УДК 517.5

Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем

Б. С. Кашин (Москва)

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система функций (О. Н. С), заданных на отрезке $[0, 1]$. Функции Лебега $L_n(t)$ этой системы определяются следующим образом:

$$L_n(t)=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\varphi_k(x)\right|dx. \tag{1}$$

Оценки функций Лебега различных О. Н. С. давно играют важную роль в теории ортогональных рядов (см. подробнее [1], [3]). В этой статье мы коснемся только оценок снизу функций Лебега, ограниченных в совокупности О. Н. С. Первая такая оценка была получена в 1966 г. А. М. Олевским [4], именно им была доказана

Теорема А. *Для любой О. Н. С.* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *ограниченной в совокупности (т. е.* $|\varphi_k(x)|\leqslant M$, $1\leqslant k<\infty$, $x\in[0, 1]$), *справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, L_n(t)=\infty,\quad t\in E,\quad \operatorname{mes} E>c>0.$$

В 1967 г. А. М. Олевский [5] анонсировал, а в 1975 г. опубликовал в книге [3] следующий более сильный результат.

Теорема В. *В предположениях теоремы* А *при* $n=1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$\max_{1\leqslant m\leqslant n}\ln^{-1}n\cdot L_m(t)>c'>0,\quad t\in E_n,\quad \operatorname{mes} E_n>c>0. \tag{2}$$

Метод А. М. Олевского доказательства этих теорем можно назвать прямым, так как он основан только на рассмотрении самой системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

В некотором смысле двойственной к задаче о нетривиальной оценке снизу функций Лебега является задача о построении для данной полной, ограниченной в совокупности О. Н. С. $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f(x)$ ограниченной вариации такой, что $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1\varphi_k(x)f(x)\,dx\right|=\infty$. Эта задача была рассмотрена в 1974 г. С. В. Бочкаревым (см. подробнее [6], [7]), который, в частности, показал, что справедлива

Теорема С. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *полная, ограниченная в совокупности О. Н. С., а функции* $\chi_j^N(x)$ ($1\leqslant j\leqslant N$, $N=2^r$, $r>0$ — *целое*) *определяются равенством*

$$\chi_j^N(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \dfrac{j-1}{N}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{j}{N}, \\ \textit{линейна на} & \left[\dfrac{j-1}{N}, \dfrac{j}{N}\right]. \end{cases}$$

Пусть, далее. $\chi_j^N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^j \varphi_k(x)$. *Тогда*

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^j| > c \ln N. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы С. В. Бочкарева опиралось на свойства системы Хаара, в частности, использовалось следующее неравенство: пусть дан ряд по системе Хаара $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$, при этом $|\delta_n(x)| \leqslant 2^{-n}$, $0 \leqslant n < \infty$, где $\delta_0(x) = a_1 \chi_1(x)$, $\delta_n(x) = \sum_{2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \chi_k(x)$, $n > 0$. Тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x) \right\|_{L^1} \geqslant \frac{1}{8} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta_n^2(x)\, dx. \tag{4}$$

В 1975 г. автором (см. [8]) было предложено доказательство теоремы С, основанное на свойствах матрицы Гильберта. В 1975 г. С. В. Бочкарев применил неравенство (4) для доказательства следующего результата (см. [9]).

Теорема D. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *О. Н. С., ограниченная в совокупности. Тогда для* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} L_n(t) > c' \ln n, \quad t \in E_n, \quad \operatorname{mes} E_n > c' > 0. \tag{5}$$

Ясно, что из (5) следует (2); автором было замечено, что теорему D несложно вывести и из оценки А. М. Олевского (см. [3], [5]): в предположениях теоремы А

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left\| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) \right\|_{L^1} \geqslant c \ln n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В работе [10] С. В. Бочкаревым было показано, что оценка (5) — простое следствие следующего числового неравенства:

для любой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ при $n = 1, 2, \ldots$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k| \left(\sum_{p=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{p} a_k \right| + n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \right) \geqslant B \sum_{j=0}^{N} \sum_{q=2^j+1}^{2^{j+1}} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_q\left(\frac{2k-1}{2^{N+2}}\right) \right]^2, \tag{6}$$

где число N определяется из неравенства $2^{N-1} \leqslant n < 2^N$, а $\{\psi_q(t)\}$ — система Шаудера (см. [1], стр. 63).

Для доказательства неравенства (6) С. В. Бочкаревым использовались оценки типа (4).

В заключении обзора результатов отметим, что недавно А. С. Кранцберг предложил доказательство теоремы D, основанное (так же как и рассуждения в [8]) на свойствах матрицы Гильберта.

В этой статье приводится существенно более простое, чем известные ранее, доказательство сформулированных выше теорем об оценках функций Лебега. Автору принадлежат следующие два простых замечания:

а) Теорема D сразу следует из следующего утверждения: для любых чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k| \left(\sum_{p=1}^n \left| \sum_{k=1}^p a_k \right| \right) > c \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{k=\nu+1}^{\mu} a_k \right)^2}{(\nu-\mu)^2} \tag{7}$$

(отметим, что неравенства (6) и (7), а также способы их применения имеют много общего) *.

