Математические заметки

Том 82 выпуск 6 декабрь 2007

УДК 517.5

Замечание о задаче сжатого измерения

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков

В последние годы активно разрабатывается новое направление в теории обработки сигналов – "сжатые измерения" (Compressed Sensing). В заметке уточняются отмеченные ранее рядом авторов связи этой темы с задачами об оценке поперечников по Колмогорову, рассмотренными в 70–80 гг. прошлого века.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В последнее время, "сжатое измерение" (Compressed Sensing или Compressive Sampling) привлекает все большее внимание как математиков, так и специалистов по информатике. "Сжатое измерение" понимается как метод *экономного* восстановления неизвестной функции, заданной на конечном множестве мощности m, т.е. вектора $u \in \mathbb{R}^m$ по информации, полученной измерениями скалярных произведений $\langle u, \varphi_j\rangle$, $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, n$. При этом целью является построение алгоритма восстановления (аппроксимации) функции u по информации $y = (\langle u, \varphi_1\rangle, \dots, \langle u, \varphi_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что наиболее важным является случай, когда число измерений n много меньше, чем m. Здесь важным шагом является построение *измеряющего* множества векторов $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, n$, которое оказывается *хорошим* для всех векторов $u \in \mathbb{R}^m$. Ясно, что термины *экономный* и *хороший* должны быть более точно определены в математической постановке задачи. Например, термин "экономный" может означать, что используется полиномиальный по времени работы алгоритм. Естественный вариант постановки задачи, которая обсуждается в данной статье, основан на использовании понятия *разреженности*. Разреженные представления функции являются не только эффективным аналитическим инструментом, но и находят применение во многих прикладных областях таких, как обработка изображений или сигналов и вычислительная математика. Нахождение разреженных представлений основано на использовании понятия m-членной аппроксимации целевой функции элементами некоторой заданной системы функций (словаря). Подчеркнем, что элементам словаря, применяемым в m-членной аппроксимации, разрешено зависеть от аппроксимируемых функций. Аппроксимации этого типа весьма эффективны. Будем говорить, что вектор $u \in \mathbb{R}^m$ является *k-разреженным*, если он имеет самое большее k ненулевых координат. Для заданной пары (m, n) мы хотим понять, какова наибольшая разреженность $k(m, n)$, при которой существует множество векторов $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, n$, и экономный алгоритм A отображения y в $\mathbb{R}^m$ такой, что для любого вектора u разреженности

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00062).

$k(m,n)$ имеет место точное восстановление $A(y(u)) = u$. Другими словами, мы хотим описать матрицы Φ со строками $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\dots,n$, такие, что существует экономный алгоритм решения указанной выше задачи “разреженного восстановления”.

Задача разреженного восстановления в ряде случаев оказывается эквивалентной задаче нахождения наиболее разреженного вектора (столбца) $u^0 := u^0_\Phi(y) \in \mathbb{R}^m$:

$$\min \|v\|_0 \qquad \text{при условии, что} \quad \Phi v = y, \tag{P_0}$$

где $\|v\|_0 := |\operatorname{supp}(v)|$. Донохо с соавторами (см., например, [1] и [2] и приведенный там исторический обзор) предложили некоторый экономный алгоритм и начали систематическое изучение следующего вопроса. Для каких матриц измерения Φ сильно невыпуклая комбинаторная задача оптимизации (P_0) должна быть эквивалентна соответствующей выпуклой релаксации этой задачи

$$\min \|v\|_1 \qquad \text{при условии, что} \quad \Phi v = y, \tag{P_1}$$

где $\|v\|_1$ обозначает ℓ_1-норму вектора $v \in \mathbb{R}^m$? Хорошо известно, что задача (P_1) решается методами линейного программирования. Алгоритм ℓ_1-минимизации A_Φ, соответствующий задаче (P_1), является экономным алгоритмом, который и рассматривается в данной работе. Решение задачи (P_1) обозначим через $A_\Phi(y)$. Известно (см., например, [2]), что для M-когерентных матриц Φ имеет место соотношение $u^0_\Phi(\Phi u) = A_\Phi(\Phi u) = u$ при условии, что u является k-разреженной функцией с $k < (1 + 1/M)/2$. Это позволяет построить довольно простые детерминированные матрицы Φ с $k(m,n) \asymp n^{1/2}$ и провести восстановление, применяя алгоритм ℓ_1-минимизации A_Φ, соответствующий задаче (P_1).

