УДК 519.722

М. Е. Широков

Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I

Изучаются свойства квантовой энтропии и χ-емкости, рассматриваемой как функция множества квантовых состояний, в бесконечномерном случае. Получены условия ограниченности и непрерывности сужения квантовой энтропии на подмножество квантовых состояний, а также условия существования состояния с максимальной энтропией для некоторых подмножеств. Рассмотрено понятие χ-емкости произвольного подмножества квантовых состояний. Показано существование оптимального среднего для любого подмножества с конечной χ-емкостью. Получено достаточное условие существования оптимальной меры и доказано обобщенное свойство максимальной равноудаленности.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена изучению свойств квантовой энтропии и χ-емкости [1], рассматриваемой как функция множества квантовых состояний, в бесконечномерном случае.

Квантовая энтропия – это вогнутая полунепрерывная снизу функция на множестве всех квантовых состояний с областью значений $[0, +\infty]$, однако она может иметь ограниченные и даже непрерывные сужения на некоторые нетривиальные замкнутые подмножества состояний [10], [20]. Проблема описания таких подмножеств состояний возникает в различных приложениях, в частности при определении условий существования оптимальной меры для квантового канала с ограничениями [19]. Также представляет интерес вопрос об условиях существования состояния с максимальной энтропией для множества квантовых состояний с ограниченной энтропией. В настоящей статье рассматриваются эти и некоторые другие вопросы, связанные с понятием квантовой энтропии.

В силу теоремы Холево–Шумахера–Вестморленда [13], [17] χ-емкость множества состояний определяет максимальную скорость безошибочной передачи классической информации, которую можно достичь, используя состояния из этого подмножества в качестве алфавита, при несцепленном кодировании в передатчике и произвольном измерении – декодировании в приемнике. Обычно понятие χ-емкости связывается с понятием квантового канала и носит название χ-*пропускной способности*. Но легко видеть, что χ-пропускная способность канала однозначно определяется выходным множеством этого канала

[1]Эта величина, называемая в зарубежной литературе *the Holevo capacity*, обычно связывается с понятием квантового канала связи (см., например, [17]). В настоящей статье эта величина рассматривается как функция множества квантовых состояний и поэтому называется χ-*емкостью*.

Работа выполнена при поддержке научной программы Отделения математики РАН “Современные проблемы теоретической математики” и РФФИ (проект № 06-01-00164-а).

и поэтому может рассматриваться как функция множества состояний, которую естественно называть χ-*емкостью множества* [14]. Этот подход является удобным, поскольку рассмотрение χ-емкости как функции множества состояний дает определенную гибкость при изучении ее свойств: можно говорить о χ-емкости *произвольного* множества состояний, не обязательно являющегося выходным множеством некоторого канала. С этой точки зрения χ-емкость – это неаддитивная функция множества ("неаддитивная мера"), обладающая многими интересными свойствами, детальное изучение которых представляется полезным для квантовой теории информации.

В § 3 рассмотрены условия ограниченности и непрерывности сужения квантовой энтропии на множества квантовых состояний, а также условия существования состояния с максимальной энтропией для этих множеств (предложения 1, 3, 4, 6 и следствия 1–3). Показано, что квантовая энтропия непрерывна в некотором состоянии по отношению к сходимости, определяемой относительной энтропией, тогда и только тогда, когда это состояние имеет достаточно быстро убывающие собственные значения (предложение 2). Рассмотрены связи между некоторыми свойствами множеств квантовых состояний и соответствующими свойствами так называемых "классических проекций" этих множеств (предложение 5). Полученные результаты показывают, в частности, что разрывность и неограниченность квантовой энтропии в бесконечномерном случае имеют чисто классическую природу (см. замечание 5).