б) Неравенство (7) — дискретный вариант следующего соотношения, которое относится к хорошо известному типу мультипликативных оценок производных:

для любой функции $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty) = \mathbf{R}^1$,

$$N^2(f, W_2^{1/2}) \leqslant K \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^1)} \|f'\|_{L^\infty(\mathbf{R}^1)}, \tag{8}$$

где $W_2^{1/2}$ — пространство Соболева (с нормой $\|f\|_{W_2^{1/2}} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^1)} + N(f, W_2^{1/2}))$ и функционал $N(f, W_2^{1/2})$ определяется так:

$$N(f, W_2^{1/2}) = \left(\int_0^\infty \|(\Delta_h f)(x)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^1)} h^{-2} dh \right)^{1/2}, \quad (\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x),$$

а $\|f'\|_{L^\infty} = \sup\limits_{x, h > 0} h^{-1} |(\Delta_h f)(x)|$.

Неравенство (8) аналогично неравенствам Гальярдо — Ниренберга (см. [2], стр. 237). Отличие (8) от неравенства Гальярдо — Ниренберга состоит только в том, что в (8) участвует класс Соболева $W_2^{1/2}$ дробного порядка. В связи с указанной аналогией возникает желание получить для неравенства (8) естественное, с точки зрения теории классов Соболева, доказательство. Такое, очень простое доказательство было дано, по просьбе автора, О. В. Бесовым. Ниже мы приведем его рассуждение.

Перейдем к доказательствам.

1) Вывод неравенства (8) (О. В. Бесов). Не ограничивая общности, считаем, что $\|f'\|_{L^\infty} = 1$. Хорошо известно, что при $1 \leqslant p < \infty$

---

* Неравенство (6) можно вывести из (7).

$$\|f(x)\|^p_{L^p(\mathbf{R}^1)}=p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\lambda(t)\,dt,$$

где $\lambda(t)=\operatorname{mes}\{x:|f(x)|>t\}$. Для каждого $\hbar>0$ определим множества

$$E(\hbar)=\{x:|f(x)|\leqslant\hbar\}\cap\{x:|f(x+\hbar)|\leqslant\hbar\},\quad F(\hbar)=\mathbf{R}^1/E(\hbar).$$

Очевидно, что $\operatorname{mes}F(\hbar)\leqslant 2\lambda(\hbar)$ и что для любых x и $\hbar>0$ выполняются оценки: а) $|(\Delta_\hbar f)\ (x)|\leqslant|f(x)|+|f(x+\hbar)|$, б) $|(\Delta_\hbar f)(x)|\leqslant\hbar$.

Так как $\|(\Delta_\hbar f)(x)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^1)}=\|(\Delta_\hbar f)(x)\|^2_{L^2(E(\hbar))}+\|(\Delta_\hbar f)(x)\|^2_{L^2(F(\hbar))}$, то, оценивая первое слагаемое с помощью а), а второе с помощью б) имеем:

$$\|(\Delta_\hbar f)(x)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^1)}\leqslant 2\int\limits_{E(\hbar)}f^2(x)+f^2(x+\hbar)\,dx+\hbar^2\operatorname{mes}F(\hbar)\leqslant$$

$$\leqslant 4\int\limits_{\{x:|f(x)|\leqslant\hbar\}}f^2(x)\,dx+2\hbar^2\lambda(\hbar)=8\int\limits_0^\hbar t(\lambda(t)-\lambda(\hbar))\,dt+$$

$$+2\hbar^2\lambda(\hbar)\leqslant 8\int\limits_0^\hbar t\lambda(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$N^2(f,W_2^{1/2})\leqslant 8\int\limits_0^\infty\hbar^{-2}\int\limits_0^\hbar t\lambda(t)\,dt\,d\hbar=8\int\limits_0^\infty\int\limits_t^\infty\hbar^{-2}t\lambda(t)\,d\hbar\,dt=8\int\limits_0^\infty\lambda(t)\,dt=8\|f\|_{L^1}.$$

2) Вывод неравенства (7). По данному набору чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ определим на оси непрерывную функцию $f(x)$, положив

$$f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{j}a_k & \text{при } |x-j|\leqslant\dfrac{1}{3},\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 1/3,\\ \text{линейна на } \left[j-\dfrac{2}{3},\ j-\dfrac{1}{3}\right],\ 1\leqslant j\leqslant n,\end{cases}\qquad f(x+n)=f(n-x).$$

Легко видеть, что $\|f'\|_{L^\infty}\leqslant 3\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$, $\|f\|_{L^1}\leqslant B\sum\limits_{p=1}^{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{p}a_k\right|$. Применение неравенства (8) к функции $f(x)$ дает

$$(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|)\sum_{p=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{p}a_k\right|\geqslant cN^2(f,W_2^{1/2})\equiv$$

$$\equiv c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_x^\infty\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right]^2dy\,dx\geqslant c\cdot\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\int\limits_{\nu-\frac13}^{\nu+\frac13}\int\limits_{\mu-\frac13}^{\mu+\frac13}\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right]^2dy\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{c}{9}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{k=\nu+1}^{\mu}a_k\right)^2}{(\nu-\mu)^2}.$$