Недавний прогресс (см. обзоры [3], [4]) в изучении сжатого измерения позволил доказать существование матриц Φ с $k(m,n) \asymp n/\log(m/n)$, что, конечно, значительно лучше, чем $n^{1/2}$. Некоторые авторы (см., например, [5], [6]) отмечали связь между задачей сжатого измерения и задачами об оценках поперечников конечномерных множеств, которые активно изучались в конце семидесятых и в начале восьмидесятых годов 20-го столетия. В данной работе мы рассматриваем эту связь более подробно. Перейдем к детальному обсуждению недавних результатов.

Начнем с результатов, полученных в [5]. Донохо [5] сформулировал следующие три свойства матриц Φ, столбцы которых нормированы в ℓ_2, и доказал, что существуют матрицы, удовлетворяющие этим условиям. Пусть T – некоторое подмножество индексов из $[1,m]$. Обозначим через Φ_T матрицу, состоящую из столбцов матрицы Φ с номерами из T.

CS1. Минимальное сингулярное число матрицы Φ_T удовлетворяет условию $\geqslant \eta_1 > 0$ равномерно по T таким, что $|T| \leqslant \rho n/\log m$.

CS2. Пусть W_T – область значений матрицы Φ_T. Предположим, что для любого T такого, что $|T| \leqslant \rho n/\log m$, имеет место

$$\|w\|_1 \geqslant \eta_2 n^{1/2} \|w\|_2 \qquad \forall\, w \in W_T, \quad \eta_2 > 0.$$

CS3. Обозначим $T^c := \{j\}_{j=1}^m \setminus T$. Для любого T такого, что $|T| \leqslant \rho n/\log m$, и для любого $w \in W_T$, выполняется неравенство

$$\|v\|_{\ell_1(T^c)} \geqslant \eta_3 \left(\log\left(\frac{m}{n}\right)\right)^{-1/2} \|w\|_1, \qquad \eta_3 > 0,$$

для любого v такого, что $\Phi_{T^c} v = w$.

В [5] доказано, что если Φ удовлетворяет условиям CS1–CS3, то существует $\rho_0 > 0$ такое, что $u^0_\Phi(\Phi u) = A_\Phi(\Phi u) = u$, при условии, что $|\operatorname{supp} u| \leqslant \rho_0 n/\log m$. Анализ, проведенный в [5], позволяет связать задачу сжатого измерения с задачей оценивания поперечников по Колмогорову и двойственных им поперечников по Гельфанду.

Дадим соответствующие определения. Для компактного множества $F \subset \mathbb{R}^m$ *поперечник по Колмогорову* имеет вид

$$d_n(F, \ell_p) := \inf_{L_n : \dim L_n \leqslant n} \sup_{f \in F} \inf_{a \in L_n} \|f - a\|_p,$$

где L_n – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, а $\|\cdot\|_p$ обозначает ℓ_p-норму. *Поперечник по Гельфанду* определяется как

$$d^n(F, \ell_p) := \inf_{V_n} \sup_{f \in F \cap V_n} \|f\|_p,$$

где инфимум берется по линейным подпространствам V_n размерности $\geqslant m - n$. Хорошо известно, что поперечники по Колмогорову и Гельфанду связаны формулой двойственности. Отметим, что впервые систематически идеи двойственности в теории аппроксимации были использованы Никольским еще до введения понятия поперечника по Гельфанду. В случае, когда $F = B^m_p$ является единичным ℓ_p-шаром в $\mathbb{R}^m$ и $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$, имеет место соотношение (см., например, [7])

$$d_n(B^m_p, \ell_q) = d^n(B^m_{q'}, \ell_{p'}), \qquad p' := \frac{p}{p-1}. \tag{1.1}$$

В интересующем нас частном случае, когда $p = 2$ и $q = \infty$, из (1.1) следует, что

$$d_n(B^m_2, \ell_\infty) = d^n(B^m_1, \ell_2). \tag{1.2}$$

В теории аппроксимации было установлено (см. [8] и [9]), что

$$d_n(B^m_2, \ell_\infty) \leqslant C\left(\frac{1 + \log(m/n)}{n}\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать абсолютную константу. Другими словами, было доказано (см. (1.3) и (1.2)), что для любой пары (m, n) существует подпространство V_n, $\dim V_n \geqslant m - n$, такое, что для любого $x \in V_n$ имеет место

$$\|x\|_2 \leqslant C\left(\frac{1 + \log(m/n)}{n}\right)^{1/2} \|x\|_1. \tag{1.4}$$