В § 4 рассмотрены определение и основные свойства χ-емкости произвольного множества квантовых состояний. В п. 4.1 вводится понятие оптимального среднего произвольного множества состояний как однозначно определенного состояния, обладающего основными свойствами среднего оптимального ансамбля для множества состояний в конечномерном гильбертовом пространстве (теорема 1 и следствие 4). Свойства оптимального среднего позволили показать, что всякое множество с конечной χ-емкостью предкомпактно (следствие 5) и содержится в максимальном множестве с той же самой χ-емкостью. Из этого наблюдения следует важный результат, связанный с χ-пропускной способностью квантовых каналов: если χ-пропускная способность бесконечномерного канала с ограничением, задаваемым некоторым множеством, конечна, то это множество отображается каналом в предкомпактное множество; в частности, необходимым условием конечности χ-пропускной способности канала без ограничений является предкомпактность его выходного множества (следствие 6). Из полученных результатов, связанных с χ-емкостью, вытекает важное наблюдение о свойствах квантовой энтропии (следствие 7). В п. 4.2 вводится понятие оптимальной меры множества состояний и обобщается на бесконечномерный случай свойство максимальной равноудаленности [14] (предложение 7), из которого следует необходимое условие существования оптимальной меры (следствие 8). Получено достаточное условие существования оптимальной меры (теорема 2).

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ядерных операторов со следовой нормой $\|\cdot\|_1$. *Состоянием* далее называется положительный ядерный оператор ρ в $\mathcal{H}$ с единичным следом: $\rho \geqslant 0$, $\operatorname{Tr}\rho = 1$. Алгебра

$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ обычно называется *алгеброй наблюдаемых квантовой системы*, а состояние задает функционал математического ожидания $A \mapsto \operatorname{Tr} \rho A$, $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. нормальное состояние в смысле теории операторных алгебр [1]. Множество всех состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, которое является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой. Отметим, что сходимость последовательности состояний к *состоянию* в слабой операторной топологии равносильна сходимости этой последовательности к данному состоянию по следовой норме [2]. Мы будем использовать следующий критерий компактности множеств состояний: *замкнутое множество* $\mathcal{K}$ *состояний компактно тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует проектор* P_ε *конечного ранга такой, что* $\operatorname{Tr} \rho P_\varepsilon \geqslant 1 - \varepsilon$ *для всех* $\rho \in \mathcal{K}$ [12], [19].

Пусть A и B – положительные операторы из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Энтропия фон Неймана оператора A и относительная энтропия операторов A и B определяются соответственно выражениями

$$H(A) = -\sum_i \langle i|A \log A|i\rangle, \qquad H(A \,\|\, B) = \sum_i \langle i|A \log A - A \log B + B - A|i\rangle,$$

в которых $\bigl\{|i\rangle\bigr\}$ – базис из собственных векторов оператора A (см. [8], [20]). Энтропия и относительная энтропия являются полунепрерывными снизу функциями своих аргументов со значениями в $[0, +\infty]$, первая из которых вогнута, а вторая выпукла по совокупности аргументов [8], [20]. Отметим также следующее неравенство:

$$H(\rho \,\|\, \sigma) \geqslant \frac{1}{2}\, \|\rho - \sigma\|_1^2, \tag{1}$$

которое имеет место для произвольных состояний ρ и σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [10].

Относительную энтропию $H(\rho \,\|\, \sigma)$ двух состояний ρ и σ можно рассматривать как меру различия этих состояний, классический аналог которой называется *расстоянием Кульбака–Лейблера*. Несмотря на то, что эта мера не является метрикой (она не симметрична и не удовлетворяет аксиоме треугольника), можно ввести понятие сходимости последовательности состояний $\{\rho_n\}$ к некоторому состоянию ρ_*, определяемую условием $\lim_{n \to +\infty} H(\rho_n \,\|\, \rho_*) = 0$. Топология на пространстве состояний, связанная с такой сходимостью, в классическом случае подробно изучалась в [5], где была названа *сильной информационной топологией*. Этот вид сходимости играет важную роль в настоящей статье и будет называться H*-сходимостью*.

Из неравенства (1) следует, что H-сходимость сильнее, чем сходимость, определенная следовой нормой.

Для произвольного множества $\mathcal{A}$ обозначим $\operatorname{co}(\mathcal{A})$ и $\overline{\operatorname{co}}(\mathcal{A})$ его выпуклую оболочку и его выпуклое замыкание соответственно. Множество всех крайних точек множества $\mathcal{A}$ обозначим $\operatorname{Ext}(\mathcal{A})$ [6].

