# О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой

**Ж. Бургейн, Б. С. Кашин**

**1. Введение и формулировка основного результата.** Установленная в этой заметке теорема по формулировке и методу доказательства может быть отнесена к группе результатов об оценках поперечников, полученных с использованием техники функционального анализа и теории вероятностей. При этом основной причиной для ее рассмотрения была некоторая аналогия с утверждениями, находящими важные приложения в теории чисел (см., например, [1; гл. 3]). Отметим также, что интерес к результатам общего характера о равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой высказывал несколько лет назад Карацуба.

Ниже мы используем обычные обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ – множества действительных и целых чисел соответственно, $\mathbb{C}^N$, $N=1,2,\dots,$ – $N$-мерное комплексное пространство. Для $x=\{x_i\}_{i=1}^N\in\mathbb{C}^N$, $1\leqslant p<\infty$

$$\|x\|_{L_p^N}=\biggl(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N|x_i|^p\biggr)^{1/p},\qquad \|x\|_{L_\infty^N}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}|x_i|.$$

Через $\operatorname{dist}_E(f,L)$ мы обозначаем расстояние от элемента $f$ до множества $L$ в нормированном пространстве $E$; $|\Lambda|$ – число элементов в конечном множестве $\Lambda$. Наконец, $\operatorname{span}(\{\varphi_i\}_{i\in\Lambda})$ – линейная оболочка системы элементов $\{\varphi_i\}_{i\in\Lambda}$ линейного пространства.

Теорема. *Пусть $T\in\mathbb{R}$, $T\geqslant 1$, $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 1$, $T>(\log N)^{10}$ и $\rho\in(0,1)$. Найдется подмножество целых чисел*

$$\Lambda\subset\mathbb{Z}\cap\biggl[0,N\biggl(1+\frac{(\log N)^7}{T}\biggr)\biggr]$$

*такое, что $|\Lambda|\leqslant\rho\min\{N,T\}$ и для любого полинома $f(t)$ вида $f(t)=\sum_{n=0}^N a_n n^{it}$ с*

$$\sum_{n=0}^N|a_n|^2\leqslant 1,\qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^T|f(t)|^2\,dt\leqslant 1$$

*найдется полином $g(t)=\sum_{n\in\Lambda}b_n n^{it}$ с*

$$\sup_{|t|\leqslant T/2}|g(t)-f(t)|\leqslant C[\log(N+T)]^{18}\rho^{-1/2}$$

(*здесь и ниже $C$ – абсолютная постоянная*).

**2. О доказательстве теоремы.** Более тридцати лет назад в теории поперечников было установлено [2], что некоторые $k$-мерные подпространства $\mathbb{R}^N$ очень хорошо аппроксимируют в равномерной метрике евклидов шар в $\mathbb{R}^N$ даже при $N$ гораздо больших $k$. В связи с задачей о тригонометрических поперечниках, введенных в [3], естественно возникает вопрос о существовании таких примеров среди “координатных” подпространств, т.е. в данном случае подпространств, порожденных каким-то набором элементов дискретной тригонометрической системы. Первый результат о существовании “координатных”

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00598-а, 08-01-00799-а, 09-01-12173-офи_м).

тригонометрических подпространств в $\mathbb{R}^N$ размерности $k \leqslant \gamma N$, $\gamma < 1$ – абсолютная постоянная, $N = 2, 3, \dots$, хорошо приближающих в равномерной метрике евклидов шар был получен Бургейном и усовершенствован Талаграном [4]. При этом порядок приближения, доставляемого такими подпространствами, ухудшается лишь на логарифмический множитель по сравнению с подпространствами общего вида. Недавно Гедоном, Мендельсоном, Пажором и Томчак-Ягерманн [5] был получен результат общего характера о существовании "координатных" подпространств малой размерности с хорошими аппроксимационными свойствами, порожденных элементами произвольного равномерно ограниченного ортонормированного базиса в $L_2^N$. Схема доказательства, использованная в [5], применяется и при доказательстве следующего результата.

Предложение. *Пусть задан набор элементов* $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset L_2^N$ *с* $\|\varphi_i\|_{L_\infty^N} \leqslant K$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Для любого* $m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *найдется подмножество* $\Lambda \subset \{1, \dots, n\}$ *такое, что* $|\Lambda| = m$ *и*

$$\sup_{\{a_i\}_{i=1}^n,\, \sum |a_i|^2 \leqslant 1} \operatorname{dist}_{L_\infty^N}\biggl(\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i, \operatorname{span}(\varphi_i, i \in \Lambda)\biggr) \leqslant C \cdot K(\log N)^{7/2}\sqrt{\frac{n}{m}}\,.$$

Отметим, что в приведенном предложении, доказательство которого использует также теорему 6 из [6], отсутствует требование ортогональности системы $\{\varphi_i\}$.

В доказательстве теоремы помимо методов геометрии банаховых пространств используется и техника гармонического анализа.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

**[1]** С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994. **[2]** Б. С. Кашин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351. **[3]** Р. С. Исмагилов, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178. **[4]** M. Talagrand, *Israel J. Math.*, **108** (1998), 173–191. **[5]** O. Guédon, S. Mendelson, A. Pajor, N. Tomczak-Jaegermann, *Positivity*, **11**:2 (2007), 269–283. **[6]** J. Bourgain, A. Pajor, S. J. Szarek, N. Tomczak-Jaegermann, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1376**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 50–63.

Поступило
30.10.2009

**Ж. Бургейн**
Institute for Advanced Study,
School of Mathematics, Princeton
*E-mail*: bourgain@math.ias.edu

**Б. С. Кашин**
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
*E-mail*: kashin@mi.ras.ru