В [5] было показано, что свойства нуль-пространства $\mathscr{N}(\Phi) := \{x : \Phi x = 0\}$ матрицы измерений Φ играют важную роль в задаче сжатого измерения. Донохо ввел в [5] две характеристики, связанные с Φ, которые формулируются в терминах $\mathscr{N}(\Phi)$ следующим образом:

$$w(\Phi, F) := \sup_{x \in F \cap \mathscr{N}(\Phi)} \|x\|_2, \qquad \nu(\Phi, T) := \sup_{x \in \mathscr{N}(\Phi)} \frac{\|x_T\|_1}{\|x\|_1},$$

где x_T – сужение x на T: $(x_T)_j = x_j$ при $j \in T$ и $(x_T)_j = 0$ в противном случае. В [5] доказано, что если Φ удовлетворяет двум следующим условиям:

$$\nu(\Phi, T) \leqslant \eta_1, \qquad |T| \leqslant \frac{\rho_1 n}{\log m}, \tag{A1}$$

$$w(\Phi, B^m_1) \leqslant \eta_2 \left(\frac{\log m}{n}\right)^{1/2}, \tag{A2}$$

то для любого $u \in B_1^m$ имеет место

$$\|u - A_\Phi(\Phi u)\|_2 \leqslant C\left(\frac{\log m}{n}\right)^{1/2}.$$

Теперь мы рассмотрим результаты, полученные Кендесом, Ромбергом и Тао в ряде публикаций. Эти авторы (см. [10]) ввели следующее *свойство ограниченной изометрии* (СОИ) для матрицы измерения Φ: $\delta_S < 1$ является константой S-ограниченной изометрии матрицы Φ, если это наименьшая величина такая, что

$$(1-\delta_S)\|c\|_2^2 \leqslant \|\Phi_T c\|_2^2 \leqslant (1+\delta_S)\|c\|_2^2 \tag{1.5}$$

для всех подмножеств T, $|T| \leqslant S$, и всех последовательностей коэффициентов $\{c_j\}_{j\in T}$. Кендес и Тао (см. [10]) доказали, что если $\delta_{2S}+\delta_{3S} < 1$, то для S-разреженного вектора u имеет место соотношение $A_\Phi(\Phi u) = u$ (восстановление с помощью ℓ_1-минимизации является точным). Они также доказали, что существуют матрицы измерения Φ, удовлетворяющие условию $\delta_{2S}+\delta_{3S} < 1$ при больших значениях разреженности $S \asymp n/\log(m/n)$. Для положительного числа a будем писать

$$\sigma_a(v)_1 := \min_{w\in\mathbb{R}^m:|\operatorname{supp}(w)|\leqslant a} \|v-w\|_1.$$

В [11] доказано, что если $\delta_{3S} + 3\delta_{4S} < 2$, то

$$\|u - A_\Phi(\Phi u)\|_2 \leqslant CS^{-1/2}\sigma_S(u)_1. \tag{1.6}$$

Заметим, что свойства матриц типа СОИ уже использовались в работе [8], где было установлено неравенство (1.3) с лишним множителем $(1+\log m/n)$. Доказательство в [8] основано на свойствах случайных матриц Φ, элементы которых имеют вид $\pm 1/\sqrt{n}$. В [8] было доказано, что случайная матрица с элементами $\pm 1/\sqrt{n}$ удовлетворяет (с вероятностью, близкой к 1) левому неравенству в (1.5) при $S \asymp n/(1+\log m/n)$ (см. (13) и (30) в [8]). В [8] было также доказано, что эта матрица удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi_T c\|_2^2 \leqslant C\left(1+\log\frac{m}{n}\right)\|c\|_2^2 \tag{1.7}$$

для любого подмножества T такого, что $|T| \leqslant n$, и любого множества коэффициентов $\{c_j\}_{j\in T}$ (см. (29) в [8]). Заметим, что доказательство правого неравенства в (1.5) при $S \asymp n/(1+\log m/n)$ для случайной $(n\times m)$-матрицы с элементами $\pm 1/\sqrt{n}$ аналогично доказательству неравенства (1.7).