Говоря о непрерывности какой-либо функции на некотором множестве состояний, мы будем иметь в виду непрерывность сужения этой функции на данное множество.

Конечный набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующими вероятностями $\{\pi_i\}$, далее обозначаемый $\{\pi_i, \rho_i\}$, называется (конечным) *ансамблем*, а состояние $\bar{\rho} = \sum_i \pi_i \rho_i$ – *средним* этого ансамбля. В [19] введено понятие *обобщенного ансамбля* как произвольной вероятностной борелевской меры μ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Средним обобщенного ансамбля (меры) μ называется состояние [2], определяемое интегралом Бохнера:

$$\bar{\rho}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \rho\mu(d\rho).$$

Обычное понятие ансамбля соответствует мерам с конечным носителем.

Множество всех вероятностных мер на замкнутом множестве состояний $\mathcal{A}$ обозначим $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ [11].

Далее в статье произвольный ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ будем рассматривать как частный случай вероятностной меры. В частности, под выпуклой комбинацией ансамблей будем понимать выпуклую комбинацию соответствующих этим ансамблям мер.

Рассмотрим функционалы

$$\chi(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H\bigl(\rho \,\|\, \bar{\rho}(\mu)\bigr)\mu(d\rho), \qquad \widehat{H}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho)\mu(d\rho).$$

В [19, предложение 1 и доказательство теоремы] показано, что оба эти функционала корректно определены и полунепрерывны снизу на $\mathcal{P}\bigl(\mathfrak{S}(\mathcal{H})\bigr)$, причем

$$\chi(\mu) = H\bigl(\bar{\rho}(\mu)\bigr) - \widehat{H}(\mu) \tag{2}$$

для любой меры μ такой, что $H\bigl(\bar{\rho}(\mu)\bigr) < +\infty$.

Если $\mu = \{\pi_i, \rho_i\}$, то

$$\chi\bigl(\{\pi_i, \rho_i\}\bigr) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i H(\rho_i \,\|\, \bar{\rho}), \qquad \widehat{H}\bigl(\{\pi_i, \rho_i\}\bigr) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i H(\rho_i).$$

Мы будем использовать тождество Дональда [3], [10]

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i H(\rho_i \,\|\, \hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i H(\rho_i \,\|\, \bar{\rho}) + H(\bar{\rho} \,\|\, \hat{\rho}), \tag{3}$$

которое имеет место для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ из n состояний со средним $\bar{\rho}$ и произвольного состояния $\hat{\rho}$.

Мы также будем использовать обобщенную интегральную версию тождества Дональда [19]

$$\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho \,\|\, \hat{\rho})\mu(d\rho) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H\bigl(\rho \,\|\, \bar{\rho}(\mu)\bigr)\mu(d\rho) + H\bigl(\bar{\rho}(\mu) \,\|\, \hat{\rho}\bigr), \tag{4}$$

которая имеет место для любой вероятностной меры μ с барицентром $\bar{\rho}(\mu)$ и произвольного состояния $\hat{\rho}$.

Используя обобщенное тождество Дональда (4), нетрудно доказать следующее свойство функционала $\chi(\mu)$.

Лемма 1. *Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^m$ – конечное множество вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ – распределение вероятностей. Тогда*

$$\chi\biggl(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_k\biggr) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \chi(\mu_k) + \chi\bigl(\bigl\{\lambda_k, \bar{\rho}(\mu_k)\bigr\}_{k=1}^m\bigr).$$

---

[2] Такое состояние также называется *барицентром* меры μ.

В случае $m=2$ *для любого* $\lambda\in[0,1]$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\chi\bigl(\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2\bigr)\geqslant\lambda\chi(\mu_1)+(1-\lambda)\chi(\mu_2)+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\,\bigl\|\bar\rho(\mu_2)-\bar\rho(\mu_1)\bigr\|_1^2.$$

Доказательство. Пусть $\mu=\sum_{k=1}^m\lambda_k\mu_k$. По определению

$$\chi(\mu)=\sum_{k=1}^m\lambda_k\int_{\mathfrak S(\mathcal H)}H\bigl(\rho\,\|\,\bar\rho(\mu)\bigr)\mu_k(d\rho).$$

Применяя обобщенное тождество Дональда (4) к каждому интегралу в правой части данного выражения, получаем основное тождество леммы.

