Математические заметки

т. 46, № 6 (1989)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МЕНЬШОВА «ОБ ИСПРАВЛЕНИИ» ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Б. С. Кашин

В 1940 г. Д. Е. Меньшовым был получен следующий результат, показывающий возможность улучшения свойств сходимости ряда Фурье произвольной функции за счет изменения ее значений на множестве малой меры.

ТЕОРЕМА А (см. [1, с. 448]). *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется постоянная* C_ε *такая, что для всякой непрерывной на* $[0, 2\pi]$ *функции* f *найдется функция* $\tilde{f}$ *с равномерно сходящимся рядом Фурье, для которой*

1) $m\{x \in (0, 2\pi): f(x) \neq \tilde{f}(x)\} \leqslant \varepsilon$;

2) $\|\tilde{f}\|_U \equiv \sup\limits_n \|\sigma_n(\tilde{f})\|_\infty \leqslant C_\varepsilon \|f\|_\infty$

(*здесь* $\sigma_n(\tilde{f})$ — *частные суммы ряда Фурье функции* $\tilde{f}$, $m\{E\}$ — *мера Лебега множества* E).

В настоящее время установлены обобщения и аналоги теоремы А для некоторых других ортонормированных систем, предложены модификации ее первоначального доказательства (см. подробнее обзорную статью [2]).

В [3, 4] были получены «дискретные» аналоги теоремы А. Позднее было выяснено [5], что эти «дискретные» результаты позволяют получать новые теоремы об исправлении традиционного (т. е. не «дискретного») типа. Приложение результатов о дискретных ортонормированных системах для доказательства утверждений противоположного характера — теорем о «неисправимости»,— было дано ранее в [6].

В [3] рассматривалась дискретная тригонометрическая система. А. М. Олевским [2, с. 172] был поставлен вопрос о справедливости аналога теоремы Меньшова для произвольных полных дискретных ортонормированных систем. Положительный ответ на этот вопрос дает установленная ниже теорема 1. Прежде чем привести ее формулировку, введем некоторые обозначения.

Мы рассматриваем ортонормированные базисы (о.н.б.) $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в n-мерном действительном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Координаты векторов

$\varphi \in \mathbf{R}^n$ в стандартном базисе $\{e_j\}$ обозначаем $(\varphi)_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Для фиксированного базиса Φ и $g \in \mathbf{R}^n$ полагаем

$$\| g \|_U \equiv \| g \|_{U(\Phi)} \equiv \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left\| \sum_{i=1}^{\nu} (g, \varphi_i) \varphi_i \right\|_{l_\infty^n}. \tag{1}$$

Ясно, что

$$\| g \|_{l_2^n} \geqslant \| g \|_U \geqslant \| g \|_{l_\infty^n} \geqslant n^{-1/2} \| g \|_{l_2^n}, \tag{2}$$

где

$$\| g \|_{l_\infty^n} \equiv \| g \|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |(g)_j|; \quad \| g \|_{l_2^n} \equiv \| g \|_2 = [(g, g)]^{1/2}.$$

Через $|\Lambda|$ мы обозначаем число элементов конечного множества натуральных чисел Λ, при этом если $\Lambda \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, то $\mu_n(\Lambda) \equiv n^{-1} |\Lambda|$. Наконец, для $g \in R^n$ $\operatorname{supp} g \equiv \{j: (g)_j \neq 0\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C_ε, что при $n = 1, 2, \ldots$ для любого ортонормированного базиса Φ в $\mathbf{R}^n$ и любого вектора $g \in \mathbf{R}^n$, $\| g \|_2 = 1$, найдется вектор $\tilde{g} \in \mathbf{R}^n$, для которого*

1) $|\{j: (g)_j \neq (\tilde{g})_j\}| \leqslant \varepsilon n$;

2) $\| \tilde{g} \|_{U(\Phi)} \leqslant C_\varepsilon n^{-1/2}$.

