ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОПИСАНИИ ФРЕЙМОВ ОБЩЕГО ВИДА

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова

Пусть H – гильбертово пространство. Система ненулевых элементов $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\} \subset H$ называется *фреймом*, если выполнены неравенства

$$A\|g\|_H^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |(g, \varphi_j)|^2 \leqslant B\|g\|_H^2 \qquad \forall g \in H, \tag{1}$$

где $0 < A \leqslant B < \infty$ – абсолютные постоянные, а $\|\cdot\|$ и $(\cdot\,,\,\cdot)$ – норма и скалярное произведение в H. Постоянные B и A называются соответственно *верхней* и *нижней границами* фрейма Φ, а их отношение $\kappa = B/A$ называется *коэффициентом обусловленности* и обозначается $\kappa(\Phi)$. В случае, когда $\kappa(\Phi) = 1$, т.е. $A = B$, фрейм Φ называется *жестким*. Фреймы были введены в 1952 году в работе Даффина и Шеффера [1] (см. также [2]), однако некоторые результаты о фреймах содержались в неявном виде и в более ранних работах. В частности, следующий результат известен в квантовой теории информации и некоторых областях функционального анализа как теорема Наймарка и датируется 1940 годом.

Теорема А (см. [3, гл. 10], [4], [9]). *Для любого жесткого фрейма $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ в гильбертовом пространстве H найдутся гильбертово пространство $H' \supset H$ и ортонормированный базис $\Psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ пространства H' такие, что*

$$\varphi_j = \pi_{H' \to H}(\psi_j), \qquad j = 1, 2, \dots,$$

где $\pi_{H' \to H}$ – оператор ортогонального проектирования из H' в H.

Близкие к теореме А результаты содержатся также в работе Козлова 1948 года, где, по существу, исследовались жесткие фреймы (см. [5], а также [6] и [7, теорема 8.3]). Недавно результаты смежные с теоремой А были получены Лукашенко [8].

В последние годы фреймы нашли разнообразные приложения в прикладной математике, в частности, при построении алгоритмов сжатия изображений. В этой связи представляется естественным дать описание фреймов общего вида, аналогичное теореме А. Мы не нашли соответствующего результата в литературе и устанавливаем его в этой заметке. Приводимое ниже доказательство с нашей точки зрения проще, чем известные доказательства теоремы Наймарка (рассуждения ниже, в предположении, что $\kappa(\Phi) = 1$, аналогичны проверке элементарного факта из линейной алгебры о возможности дополнения ортонормированного набора векторов $\{v_i,\ i = 1, 2, \dots, s\} \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant s < n$, до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$; весьма прозрачен конечномерный вариант установленной ниже теоремы 1 и в случае, когда $\kappa(\Phi) > 1$).

Прежде, чем формулировать и доказывать наш результат, введем некоторые обозначения. Пусть Λ – некоторое счетное множество с заданным на нем порядком (иными словами, мы считаем, что фиксировано взаимно однозначное отображение Λ на натуральный ряд $\mathbb{N}$). Через $\ell^2(\Lambda)$ обозначим гильбертово пространство наборов чисел $\{c_\omega,\ \omega \in \Lambda\}$, занумерованных элементами из Λ с нормой

$$\biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} |c_\omega|^2\biggr)^{1/2}.$$

Классическое гильбертово пространство $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ соответствует случаю, когда $\Lambda = \mathbb{N}$ и на Λ задан естественный порядок. В этом случае для j-го элемента a_j последовательности $a = \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \in \ell^2$ используем также обозначение $(a)_j$. Система элементов $\Psi = \{\psi_\omega : \omega \in \Lambda\}$ гильбертова пространства H' называется *базисом Рисса* в H', если Ψ полна в H' и для любого набора чисел $\{c_\omega : \omega \in \Lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$ выполняются оценки

$$A^{1/2}\biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} |c_\omega|^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl\|\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega\psi_\omega\biggr\|_{H'} \leqslant B^{1/2}\biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} |c_\omega|^2\biggr)^{1/2}, \tag{2}$$

где $0 < A \leqslant B < \infty$ – абсолютные постоянные (о базисах Рисса см., например, [7, с. 17]; обычно $\Lambda = \mathbb{N}$; отметим еще, что свойство системы быть базисом Рисса не зависит от порядка элементов этой системы).