Для доказательства неравенства в случае $m=2$ достаточно использовать неравенство (1) для оценки снизу последнего слагаемого в правой части основного тождества леммы:

$$\begin{aligned}
&\lambda H\bigl(\bar\rho(\mu_1)\,\|\,\lambda\bar\rho(\mu_1)+(1-\lambda)\bar\rho(\mu_2)\bigr)+(1-\lambda)H\bigl(\bar\rho(\mu_2)\,\|\,\lambda\bar\rho(\mu_1)+(1-\lambda)\bar\rho(\mu_2)\bigr)\\
&\qquad\geqslant\frac12\,\lambda\bigl\|(1-\lambda)\bigl(\bar\rho(\mu_2)-\bar\rho(\mu_1)\bigr)\bigr\|_1^2+\frac12\,(1-\lambda)\bigl\|\lambda\bigl(\bar\rho(\mu_2)-\bar\rho(\mu_1)\bigr)\bigr\|_1^2\\
&\qquad=\frac12\,\lambda(1-\lambda)\bigl\|\bar\rho(\mu_2)-\bar\rho(\mu_1)\bigr\|_1^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что из леммы 1 следует важное неравенство

$$H\bigl(\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2\bigr)\geqslant\lambda H(\rho_1)+(1-\lambda)H(\rho_2)+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\,\|\rho_2-\rho_1\|_1^2,\tag{5}$$

которое имеет место для любых состояний ρ_1 и ρ_2. Для его доказательства достаточно рассмотреть спектральные разложения этих состояний как вероятностные меры на $\mathfrak S(\mathcal H)$ и применить лемму 1.

§ 3. О свойствах квантовой энтропии

В настоящем параграфе рассмотрены свойства сужения квантовой энтропии на множества квантовых состояний.

Пусть $\mathcal A$ – множество квантовых состояний такое, что $\sup_{\rho\in\mathcal A}H(\rho)<+\infty$. Если существует состояние, на котором достигается данная точная верхняя грань, то такое состояние будем называть *состоянием с максимальной энтропией для множества* $\mathcal A$. Обозначим это состояние $\Gamma(\mathcal A)$. Из неравенства (5) вытекает следующее простое наблюдение.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal A$ *– произвольное выпуклое замкнутое множество состояний такое, что* $\sup_{\rho\in\mathcal A}H(\rho)<+\infty$. *Любая последовательность* $\{\rho_n\}$ *состояний из* $\mathcal A$ *такая, что*

$$\lim_{n\to+\infty}H(\rho_n)=\sup_{\rho\in\mathcal A}H(\rho),$$

сходится[3] *к однозначно определенному состоянию* $\rho_*(\mathcal A)$ *из* $\mathcal A$.

[3] Используя [16, предложение 1 и лемма 1] для случая тождественного канала Φ, можно получить более сильную версию леммы 2, а именно доказать H-сходимость последовательности $\{\rho_n\}$ к состоянию $\rho_*(\mathcal A)=\Omega(\Phi,\mathcal A)$, которая вместе с приведенным ниже предложением 2 показывает, что $\rho_*(\mathcal A)=\Gamma(\mathcal A)$, если существует $\lambda<1$ такое, что $\operatorname{Tr}\bigl(\rho_*(\mathcal A)\bigr)^\lambda<+\infty$.

Если состояние с максимальной энтропией $\Gamma(\mathcal{A})$ *существует, то оно совпадает с состоянием* $\rho_*(\mathcal{A})$, *а сужение энтропии на множество* $\mathcal{A}$ *непрерывно в состоянии* $\Gamma(\mathcal{A})$.