Центральное место в доказательстве теоремы 1 занимает следующая

ЛЕММА. *Существует абсолютная постоянная n_0 такая, что для любого $\rho \in (0, 1]$ найдется постоянная K_ρ со следующим свойством:*

для любого о.н.б. Φ в $\mathbf{R}^n$ и любого вектора $g \in \mathbf{R}^n$, $\| g \|_\infty \leqslant 1$, $\operatorname{supp} g = \Lambda$, $|\Lambda| \geqslant \rho n \geqslant n_0$, найдется вектор v, $\operatorname{supp} v \subset \Lambda$, такой, что

$$\begin{aligned} &1)\ (v)_j = \lambda_j (g)_j, \quad \lambda_j \in \{0, +1, -1\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \\ &2)\ |\operatorname{supp}(g - v)| \leqslant 0{,}95\, |\Lambda|; \\ &3)\ \| v \|_{U(\Phi)} \leqslant K_\rho. \end{aligned} \tag{3}$$

Выведем из леммы утверждение теоремы 1, а затем установим лемму. Легко видеть, что доказывая теорему 1, не ограничивая общности можно считать, что $\varepsilon \in (0, 1)$, число n достаточно велико: $n \geqslant n(\varepsilon)$ и $(g)_j \neq 0$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, из неравенства Чебышева сразу вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $g \in \mathbf{R}^n$, $\| g \|_2 \leqslant 1$, $(g)_j \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, найдется вектор g' с $\| g' \|_\infty \leqslant (2/\varepsilon)^{1/2} n^{-1/2}$ и такой, что

$$|\Omega| \equiv |\{j: (g)_j \neq (g')_j\}| \leqslant (\varepsilon/2)\, n, \quad 0 < |(g')_j| \leqslant |(g)_j|,$$
$$1 \leqslant j \leqslant n,$$

т. е. вектор g может быть «исправлен» на множестве Ω с $\mu_n(\Omega) \leqslant \varepsilon/2$ до вектора g' с $\| g' \|_\infty \leqslant (2/\varepsilon)^{1/2} n^{-1/2}$. Суммируя сделанные замечания, получаем, что нам достаточно для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ найти такую постоянную C_ε^0, что при $n \geqslant n(\varepsilon)$ для любых о.н.б. Φ в $\mathbf{R}^n$ и вектора

$$g \in \mathbf{R}^n, \ \| g \|_\infty \leqslant 1, \ (g)_j \neq 0, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4}$$

найдется вектор $\tilde{g} \in \mathbf{R}^n$ с

$$\text{а)} \ \| \tilde{g} \|_{U(\Phi)} \leqslant C_\varepsilon^0; \ \text{б)} \ \mu_n \{\operatorname{supp}(g - \tilde{g})\} \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Фиксируем теперь $\varepsilon \in (0, 1)$, $n \geqslant n_0 \ \varepsilon^{-1}$, о.н.б. Φ и вектор g, удовлетворяющий соотношениям (4). Пусть целое число s_0 таково, что

$$(0{,}95)^{s_0} < \varepsilon \leqslant (0{,}95)^{s_0-1} \text{ и } C_\varepsilon^0 \equiv \left(\sum_{\nu=0}^{s_0} 2^\nu\right) K_\varepsilon, \tag{6}$$

где постоянная K_ε определена в лемме. Покажем, что при таком выборе C_ε^0 найдется вектор $\tilde{g}$ со свойствами (5). Применяя лемму при $\rho = \varepsilon$ к вектору $g^0 \equiv g$, $\operatorname{supp} g^0 = \Lambda_0 = \{1, \ldots, n\}$, найдем вектор $v^0 \equiv v$, для которого имеют место соотношения 1)—3) в (3). Если $| \Lambda_1 | \equiv | \operatorname{supp}(g^0 - v^0) | \leqslant \varepsilon n$, то (4) установлено при $\tilde{g} = v^0$, так как очевидно $K_\varepsilon \leqslant C_\varepsilon^0$. В противном случае, пусть $g^1 = g^0 - v^0$. Тогда (см. (3))

$$\Lambda_1 = \{j\colon \lambda_j \neq 1\}, \quad (g^1)_j = \begin{cases} (g^0)_j, & \text{если } \lambda_j = 0, \\ 2(g^0)_j, & \text{если } \lambda_j = -1, \end{cases}$$

т. е. $\| g^1 \|_\infty \leqslant 2$. Применяя лемму при $\rho = \varepsilon$ к вектору g^1, найдем v^1 с $\| v^1 \|_{U(\Phi)} \leqslant 2K_\varepsilon$, для которого имеют место соотношения 1) и 2) в (3) (с заменой v на v^1, g на g^1). Тогда $\| v^0 + v^1 \|_{U(\Phi)} \leqslant 3K_\varepsilon$, $| \Lambda_2 | \equiv | \operatorname{supp}(g - v^0 - v^1) | \leqslant (0{,}95)^2 \, | \Lambda_0 |$. Если $| \Lambda_2 | \leqslant \varepsilon n$, то (4) имеет место при $\tilde{g} = v^0 + v^1$, иначе положим $g^2 = g^0 - v^0 - v^1$, $\| g^2 \|_\infty \leqslant 4 \ldots$ Продолжая указанный процесс, определим векторы $v^2, g^3, v^3, \ldots, g^s$, где $s \leqslant s_0$ и при $\nu = 1, 2, \ldots$