В п. 3 мы уточним рассуждения, проведенные в [8], пояснив, как в рамках предложенного там подхода можно избавиться от дополнительного log-множителя в оценке величины $d_n(B_2^m, \ell_\infty^m)$. Заметим, что в этих рассуждениях, в отличие от первого доказательства точного по порядку неравенства (1.3) в [9], не используется соотношение двойственности (1.1).

Дальнейшее изучение задачи сжатого измерения проводилось Коэном, Даменом и Девором ([6]). Они доказали, что если Φ удовлетворяет свойству ограниченной изометрии порядка $2k$ с $\delta_{2k} < \delta < 1/3$, то имеет место соотношение

$$\|u - A_\Phi(\Phi u)\|_1 \leqslant \frac{2+2\delta}{1-3\delta}\,\sigma_k(u)_1. \tag{1.8}$$

При доказательстве неравенства (1.8) авторы работы [6] пользовались следующим свойством (свойство нуль-пространства) матриц Φ, удовлетворяющих свойству ограниченной изометрии порядка $3k/2$: для любого $x \in \mathcal{N}(\Phi)$ и любого T, $|T| \leqslant k$, имеет место соотношение

$$\|x\|_1 \leqslant C\|x_{T^c}\|_1. \tag{1.9}$$

Свойство нуль-пространства (1.9) тесно связано со свойством (A1) из [5]. Доказательство неравенства (1.8), проведенное в [6], приводит к неравенству, аналогичному (1.8), в предположении, что нуль-пространство Φ обладает свойством (1.9) при $C < 2$.

Теперь обсудим результаты, полученные в данной статье. Будем говорить, что матрица измерений Φ имеет *сильное свойство сжатого измерения* (ССИ), если для любого $u \in \mathbb{R}^m$ имеет место соотношение

$$\|u - A_\Phi(\Phi u)\|_2 \leqslant Ck^{-1/2}\sigma_k(u)_1 \tag{1.10}$$

при $k \asymp n/\log(em/n)$. Определим *слабое свойство сжатого измерения* (СлССИ), заменив (1.10) более слабым неравенством

$$\|u - A_\Phi(\Phi u)\|_2 \leqslant Ck^{-1/2}\|u\|_1. \tag{1.11}$$

Будем говорить, что Φ удовлетворяет *свойству поперечника* (СП), если (1.4) выполняется для нуль-пространства $\mathcal{N}(\Phi)$. Основной результат нашей статьи заключается в том, что вышеперечисленные свойства матрицы Φ эквивалентны. Эквивалентность понимается следующим образом. Например, будем говорить, что из СлССИ следует ССИ, если из (1.11) с константой C следует (1.10) с другой константой C', не зависящей от m, n при их стремлении к бесконечности.

2. Новые результаты. Как указывалось во введении, известно, что для любой пары (m,n), $n < m$, существует подпространство $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ с $\dim\Gamma \geqslant m-n$ такое, что

$$\|x\|_2 \leqslant Cn^{-1/2}\left(\ln\frac{em}{n}\right)^{1/2}\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in \Gamma. \tag{2.1}$$

Рассмотрим некоторые свойства подпространств Γ, удовлетворяющих (2.1), которые могут быть полезны в задачах сжатого измерения. Обозначим

$$S := S(m,n) := C^{-2}n\left(\ln\frac{em}{n}\right)^{-1}.$$

При $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m$ будем писать $\operatorname{supp}(x) := \{j : x_j \neq 0\}$.

Лемма 2.1. *Пусть* Γ *удовлетворяет* (2.1) *и* $x \in \Gamma$. *Тогда либо* $x = 0$, *либо* $|\operatorname{supp}(x)| \geqslant S(m,n)$.