Теорема 1. *Для того чтобы система элементов $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ гильбертова пространства H являлась фреймом с границами A и B, $A \leqslant B$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство H', содержащее H, и базис Рисса $\Psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ в H' со свойством* (2) (*при* $\Lambda = \mathbb{N}$) *такие, что*

$$\varphi_j = \pi_{H' \to H}(\psi_j), \qquad j = 1, 2, \dots .$$

Ниже для определенности считаем, что H – действительное гильбертово пространство. Следующий факт, по существу, хорошо известен.

Утверждение 1. *Пусть Λ – некоторое счетное множество и $V = \{v_\omega : \omega \in \Lambda\}$ – базис Рисса в гильбертовом пространстве H, причем для всех $c \in \ell^2(\Lambda)$*

$$A^{1/2}\biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl\|\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega v_\omega\biggr\|_H \leqslant B^{1/2}\biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega^2\biggr)^{1/2}, \tag{3}$$

где $A > 0$, B – абсолютные постоянные. Тогда сопряженная к V система

$$V^* = \{v_\mu^* : \mu \in \Lambda\}$$

является базисом Рисса в сопряженном пространстве H^* и выполняется оценка

$$\frac{1}{B^{1/2}}\biggl(\sum_{\mu\in\Lambda} \beta_\mu^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl\|\sum_{\mu\in\Lambda} \beta_\mu v_\mu^*\biggr\|_{H^*} \leqslant \frac{1}{A^{1/2}}\biggl(\sum_{\mu\in\Lambda} \beta_\mu^2\biggr)^{1/2}. \tag{4}$$

(Напомним, что сопряженная система однозначно определяется соотношениями

$$\langle v_\mu^*, v_\omega\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \omega, \\ 0, & \text{если } \mu \neq \omega, \end{cases}$$

где $\langle f, g\rangle$ – значение функционала $f \in H^*$ на элементе $g \in H$.)

Доказательство. Полнота и минимальность системы V^* вытекает из общих результатов о базисах (см. [7, гл. 1]). Проверим справедливость неравенств (4). Имеем

$$\begin{aligned}\biggl\|\sum_{\mu\in\Lambda} \beta_\mu v_\mu^*\biggr\|_{H^*} &= \sup_{\{c_\omega\}:\|\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega v_\omega\|_H \leqslant 1} \biggl\langle \sum_{\mu\in\Lambda} \beta_\mu v_\mu^*, \sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega v_\omega \biggr\rangle \\ &= \sup_{\{c_\omega\}:\|\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega v_\omega\|_H \leqslant 1} \sum_{\omega\in\Lambda} \beta_\omega c_\omega \geqslant \frac{1}{B^{1/2}}\biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} \beta_\omega^2\biggr)^{1/2},\end{aligned}$$

так как в силу (3) имеет место включение

$$\Bigl\{\{c_\omega\} : \Bigl\|\sum c_\omega v_\omega\Bigr\|_H \leqslant 1\Bigr\} \supset \biggl\{\{c_\omega\} : \biggl(\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega^2\biggr)^{1/2} \leqslant \frac{1}{B^{1/2}}\biggr\}.$$

Аналогично,

$$\biggl\|\sum_{\mu\in\Lambda} \beta_\mu v_\mu^*\biggr\|_{H^*} = \sup_{\{c_\omega\}:\|\sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega v_\omega\|_H \leqslant 1} \sum_{\omega\in\Lambda} \beta_\omega c_\omega,$$

и в силу включения

$$\left\{\{c_\omega\}:\left\|\sum_{\omega\in\Lambda}c_\omega v_\omega\right\|_H\leqslant 1\right\}\subset\left\{\{c_\omega\}:\left(\sum_{\omega\in\Lambda}c_\omega^2\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{A^{1/2}}\right\}$$

мы имеем

$$\left\|\sum_{\mu\in\Lambda}\beta_\mu v_\mu^*\right\|_{H^*}\leqslant\frac{1}{A^{1/2}}\left(\sum_{\mu\in\Lambda}\beta_\mu^2\right)^{1/2}.$$

Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 вытекает, что для любого базиса Рисса $V=\{v_\omega:\omega\in\Lambda\}$ со свойством (3) и для любого элемента $f\in H^*$ выполняются соотношения

$$A\|f\|_{H^*}^2\leqslant\sum_{\omega\in\Lambda}\langle f,v_\omega\rangle^2\leqslant B\|f\|_{H^*}^2. \tag{5}$$

Действительно, применяя утверждение 1 для разложения функционала f по базису $\{v_\mu^*:\mu\in\Lambda\}$:

$$f=\sum_{\omega\in\Lambda}\langle f,v_\omega\rangle v_\omega^*,$$

мы получаем (5). Используя изометрию пространств H и H^*, мы из (5) выводим, что в условиях утверждения 1 для любого $g\in H$ выполнено

$$A\|g\|_H^2\leqslant\sum_{\omega\in\Lambda}(g,v_\omega)^2\leqslant B\|g\|_H^2. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. *Достаточность.* Пусть $\Psi=\{\psi_j:j\in\mathbb{N}\}$ – базис Рисса в H', $H'\supset H$, и выполнены соотношения (2) при $\Lambda=\mathbb{N}$. Пусть также $\varphi_j=\pi_{H'\to H}(\psi_j)$, $j=1,2,\dots$. Тогда для любого элемента $g\in H$ выполнено

$$(g,\varphi_j)=(g,\psi_j),\qquad j=1,2,\dots,$$

а, значит, для любого $g\in H$

$$A\|g\|_H^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}(g,\varphi_j)^2\leqslant B\|g\|_H^2,$$

т.е. система $\{\varphi_j:j\in\mathbb{N}\}$ – фрейм.

Необходимость. Не ограничивая общности, считаем, что $H=\ell^2$. Образуем бесконечную матрицу R, j-й столбец которой совпадает с последовательностью $\varphi_j\in\ell^2$, $j=1,2,\dots$. Пусть v_i, $i=1,2,\dots,$ – строки матрицы R. Тогда неравенства (1) означают, что для любой последовательности $\alpha=\{\alpha_i:i=1,2,\dots\}\in\ell^2$ выполнены оценки

$$A\|\alpha\|_{\ell^2}^2\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i v_i\right\|_{\ell^2}\leqslant B\|\alpha\|_{\ell^2}^2. \tag{7}$$

Пусть L – замыкание (по норме ℓ^2) линейной оболочки системы $V=\{v_i:i\in\mathbb{N}\}$. В силу (7) $\dim L=\infty$ и V – базис Рисса в L. Рассмотрим ортогональное дополнение $L^\perp$ к L в ℓ^2. Пусть $W=\{w_\nu:\nu\in M\}$ – произвольный ортогональный базис в $L^\perp$, причем

$$\forall\nu\in M\qquad A\leqslant\|w_\nu\|_{\ell^2}^2\leqslant B, \tag{8}$$

где M – некоторое счетное, конечное или пустое (в зависимости от размерности подпространства $L^{\perp}$) множество индексов, $M \cap \mathbb{N} = \varnothing$ и элементы системы W “занумерованы” точками из M. Пусть $\Lambda = \mathbb{N} \cup M$ и система $\Gamma = \{\gamma_\omega : \omega \in \Lambda\} \subset \ell^2$ задается соотношениями

$$\gamma_\omega = \begin{cases} v_i & \text{если } \omega = i \in \mathbb{N}, \\ w_\nu & \text{если } \omega = \nu \in M. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда легко видеть, что Γ – базис Рисса в ℓ^2, причем

$$\Big(A \sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big\| \sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega \gamma_\omega \Big\|_{\ell^2} \leqslant \Big(B \sum_{\omega\in\Lambda} c_\omega^2\Big)^{1/2}. \tag{10}$$

Действительно, для любого элемента $g \in \ell^2$ имеет место разложение

$$g = g_L + g_{L^\perp},$$

где

$$g_L = \pi_{\ell^2\to L}(g), \qquad g_{L^\perp} = \pi_{\ell^2\to L^\perp}(g).$$

Если

$$g_L = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i v_i, \qquad g_{L^\perp} = \sum_{\nu\in M} \beta_\nu w_\nu,$$

то в силу ортогональности g_L и $g_{L^\perp}$, а также неравенств (7) и (8)

$$\|g\|^2 = \|g_L\|_{\ell^2}^2 + \|g_{L^\perp}\|_{\ell^2}^2 \leqslant B\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu\in M} \beta_\nu^2 \|w_\nu\|_{\ell^2}^2 \leqslant B\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu\in M} \beta_\nu^2\Big),$$

$$\|g\|^2 = \|g_L\|_{\ell^2}^2 + \|g_{L^\perp}\|_{\ell^2}^2 \geqslant A\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu\in M} \beta_\nu^2 \|w_\nu\|_{\ell^2}^2 \geqslant A\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu\in M} \beta_\nu^2\Big),$$

что доказывает (10).