$$| \operatorname{supp} g^\nu | \leqslant (0{,}95)^\nu n, \quad \| g^\nu \|_\infty \leqslant 2^\nu, \| v^\nu \|_{U(\Phi)} \leqslant 2^\nu K_\varepsilon, \tag{7}$$

$$g^\nu = g^{\nu-1} - v^{\nu-1} = g^0 - \sum_{r=0}^{\nu-1} v^r.$$

Момент остановки (число s) выбирается таким образом, что $| \operatorname{supp} g^\nu | \leqslant \varepsilon n$. Тогда, полагая $\tilde{g} = \sum_{r=0}^{s-1} v^r$, имеем (см. (7), (6)) $\| \tilde{g} \|_{U(\Phi)} \leqslant C_\varepsilon^0$, $| \operatorname{supp}(g - \tilde{g}) | \leqslant \varepsilon n$, а значит, имеет место (4). Тем самым вывод теоремы 1 из леммы завершен.

Приведенное ниже доказательство леммы использует методику, предложенную в работе автора [7] (см. также [8, 9]) и оценки объемов многогранников, установленные Е. Д. Глускиным [10].

Доказательство леммы. Пусть задан о.н.б. $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и вектор g удовлетворяет условиям леммы. Не ограничивая общности (переставляя при необходимости столбцы матрицы $\{(\varphi_i)_j\}$), мы можем считать, что

$$\operatorname{supp} g = \Lambda = \{1, \ 2, \ldots, d\}, \quad d \geqslant \rho n. \tag{8}$$

Рассматривая $\mathbf{R}^a$ как подпространство в $\mathbf{R}^n$, натянутое на векторы e_j, $1 \leqslant j \leqslant d$, определим в $\mathbf{R}^d$ решетку:

$$L = \{\textstyle\sum_{j=1}^{d} k_j (g)_j e_j\}, \quad \{k_j\} \in \mathbf{Z}^d,$$

и пусть

$$B = B(\Phi, \Lambda) = \{g \in \mathbf{R}^d: \| g \|_{U(\Phi)} \leqslant 1\}.$$

Покажем, что при $d \geqslant n_0$ и достаточно большой постоянной $K = K_\rho$ выпуклое тело KB содержит точки решетки L вида

$$w = \textstyle\sum_{j=1}^{d} k_j (g)_j e_j; \quad k_j \in \{0, +1, -1\}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{d} | k_j | \geqslant 0,1d = 0,1 | \Lambda |.$$

Тогда, как легко видеть, в качестве искомого вектора v можно взять либо w, либо $-w$, т. е. утверждение леммы будет установлено.

Определим линейный оператор $T: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ соотношением

$$T(\Sigma \alpha_j e_j) = \Sigma \alpha_j [(g)_j]^{-1} e_j.$$

Тогда $T(L) = \mathbf{Z}^d$ и нам достаточно показать, что существует вектор

$$z \in \mathbf{Z}^d, \ \| z \|_\infty \leqslant 1, \ | \operatorname{supp} z | \geqslant 0,1d, \tag{9}$$

такой, что

$$z \in T(K_\rho B(\Phi, \Lambda)) = K_\rho T(B). \tag{9'}$$

Пусть

$$W = W(K_\rho) = 1{,}99 Q^d \cap K_\rho T(B), \tag{10}$$

где $Q^d = \{x \in \mathbf{R}^d: \| x \|_\infty \leqslant 1\}$ — куб в $\mathbf{R}^d$. В [7] использовалось (см. также [10]), что при достаточно больших d ($d \geqslant n_0$) существование вектора z со свойствами (9), (9') вытекает из такой оценки d-мерного объема множества $W(K_\rho)$:

$$V_d(W(K_\rho)) \geqslant 2^d (1{,}9)^d. \tag{11}$$

Установим, что (11) действительно имеет место, если постоянная K_ρ достаточно велика. Пусть $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{\Phi, \Lambda}: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n$ — оператор, ставящий в соответствие вектору $z \in \mathbf{R}^d$ последовательность коэффициентов Фурье. Точнее, если

$$\tilde{z} \in \mathbf{R}^n, \quad (\tilde{z})_j = \begin{cases} (z)_j, & 1 \leqslant j \leqslant d, \\ 0, & j > d \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{z} = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i,$$