Доказательство. Предположим, что $x \neq 0$. Тогда $\|x\|_1 > 0$. Обозначим $\Lambda := \operatorname{supp}(x)$. Имеем

$$\|x\|_1 = \sum_{j\in\Lambda}|x_j| \leqslant |\Lambda|^{1/2}\left(\sum_{j\in\Lambda}|x_j|^2\right)^{1/2} \leqslant |\Lambda|^{1/2}\|x\|_2. \tag{2.2}$$

Применяя (2.1), получим из (2.2)

$$\|x\|_1 \leqslant |\Lambda|^{1/2}S(m,n)^{-1/2}\|x\|_1.$$

Таким образом, получим

$$|\Lambda| \geqslant S(m,n).$$

Лемма 2.2. *Пусть* Γ *удовлетворяет* (2.1), *и пусть* $x \neq 0$, $x \in \Gamma$. *Тогда для любого* Λ *такого, что* $|\Lambda| < S(m,n)/4$, *имеет место неравенство*

$$\sum_{j\in\Lambda} |x_j| < \frac{\|x\|_1}{2}.$$

Доказательство. Аналогично (2.2) имеем

$$\sum_{j\in\Lambda} |x_j| \leqslant |\Lambda|^{1/2} S(m,n)^{-1/2} \|x\|_1 < \frac{\|x\|_1}{2}.$$

Лемма 2.3. *Пусть* Γ *удовлетворяет* (2.1). *Предположим, что* $u \in \mathbb{R}^m$ *является разреженным вектором с* $|\operatorname{supp}(u)| < S(m,n)/4$. *Тогда, для любого* $v = u + x$, $x \in \Gamma$, $x \neq 0$, *имеет место соотношение*

$$\|v\|_1 > \|u\|_1.$$

Доказательство. Пусть $\Lambda := \operatorname{supp}(u)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|v\|_1 &= \sum_{j\in[1,m]} |v_j| = \sum_{j\in\Lambda} |u_j + x_j| + \sum_{j\notin\Lambda} |x_j| \\
&\geqslant \sum_{j\in\Lambda} |u_j| - \sum_{j\in\Lambda} |x_j| + \sum_{j\notin\Lambda} |x_j| = \|u\|_1 + \|x\|_1 - 2\sum_{j\in\Lambda} |x_j|.
\end{aligned}$$

Из леммы 2.2 следует, что

$$\|x\|_1 - 2\sum_{j\in\Lambda} |x_j| > 0.$$

Лемма 2.3 гарантирует, что следующий алгоритм, известный как "базисное преследование" ("Basis Pursuit", см. A_Φ во введении), точно находит разреженный вектор u при условии, что $|\operatorname{supp}(u)| < S(m,n)/4$:

$$u_\Gamma := u + \arg\min_{x\in\Gamma} \|u + x\|_1.$$

Теорема 2.1. *Пусть* Γ *удовлетворяет* (2.1). *Тогда для любых* $u \in \mathbb{R}^m$ *и* u' *таких, что* $\|u'\|_1 \leqslant \|u\|_1$, $u - u' \in \Gamma$, *имеют место соотношения*

$$\|u - u'\|_1 \leqslant 4\sigma_{S/16}(u)_1, \tag{2.3}$$

$$\|u - u'\|_2 \leqslant \left(\frac{S}{16}\right)^{-1/2} \sigma_{S/16}(u)_1. \tag{2.4}$$

Доказательство. Дано, что $u - u' \in \Gamma$. Таким образом, (2.4) следует из (2.3) и (2.1). Теперь докажем (2.3). Пусть Λ, $|\Lambda| = [S/16]$, – множество индексов наибольших по абсолютной величине координат функции u. Обозначим через u_Λ сужение функции u на это множество, т.е. $(u_\Lambda)_j = u_j$ при $j \in \Lambda$ и $(u_\Lambda)_j = 0$ при $j \notin \Lambda$. Также обозначим $u^\Lambda := u - u_\Lambda$. Тогда

$$\sigma_{S/16}(u)_1 = \sigma_{|\Lambda|}(u)_1 = \|u - u_\Lambda\|_1 = \|u^\Lambda\|_1. \tag{2.5}$$