3) Доказательство теоремы D. Пусть для данного $n>10$ $F_n(t)=\sum_{k=[n/4]}^{[3n/4]}\varphi_k^2(t)$. Из очевидных соотношений $\|F_n(t)\|_{L^1}\geqslant\frac{n}{3}$, $\|F_n(t)\|_{L^\infty}\leqslant M\cdot n$ следует, что $\operatorname{mes} E_n\equiv\operatorname{mes}\{t: F_n(t)>c'n\}>c>0$. Применяя неравенство (7) к набору чисел $\{\varphi_k(x)\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ и интегрируя по x, имеем при $t\in E_n$:

$$\sum_{m=1}^n L_m(t)=\int_0^1\sum_{m=1}^n\left|\sum_{k=1}^m\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dx\geqslant$$

$$\geqslant c'\int_0^1\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=\nu+1}^n|\nu-\mu|^{-2}\left[\sum_{k=\nu+1}^{\mu}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right]^2dx=$$

$$=\sum_{k=1}^n\varphi_k^2(t)\cdot\sum_{\nu,\mu:0\leqslant\nu<k\leqslant\mu\leqslant n}|\nu-\mu|^{-2}\geqslant c\ln n\sum_{k=\left[\frac{n}{4}\right]}^{\left[\frac{3}{4}n\right]}\varphi_k^2(t)\geqslant c'\ln n\cdot n,$$

что и требовалось доказать. В заключение покажем, как из (8) можно получить результаты типа теоремы C. Докажем следующий результат С. В. Бочкарева:

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *— полная О. Н. С., ограниченная в совокупности, тогда*

$$Q=\sum_{k=1}^\infty\int_0^1\left|\int_0^t\varphi_k(x)\,dx\right|dt=\infty.$$

В самом деле, применяя (8) к функции $f_k(t)$, где $f_k(t)=\int_0^t\varphi_k(x)\,dx$ при $0\leqslant t\leqslant 1$; $f_k(t)=0$ при $t<0$ и $f_k(1+t)=f_k(1-t)$, и пользуясь равенством Парсеваля, имеем:

$$Q=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty\|f_k(t)\|_{L^1(R^1)}\geqslant c'\sum_{k=1}^\infty N^2(f_k,W_2^{1/2})\geqslant$$

$$\geqslant c\sum_{k=1}^\infty\int_0^1\int_z^1(y-z)^{-2}\left(\int_z^y\varphi_k(x)\,dx\right)^2dy\,dz=c\int_0^1\int_z^1\frac{1}{y-z}\,dy\,dz=\infty.$$

Аналогично из неравенств, близких к (8), выводится

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *— полная, ограниченная в совокупности О. Н. С. Для любой функции* $\Phi(t)\in C^2(0,\infty)$, $\Phi(0)=\Phi'(0)=0$, $\Phi'(t)>0$ *при* $t>0$; $\Phi'(z)\cdot z^{-1}\downarrow$ *на* $(0,1)$, *для которой* $\int_0^1 t^{-1}\Phi'(t)\,dt=\infty$, *справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^\infty\int_0^1\Phi\left(\left|\int_0^t\varphi_k(x)\,dx\right|\right)dt=\infty.$$

Отметим также такое следствие неравенства $N^2(f, W_2^{1/2}) \leqslant C\|f\|_{L^2}\cdot\|f'\|_{L^2}$.

Теорема 2. *Для любой полной О. Н. С.* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\int_0^t \varphi_k(x)\,dx\right\|_{L^2(0,1)} = \infty.$$

(Поступила в редакцию 13/II 1978 г.)

Литература

1. **С. Качмаж, Г. Штейнгауз,** Теория ортогональных рядов, Москва, Физматгиз, 1958.
2. **О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский,** Интегральные представления функций и теоремы вложения, Москва, изд-во «Наука», 1975.
3. **A. M. Olevski,** Fourier series with Respect to General orthogonal systems, Berlin, Springer-Verlag, 1975.
4. **А. М. Олевский,** Ряды Фурье непрерывных функций по полным ортонормальным системам, Изв. АН СССР, серия матем., **30** (1966), 387—432.
5. **А. М. Олевский,** Ряды Фурье и функции Лебега, Успехи матем. наук, **XXII, вып. 3 (135)** (1967), 237—239.
6. **С. В. Бочкарев,** Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам функций, Матем. сб., **93 (135)** (1974), 203—217.
7. **С. В. Бочкарев,** Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным системам, Матем. заметки, **15,** вып. 3 (1974), 363—370.
8. **Б. С. Кашин,** О коэффициентах разложения одного класса функций по полным системам, Сиб. матем. ж., **18, № 1** (1977), 122—131.
9. **С. В. Бочкарев,** Логарифмический рост средних арифметических от функций Лебега ограниченных ортонормированных систем, ДАН СССР, **223, № 1** (1975), 16—19.
10. **С. В. Бочкарев,** Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы, Матем. сб., **98 (140)** (1975), 436—449.