Доказательство. По предположению для произвольного $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $H(\rho_n) > \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho) - \varepsilon$ для всех $n \geqslant N_\varepsilon$. Используя неравенство (5) при $\lambda = 1/2$, получаем

$$\sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,H(\rho_{n_1}) + \frac{1}{2}\,H(\rho_{n_2})$$
$$\leqslant H\biggl(\frac{1}{2}\,\rho_{n_1} + \frac{1}{2}\,\rho_{n_2}\biggr) - \frac{1}{8}\,\|\rho_{n_2} - \rho_{n_1}\|_1^2 \leqslant \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho) - \frac{1}{8}\,\|\rho_{n_2} - \rho_{n_1}\|_1^2$$

и, следовательно, $\|\rho_{n_2} - \rho_{n_1}\|_1 < \sqrt{8\varepsilon}$ для всех $n_1 \geqslant N_\varepsilon$ и $n_2 \geqslant N_\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{\rho_n\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому состоянию ρ_* из $\mathcal{A}$. Нетрудно видеть, что это состояние ρ_* не зависит от выбора последовательности $\{\rho_n\}$, а определяется только множеством $\mathcal{A}$. Обозначим это состояние $\rho_*(\mathcal{A})$.

Если состояние с максимальной энтропией $\Gamma(\mathcal{A})$ существует, то в силу приведенных выше рассуждений оно совпадает с состоянием $\rho_*(\mathcal{A})$. Из определения состояния $\Gamma(\mathcal{A})$ и полунепрерывности снизу квантовой энтропии следует утверждение о непрерывности. Лемма доказана.

Из полунепрерывности снизу энтропии следует, что

$$H\bigl(\rho_*(\mathcal{A})\bigr) \leqslant \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho),$$

причем существование состояния с максимальной энтропией равносильно выполнению равенства в этом неравенстве. Примеры множеств, для которых это равенство не выполнено, рассмотрены в предложениях 1 и 3. Возможное отсутствие равенства в данном неравенстве в классическом случае и его следствия подробно рассматривались в [4], где такая ситуация названа эффектом "потери энтропии" ("entropy loss").

Следуя работе [19], неограниченный оператор H в $\mathcal{H}$ с дискретным спектром конечной кратности будем называть $\mathfrak{H}$-*оператором*. Пусть Q_n – спектральный проектор оператора H, соответствующий его n наименьшим собственным значениям. Следуя работе [18], обозначим

$$\operatorname{Tr}\rho H = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr}\rho Q_n H, \tag{6}$$

где последовательность в правой части является неубывающей. В работах [18], [19] показано, что любое компактное множество состояний $\mathcal{K}$ содержится в выпуклом компактном множестве $\mathcal{K}_{H,h} = \bigl\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr}\rho H \leqslant h\bigr\}$, определяемом некоторым $\mathfrak{H}$-оператором H и положительным числом h. Пусть $h_{\mathrm{m}}(H)$ – минимальное собственное значение H, а $\mathcal{H}_{\mathrm{m}}(H)$ – соответствующее (конечномерное) собственное подпространство.

Заметим, что $\mathcal{K}_{H,h}$ есть пустое множество, если $h < h_{\mathrm{m}}(H)$, $\mathcal{K}_{H,h} = \mathfrak{S}\bigl(\mathcal{H}_{\mathrm{m}}(H)\bigr)$, если $h = h_{\mathrm{m}}(H)$, и $\mathcal{K}_{H,h}$ содержит состояния бесконечного ранга, если $h > h_{\mathrm{m}}(H)$.

Как показано в следующем предложении, свойства сужения квантовой энтропии на множество $\mathcal{K}_{H,h}$ зависят от *коэффициента роста* $\mathrm{g}(H)$ $\mathfrak{H}$*-оператора* H, определяемого следующим образом:

$$\mathrm{g}(H) = \inf\bigl\{\lambda > 0 \mid \operatorname{Tr}\exp(-\lambda H) < +\infty\bigr\},$$

причем предполагается, что $\mathrm{g}(H) = +\infty$, если $\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H) = +\infty$ для всех $\lambda > 0$.

Известно [10], [20], что при условии $\mathrm{g}(H) = 0$ энтропия непрерывна на компактном множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ и достигает своего (конечного) максимума в состоянии $\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$ вида $\bigl(\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H)\bigr)^{-1}\exp(-\lambda H)$. Следующее предложение обобщает это наблюдение и дает необходимое и достаточное условие существования состояния с максимальной энтропией для множества $\mathcal{K}_{H,h}$.

