, x \in [-1, 1].$$

При условии (28) имеет место оценка (см. [14, с. 52, 189])

$$K_n^{1/2}(x) \leqslant \min(A_\delta n, A'_\delta(1-x^2)^{-1/4} n^{1/2}). \tag{29}$$

Далее, для любого многочлена $q(x) \in \pi_n$

$$\|q\|_{C[-1,1]} \leqslant C_8 \max_{0 \leqslant j \leqslant 2n}\left|q\left(\cos\left\{\frac{\pi j}{2n}\right\}\right)\right|$$

(см., например, [16]; алгебраический случай вытекает из тригонометрического после замены $x = \cos z$). Поэтому

$$\Omega^n_{\rho(x)} \supset W \equiv \{b \in R^{n+1}\colon |(b, e_j)| \leqslant C_8^{-1},\ 0 \leqslant j \leqslant 2n\}, \tag{30}$$

где

$$e_j = \left\{p_k\left(\cos\left\{\frac{\pi j}{2n}\right\}\right)\right\}_{k=0}^{n} \in R^{n+1},\quad j = 0, \ldots, 2n,$$

причем в силу (29) при $j = 0, \ldots, 2n$

$$|e_j| \equiv (e_j, e_j)^{1/2} \leqslant \min(A_\delta n, A'_\delta n^{1/2}\cdot \sin^{-1/2}(\pi j/2n)). \tag{31}$$

Применяя для оценки снизу объема многогранника W теорему 2 работы Болла и Пажора [17] (при значении параметра $p = p_0 < 2$ (см. [17])), находим:

$$\mathrm{Vol}_{n+1} W \geqslant C_8^{-(n+1)} (r_{p_0})^{-(n+1)},\quad r_{p_0} = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{2n} |e_j|^{p_0}\right)^{1/p_0}. \tag{32}$$

Так как при $p_0 < 2$, в силу (31), $r_{p_0} \leqslant C_9 n^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots$, то из (30) и (32) вытекает утверждение 2.

Отметим, что утверждение 2 позволяет с учетом результатов из [11] получать и оценки снизу объемов сечений множества $\Omega^n_{\rho(x)}$ линейными подпространствами. Аналогичные результаты для тригонометрического случая нашли приложения в анализе.

Автор благодарит В. В. Никулина и Ж.-П. Кахана за полезные обсуждения.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
12.04.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Апарисио Э. О некоторых результатах в проблеме диофантовых приближений функций многочленами // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 163. С. 6—9.

[2] Гельфонд А. О. О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами // УМН 1955. Т. 10, № 1. С. 41—66.

[3] Ferguson Le Baron O. Approximation by polynomials with integral coefficients // Math. Surveys n° 17. American Math, Society, 1980.

[4] Тригуб Р. М. Приближение функций с диофантовыми условиями многочленами с целыми коэффициентами // В сб.: Метрические вопросы теории функций и отображений II. Киев: Наукова думка, 1971. С. 267—333.

[5] Hilbert D. Ein Betrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms // Acta Math. 1894. V. 18. P. 155—159.

[6] Fekete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Zeitschr. 1923. Bd 17 S. 228—249.

[7] Никулин В. В. О классификации арифметических групп, порожденных отражениями в пространстве Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 113—142.

[8] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного М.: Наука, 1966.

[9] K a h a n e J.-P. On a theorem of Pólya // Preprint. Université de Paris — Sud. 1990.
[10] A p a r i s i o E. B. New bounds on the minimal uniform Diophantine deviation from zero on [0, 1] and [0, 1/4] // в сборнике Actas Sextas Journadas Mat. Hispano — Lusitanas. Santafer, 1979, P. 289—291.
[11] К а ш и н Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Тр. МИАН СССР. 1980. Т.145. С. 111—116.
[12] К а ш и н Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических многочленов, связанных с равномерной сходимостью //Сообщ. АН ГрузССР. 1979. Т. 93, № 2. С. 281—284.
[13] К а ч м а ж С., Ш т е й н г а у з Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматлит, 1958.
[14] С е г ё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
[15] К а с с е л с Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
[16] З и г м у н д А. Тригонометрические ряды, т. 2. М.: Мир, 1965.
[17] B a l l K., P a j o r A. Convex bodies with few faces // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 110, N 1. P. 225—231.