то $\mathcal{F}(z) = y = \{(y)_i\} \in \mathbf{R}^n$. Учитывая определение нормы $\| \cdot \|_{U(\Phi)}$, имеем

$$W(K_\rho) = 1{,}99\, Q^d \cap$$

$$\cap \{z \in \mathbf{R}^d: | (\mathcal{F} T^{-1}(z), w_{j,s}) | \leqslant K_\rho, \ 1 \leqslant j, s \leqslant n\}, \tag{12}$$

где $w_{j,s} \in \mathbf{R}^n$,

$$(w_{j,s})_i = \begin{cases} (\varphi_i)_j, & 1 \leqslant i \leqslant s, \\ 0, & \text{если } i > s. \end{cases} \tag{13}$$

Но для любого $w \in \mathbf{R}^n$ $(\mathcal{F} T^{-1} z, w) = (z, Gw)$, где $G = (T^{-1})^* \mathcal{F}^*$, а $\mathcal{F}^*\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^d$, $(T^{-1})^*\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ — сопряженные операторы. При этом для любых $w \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^d$

$$\| \mathcal{F}^* w \|_{l_2^d} \leqslant \| w \|_{l_2^n},$$

$$\| (T^{-1})^* x \|_{l_2^d} \leqslant \max_j | (g)_j | \| x \|_{l_2^d} \leqslant \| x \|_{l_2^d},$$

а следовательно,

$$\| Gw \|_{l_2^d} \leqslant \| w \|_{l_2^n}. \tag{14}$$

Итак,

$$W(K_\rho) = 1{,}99 Q^d \cap \{ z \in \mathbf{R}^d \colon | (z, Gw_{j,s}) | \leqslant K_\rho, 1 \leqslant j, s \leqslant n \}. \tag{15}$$

Рассмотрим разложение векторов $\varphi(j) \equiv \{(\varphi_i)_j\}_{i=1}^n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, на двоичные блоки (это разложение часто употребляется в теории ортогональных рядов, см. подробнее [11, с. 325]):

$$\varphi(j) = \sum\nolimits_{0 \leqslant \nu \leqslant 2^p - 1} r_\nu^p(j) \equiv \sum r_\nu^p, \quad p = 0, 1, \ldots, p_0(j),$$

где $r_0^0 = \varphi(j)$, при $p = 1, 2, \ldots$

$$\| r_\nu^p \|_2 \leqslant 2^{-p/2} \| \varphi(j) \|_2 = 2^{-p/2}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 2^p - 1, \tag{16}$$

а число $p_0 = p_0(j)$ выбирается таким большим, что $| \operatorname{supp} r_\nu^{p_0} | \leqslant 2$, $0 \leqslant \nu \leqslant 2^{p_0} - 1$. Тогда (см. [11, с. 326], а также (13)) для каждой пары (j, s), $j, s = 1, \ldots, n$, найдется набор $\{\nu(p)\}_{p=1}^{p_0}$ такой, что

$$w_{j,s} = \sum\nolimits_{p=1}^{p_0} r_{\nu(p)}^p(j) + \Delta, \tag{17}$$

$$| \operatorname{supp} \Delta | \leqslant 2, \quad \| \Delta \|_\infty \leqslant \| w_{j,s} \|_\infty \leqslant 1.$$

Из (17) вытекает, что для $z \in \mathbf{R}^d$

$$| (z, Gw_{j,s}) | \leqslant \sum\nolimits_{p=1}^{p_0(j)} \max_{0 \leqslant \nu \leqslant 2^p - 1} | (z, f_\nu^p(j)) | + 2 \max_{1 \leqslant r \leqslant n} | (\psi_r, z) |, \tag{17'}$$

где $f_\nu^p(j) = G r_\nu^p(j)$, $\psi_r = G e_r$. При этом (см. (14), (16))

$$\| \psi_r \|_2 \leqslant 1, \quad 1 \leqslant r \leqslant n; \quad \| f_\nu^p(j) \|_2 \leqslant 2^{-p/2}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 2^p - 1,$$
$$1 \leqslant j \leqslant n. \tag{18}$$