Имеем
$$\|u-u'\|_1 \leqslant \|(u-u')_\Lambda\|_1 + \|(u-u')^\Lambda\|_1.$$
Далее,
$$\|(u-u')^\Lambda\|_1 \leqslant \|u^\Lambda\|_1 + \|(u')^\Lambda\|_1.$$
Применяя неравенство $\|u'\|_1 \leqslant \|u\|_1$, получим
$$\|(u')^\Lambda\|_1 - \|u^\Lambda\|_1 = \|u'\|_1 - \|u\|_1 - \|u'_\Lambda\|_1 + \|u_\Lambda\|_1 \leqslant \|(u-u')_\Lambda\|_1.$$
Следовательно,
$$\|(u')^\Lambda\|_1 \leqslant \|u^\Lambda\|_1 + \|(u-u')_\Lambda\|_1$$
и
$$\|u-u'\|_1 \leqslant 2\|(u-u')_\Lambda\|_1 + 2\|u^\Lambda\|_1. \tag{2.6}$$
Так как $u-u' \in \Gamma$, получим оценку
$$\|(u-u')_\Lambda\|_1 \leqslant |\Lambda|^{1/2}\|(u-u')_\Lambda\|_2 \leqslant |\Lambda|^{1/2}\|u-u'\|_2 \leqslant |\Lambda|^{1/2}S^{-1/2}\|u-u'\|_1. \tag{2.7}$$
Из нашего условия на $|\Lambda|$ следует, что $|\Lambda|^{1/2}S^{-1/2} \leqslant 1/4$. Отсюда, подставляя (2.7) в (2.6), получим
$$\|u-u'\|_1 \leqslant \frac{\|u-u'\|_1}{2} + 2\|u^\Lambda\|_1,$$
что приводит к (2.3):
$$\|u-u'\|_1 \leqslant 4\|u^\Lambda\|_1.$$

Следствие 2.1. *Пусть Γ удовлетворяет (2.1). Тогда для любых $u \in \mathbb{R}^m$ имеют место соотношения*
$$\|u-u_\Gamma\|_1 \leqslant 4\sigma_{S/16}(u)_1, \tag{2.8}$$
$$\|u-u_\Gamma\|_2 \leqslant \left(\frac{S}{16}\right)^{-1/2}\sigma_{S/16}(u)_1. \tag{2.9}$$

Предложение 2.1. *Пусть для Γ выполняется (1.11) с u_Γ вместо $A_\Phi(\Phi u)$ и $k = n/\ln(em/n)$. Тогда Γ удовлетворяет (2.1).*

Доказательство. Пусть $u \in \Gamma$. Тогда $u_\Gamma = 0$ и из (1.11) следует, что
$$\|u\|_2 \leqslant C\left(\frac{\ln(em/n)}{n}\right)^{1/2}\|u\|_1.$$

Теорема 2.2. *Следующие три свойства матрицы Φ эквивалентны:*
- *сильное свойство сжатого измерения,*
- *слабое свойство сжатого измерения,*
- *свойство поперечника.*

Доказательство. Очевидно, что ССCИ $\Rightarrow$ СлССИ. Из следствия 2.1 с $\Gamma = \mathcal{N}(\Phi)$ следует, что СП (свойство поперечника) $\Rightarrow$ ССCИ. Из предложения 2.1 с $\Gamma = \mathcal{N}(\Phi)$ следует, что СлССИ $\Rightarrow$ СП. Таким образом, все три свойства эквивалентны.

Оценка (1.8), полученная в [11], показывает, что из свойства ограниченной изометрии (СОИ) с $S \asymp n/\log(em/n)$ следует ССCИ. Следовательно, по теореме 2.2 из СОИ следует СП. В п. 3, приводится прямое доказательство этого утверждения.

3. Прямое доказательство того, что из СОИ следует СП. Покажем, что любое подпространство $L \subset \mathbb{R}^m$, порожденное матрицей Φ ранга n (L натянуто на строки матрицы Φ), удовлетворяющей (1.5) с $S \asymp n/(1+\log m/n)$, аппроксимирует евклидов шар в ℓ_∞^m-метрике с оптимальной ошибкой:

$$d(B_2^m, L)_{\ell_\infty^m} \leqslant Cn^{-1/2}\biggl(1+\log\frac{m}{n}\biggr)^{1/2}. \tag{3.1}$$

Предположим, что любые n столбцов матрицы Φ линейно независимы (этого всегда можно достичь бесконечно малыми изменениями элементов матрицы Φ). Пусть $e_1, \dots, e_m$ – столбцы матрицы Φ. Тогда достаточно доказать (см. [8]), что для любого разложения

$$e_{i_{n+1}} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s e_{i_s}, \qquad i_\nu \neq i_\mu \ \text{ если } \ \nu \neq \mu, \quad 1 \leqslant \nu, \mu \leqslant n+1, \tag{3.2}$$