Зафиксировав произвольный порядок на множестве Λ, рассмотрим “матрицу”

$$\widetilde{R} = \{r_{\omega,j} : \omega \in \Lambda,\ j \in \mathbb{N}\},$$

где для всех $\omega \in \Lambda$ и $j \in \mathbb{N}$

$$r_{\omega,j} = \begin{cases} (v_\omega)_j, & \text{если } \omega \in \mathbb{N}, \\ (w_\omega)_j, & \text{если } \omega \in M. \end{cases}$$

Пусть ψ_j, $j = 1, 2, \dots,$ – “j-й столбец матрицы $\widetilde{R}$”, т.е. набор чисел $\{r_{\omega,j} : \omega \in \Lambda\} \subset \ell^2(\Lambda)$. Пусть

$$\pi_0 = \pi_{\ell^2(\Lambda)\to\ell^2(\mathbb{N})}$$

– оператор ортогонального проектирования из гильбертова пространства $\ell^2(\Lambda)$ на его подпространство $\ell^2(\mathbb{N})$. Тогда ясно, что $\pi_0(\psi_j) = \varphi_j$, $j = 1, 2, \dots,$ и нам остается проверить, что система $\{\psi_j\}$ – базис Рисса в $H' = \ell^2(\Lambda)$ и справедливы неравенства (2). Неравенства (10) означают, что для любого элемента $c = \{c_\omega\} \in \ell^2(\Lambda)$ выполнено

$$A\|c\|_{\ell^2(\Lambda)}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (c, \psi_j)^2 \leqslant B\|c\|_{\ell^2(\Lambda)}^2. \tag{11}$$

Из (11) вытекает полнота системы $\{\psi_j\}$ в $\ell^2(\Lambda)$. Далее, для любой последовательности $\rho = \{\rho_j\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ рассмотрим ряд в $\ell^2(\Lambda)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j.$$

Тогда (см. (9))

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j\psi_j\right\|^2_{\ell^2(\Lambda)}=\sum_{\omega\in\Lambda}(\rho,\gamma_\omega)^2. \tag{12}$$

Так как $\Gamma=\{\gamma_\omega\}$ – базис Рисса в ℓ^2 и имеет место (10), то мы можем воспользоваться соотношением (6) и, учитывая (12), получить, что

$$A\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2\leqslant\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j\psi_j\right\|^2_{\ell^2(\Lambda)}\leqslant B\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2.$$

Теорема 1 доказана.

В заключение, пользуясь случаем, сделаем дополнение к теореме 1 нашей недавней заметки [10]. Аналогично [10] могут оцениваться снизу величины

$$\gamma_n(W,\Phi,D)=\sup_{f\in W}\ \inf_{\Lambda_n,\{c_j\}_{j\in\Lambda_n}:(\sum c_j^2)^{1/2}\leqslant D\|f\|}\left\|f-\sum_{j\in\Lambda_n}c_j\varphi_j\right\|_H,$$

где $W\subset H$, $\Phi=\{\varphi_j\}$ – фрейм в H, а Λ_n пробегает семейство всех n-элементных подмножеств $\mathbb{N}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin R., Schaeffer A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 2. P. 341–266. **2**. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск: РХД, 2001. **3**. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. **4**. Наймарк М. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 3. С. 277–318. **5**. Козлов В. Я. // Матем. сб. 1948. Т. 23. № 3. С. 441–474. **6**. Олевский А. М. // Матем. заметки. 1969. Т. 6. С. 737–747. **7**. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999. **8**. Лукашенко Т. П. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 57–72. **9**. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002. **10**. Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 2. С. 312–315.

(Б. С. Кашин) Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
(Т. Ю. Куликова) Научно-исследовательский актуарно-финансовый центр
E-mail: `kashin@mi.ras.ru, koulikt@mi.ras.ru`

Поступило
30.07.2002