Следовательно (см. (15), (17′), (18)),

$$W(K_\rho) \supset 1{,}99 Q^d \cap \{z \in \mathbf{R}^d\colon |(z, \psi_r)| \leqslant K_\rho/10,\ 1 \leqslant r \leqslant n\} \cap$$
$$\cap^n_{j=1} \cap^{p_0(j)}_{p=1} \cap^{2^p-1}_{\nu=0} \{z \in \mathbf{R}^d\colon |(z, f^p_\nu(j))| \leqslant K_\rho/(10p^2)\}. \qquad (19)$$

Полагая $\widetilde{\psi}_r = (10/K_\rho)\,\psi_r$, $\tilde{f}^p_\nu(j) = (10p^2/K_\rho)\, f^p_\nu(j)$, преобразуем соотношение (19):

$$(1{,}99)^{-1} W(K_\rho) \supset \{z \in \mathbf{R}^d\colon |(z, e_i)| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \cap$$
$$\cap \{z \in \mathbf{R}^d\colon |(z, 1{,}99\widetilde{\psi}_r)| \leqslant 1,\quad 1 \leqslant r \leqslant n\} \cap$$
$$\cap^n_{j=1} \cap^{p_0(j)}_{p=1} \cap^{2^p-1}_{\nu=0} \{z \in \mathbf{R}^d\colon |(z, 1{,}99\tilde{f}^p_\nu(j))| \leqslant 1\}, \qquad (20)$$

где

$$\|\widetilde{\psi}_r\|_2 \leqslant 10/K_\rho, \quad \|\tilde{f}^p_\nu(j)\|_2 \leqslant \frac{10p^2}{K_\rho} \cdot 2^{-p/2}. \qquad (21)$$

Нам достаточно показать (см. (11)), что корень степени d из объема множества в прямой части соотношения (20), обозначаемого ниже через $A = A(K_\rho)$, удовлетворяет неравенству

$$[V_d(A)]^{1/d} \geqslant \frac{1{,}9}{1{,}99} \cdot 2, \qquad (22)$$

если постоянная K_ρ достаточно велика. Обозначим через $\{x_\alpha\}^{\alpha_0}_{\alpha=1}$ не равные тождественно нулю векторы, входящие в наборы $\{e_i\}$, $\{1{,}99\widetilde{\psi}_r\}$, $\{1{,}99\,\tilde{f}^p_\nu\}$, занумерованные так, что $x_\alpha = e_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$. Применяя к набору $\chi = \{x_\alpha\}$ следствие 2 работы [10] (в формулировке которого полагаем $n = d$, $q = d - 1$), мы получаем такую оценку снизу объема $V_d(A)$:

$$[V_d(A)]^{1/d} \geqslant \sqrt{2}\,[V(B^d_2)]^{1/d} \left[\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1/2)}\right]^{1/(d-1)} \cdot$$
$$\cdot \left[(d-1)\int_0^\infty t^{-d} \prod^{\alpha_0}_{\alpha=1} (2\Phi_0\{t/\|x_\alpha\|_2\})\,\mathrm{d}t\right]^{1/(d-1)}, \qquad (23)$$

где $V(B^d_2) = \pi^{d/2}[\Gamma(1 + d/2)]^{-1}$ — объем единичного евклидова шара в $\mathbf{R}^d$, а $\Phi_0(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^t e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Из (23) вытекает, что

$$[V_d(A)]^{1/d} \geqslant [1 + o_d(1)](2\pi)^{1/2} I^{1/(d-1)}, \qquad (24)$$

где

$$I = \int_0^\infty t^{-d} \prod^{\alpha_0}_{\alpha=1} (2\Phi_0\{t/\|x_\alpha\|_2\})\,\mathrm{d}t,$$

а $o_d(1)$ — величина, стремящаяся к нулю при $d \to \infty$. Отметим, что

а) $2\Phi_0(z) \geqslant 2\,(2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$;

б) $2\Phi_0(z) \geqslant \exp(-2\exp(-z^2/2))$ при $z \geqslant 1$. $\qquad (25)$

В силу (25), а), с учетом равенств $\| x_\alpha \|_2 = 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$, получаем

$$I \geqslant (2/\pi)^{d/2} \int_0^\infty \exp(-dt^2/2) \prod_{\alpha=d+1}^{\alpha_0} (2\Phi_0 \{t/\| x_\alpha \|_2\})\,dt. \qquad (26)$$