выполняется неравенство

$$\frac{\|\lambda\|_2}{\|\lambda\|_1}\biggl(1+\frac{1}{\|\lambda\|_2}\biggr) \leqslant Cn^{-1/2}\biggl(1+\log\frac{m}{n}\biggr)^{1/2}, \qquad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \tag{3.3}$$

Запишем (3.2) в виде

$$\sum_{s=1}^{n+1} \widetilde{\lambda}_s e_{i_{\sigma(s)}} = 0, \qquad \text{где} \quad |\widetilde{\lambda}_1| \geqslant \dots \geqslant |\widetilde{\lambda}_{n+1}|$$

и множество координат вектора $\widetilde{\lambda} = \{\widetilde{\lambda}_s\}_{s=1}^{n+1}$ содержит 1 и все λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Повторяя рассуждения леммы 4.1 из [6] (см. также лемму 3 в [9] и [11]), получим из (1.5) при $S \asymp n/(1+\log m/n)$:

$$\biggl(\sum_{s=1}^{4S} \widetilde{\lambda}_s^2\biggr)^{1/2} \leqslant C' S^{-1/2} \sum_{4S+1}^{n+1} |\widetilde{\lambda}_s|, \qquad \sum_{s=1}^{n+1} |\widetilde{\lambda}_s| \leqslant C \sum_{s=S+1}^{n} |\widetilde{\lambda}_s|. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что

$$\|\widetilde{\lambda}\|_2 \leqslant CS^{-1/2}\|\widetilde{\lambda}\|_1. \tag{3.5}$$

Если бы (3.5) не выполнялось, тогда “положительная часть” ℓ^2-нормы вектора $\widetilde{\lambda}$ находилась бы на первых $4S$ координатах (см. лемму 4 в [8]), что противоречит (3.4).

Кроме того, так как $\|\widetilde{\lambda}\|_2 > 1$, из (3.5) получим $\|\widetilde{\lambda}\|_1 \geqslant cS^{1/2}$ и, следовательно, $\|\lambda\|_1 \geqslant cS^{1/2}$. Наконец, имеем

$$\frac{\|\lambda\|_2}{\|\lambda\|_1} \leqslant \frac{\|\widetilde{\lambda}\|_2}{\|\lambda\|_1} \leqslant \frac{2\|\widetilde{\lambda}\|_2}{\|\widetilde{\lambda}\|_1} \leqslant 2CS^{-1/2},$$

что и следовало доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit”, *SIAM Rev.*, **43**:1 (2001), 129–159.

[2] D. L. Donoho, M. Elad, V. N. Temlyakov, "Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**:1 (2006), 6–18.

[3] E. J. Candes, "Compressive sampling", *International Congress of Mathematicians*, v. 3 (Madrid, Spain, August 22–30, 2006), Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 1433–1452.

[4] R. DeVore, "Optimal computation", *International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Madrid, Spain, August 22–30, 2006), Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 187–215.

[5] D. L. Donoho, "Compressed sensing", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**:4 (2006), 1289–1306.

[6] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, *Compressed Sensing and k-term Approximation*, Manuscript, 2007.

[7] Р. С. Исмагилов, "Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближения функций тригонометрическими многочленами", *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178; англ. пер.: "Diameters of sets in normed linear spaces, and the approximation of functions by trigonometric polynomials", *Russ. Math. Surv.*, **29**:3 (1974), 169–186.

[8] Б. С. Кашин, "Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций", *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **41**:2 (1977), 334–351; англ. пер.: "Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions", *Math. USSR, Izv.*, **11** (1978), 317–333.

[9] А. Ю. Гарнаев, Е. Д. Глускин, "О поперечниках евклидова шара", *Докл. АН СССР*, **277**:5 (1984), 1048–1052; англ. пер.: "On widths of the Euclidean ball", *Sov. Math., Dokl.*, **30** (1984), 200–204.

[10] E. J. Candes, T. Tao, "Decoding by linear programming", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **51**:12 (2005), 4203–4215.

[11] E. J. Candes, J. K. Romberg, T. Tao, "Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements", *Comm. Pure Appl. Math.*, **59**:8 (2006), 1207–1223.

Б. С. Кашин
Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: kashin@mi.ras.ru

Поступило
15.08.2007

В. Н. Темляков
Университет Южной Каролины, США
E-mail: temlyak@math.sc.edu