Пусть постоянная K_ρ заведомо настолько велика, что при $t \geqslant \geqslant \gamma \equiv 10^{-5}$ $t\,(\| x_\alpha \|_2)^{-1} \geqslant 1$, $\alpha = d+1, \ldots, \alpha_0$ (см. (21)). Тогда, учитывая (25), б), из (26) выводим

$$I \geqslant (2/\pi)^{d/2} \int_\gamma^{2\gamma} \exp(-dt^2/2) \times$$
$$\times \exp\left[-2 \sum_{\alpha=d+1}^{\alpha_0} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2/\| x_\alpha \|_2^2\right)\right] dt \geqslant$$
$$\geqslant (2/\pi)^{d/2} e^{-2d\gamma^2} \int_\gamma^{2\gamma} \exp(-2S(t))\,dt, \qquad (27)$$

где

$$S(t) \equiv \sum_{\alpha=d+1}^{\alpha_0} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2/\| x_\alpha \|_2^2\right).$$

Оценивая последнюю сумму с использованием неравенств (21) (см. также (20) и определение системы векторов $\{x_\alpha\}$), находим, что при $t \in (\gamma, 2\gamma)$

$$S(t) \leqslant n \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(K_\rho/20)^2\right\} + n \sum_{p=1}^{\infty} 2^p \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\frac{2^p K_\rho^2}{400 p^4}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant n \exp(-10^{-13} K_\rho^2) + nC_1 \exp(-10^{-15} K_\rho^2) \qquad (28)$$

(здесь предполагается, что K_ρ достаточно велика: $K_\rho \geqslant C_2$; C_1, $C_2, \ldots$ — абсолютные положительные постоянные).

Так как $d \geqslant \rho n$ (см. (8)), то из (28) вытекает, что $S(t) \leqslant 10^{-5} d$, если $K_\rho \geqslant C_3 \ln^{1/2}(2/\rho)$. В итоге, при $K_\rho \geqslant C_4 \ln^{1/2}(2/\rho)$ получаем

$$I \geqslant (2/\pi)^{d/2} e^{-2d\gamma^2} \gamma \exp(-2d \cdot 10^{-5}). \qquad (29)$$

Наконец, из (24) и (29) следует, что

$$[V_d(A)]^{1/d} \geqslant 2(1 + o_d(1)) \exp(-3 \cdot 10^{-5}) \geqslant$$
$$\geqslant 2 \exp(-4 \cdot 10^{-5}) \geqslant 2 \cdot (1{,}9/1{,}99),$$

если d достаточно велико: $d \geqslant n_0$. Оценка (22), а значит, и утверждение леммы установлены.

З а м е ч а н и е. Использованная в доказательстве леммы техника оценки объемов шаров пространств $U(\Phi)$ применима не только к дискретным системам Φ, но и к введенным в [12] квазиматричным системам. Систему функций $\{\varphi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$, определенных на некотором множестве G, мы называем квазиматричной, если при $n = 1, 2, \ldots$ найдется множество $\Omega_n \subset G$ с числом элементов

$\leqslant C_5 n$ такое, что для любого полинома $P(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(\theta)$ справедливо неравенство

$$\sup_{\theta \in G} |P(\theta)| \leqslant C_6 \max_{\theta \in \Omega_n} |P(\theta)|.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
22.06.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
[2] Олевский А. М. Модификации функций и ряды Фурье // УМН. 1985. Т. 40, вып. 3. С. 157—193.
[3] Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических многочленов, связанных с равномерной сходимостью // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 93, № 2. С. 281—284.
[4] Кошелева Г. Г. Исправление кусочно постоянных функций и суммирование их рядов Фурье методами Чезаро отрицательного порядка // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 2. С. 175—184.
[5] Кашин Б. С., Кошелева Г. Г. Об одном подходе к теоремам «об исправлении» // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 4. С. 6—9.
[6] Олевский А. М. Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана // ДАН СССР. 1978. Т. 238, № 4. С. 796—799.
[7] Кашин Б. С. Об одном изометрическом операторе в $L^2(0, 1)$ // Докл. Болгарской АН. 1985. Т. 38, № 12. С. 1613—1615.
[8] Кашин Б. С. О безусловной сходимости в пространстве L^1 // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 540—550.
[9] Кашин Б. С. О тригонометрических полиномах с коэффициентами $+1$, -1, 0 // Тр. МИАН. 1987. Т. 180. С. 131—132.
[10] Глускин Е. Д. Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 1. С. 85—96.
[11] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
[12] Кашин Б. С. О тригонометрических полиномах с коэффициентами по модулю равными нулю или единице // Теория функций и приближений. Ч. I. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. С. 19—30.