Пусть $h_*(H) = \frac{\operatorname{Tr} H\exp(-\mathrm{g}(H)H)}{\operatorname{Tr}\exp(-\mathrm{g}(H)H)}$, если $\operatorname{Tr}\exp\bigl(-\mathrm{g}(H)H\bigr) < +\infty$, и $h_*(H) = +\infty$ в противном случае.

Предложение 1. *Пусть* H – $\mathfrak{H}$*-оператор в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *и* h – *положительное число такое, что* $h > h_{\mathrm{m}}(H)$.

1) *Квантовая энтропия ограничена на множестве* $\mathcal{K}_{H,h}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{g}(H) < +\infty$.

2) *Квантовая энтропия непрерывна на множестве* $\mathcal{K}_{H,h}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{g}(H) = 0$.

3) *Если* $h \leqslant h_*(H)$, *то* $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \lambda^* h + \log\operatorname{Tr}\exp(-\lambda^* H)$, *где* $\lambda^* = \lambda^*(H,h) \geqslant \mathrm{g}(H)$ – *единственное решение уравнения*

$$\operatorname{Tr} H\exp(-\lambda H) = h\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H),$$

и существует состояние с максимальной энтропией

$$\Gamma(\mathcal{K}_{H,h}) = \bigl(\operatorname{Tr}\exp(-\lambda^* H)\bigr)^{-1}\exp(-\lambda^* H).$$

Если $h > h_*(H)$, *то* $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \mathrm{g}(H)h + \log\operatorname{Tr}\exp\bigl(-\mathrm{g}(H)H\bigr)$ *и в* $\mathcal{K}_{H,h}$ *не существует состояния с максимальной энтропией. В обоих случаях* $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \inf_{\lambda\in(\mathrm{g}(H),+\infty)}\bigl(\lambda h + \log\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H)\bigr)$.

Функция $F_H(h) = \sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ *обладает следующими свойствами*:

i) *является непрерывной возрастающей функцией на* $[h_{\mathrm{m}}, +\infty)$ *такой, что* $F_H(h_{\mathrm{m}}) = \log\dim\mathcal{H}_{\mathrm{m}}(H)$ *и* $\lim_{h\to+\infty} F_H(h) = +\infty$;

ii) *имеет непрерывную производную на* $(h_{\mathrm{m}}, +\infty)$:

$$\frac{dF_H(h)}{dh} = \begin{cases} \lambda^*(H,h), & h \in \bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr), \\ \mathrm{g}(H), & h \in \bigl[h_*(H), +\infty\bigr), \end{cases}$$

$$\frac{dF_H(h)}{dh}\bigg|_{h=h_{\mathrm{m}}+0} = \lim_{h\to h_{\mathrm{m}}(H)+0}\frac{dF_H(h)}{dh} = +\infty, \qquad \lim_{h\to+\infty}\frac{dF_H(h)}{dh} = \mathrm{g}(H);$$

iii) *строго вогнута на* $\bigl[h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$ *и линейна на* $\bigl[h_*(H), +\infty\bigr)$, *если* $h_*(H) < +\infty$.

В ч. II настоящей работы, которая будет опубликована в следующем номере журнала, на рис. 2 представлены, наряду с другими характеристиками, результаты вычисления $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ как функции параметра $h = c$ для $\mathfrak{H}$-оператора $H = -\log\sigma$ с конечным $h_*(H)$.

Доказательство. Пусть $H=\sum_{k=1}^{+\infty}h_k|k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$ и $\{h_k\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Пусть $d=\dim\mathcal{H}_{\mathrm{m}}(H)$; тогда $h_k=h_{\mathrm{m}}$, $k=\overline{1,d}$, и $\{|k\rangle\}_{k=1}^{d}$ – базис подпространства $\mathcal{H}_{\mathrm{m}}(H)$.

Докажем утверждение 1) предложения.

Предположим, что $\mathrm{g}(H)<+\infty$. Тогда существует $\lambda>0$ такое, что

$$\sigma=\bigl(\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H)\bigr)^{-1}\exp(-\lambda H)$$

– состояние. Используя неотрицательность относительной энтропии и определение множества $\mathcal{K}_{H,h}$, получаем

$$H(\rho)=\lambda\operatorname{Tr}\rho H+\log\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H)-H(\rho\,\|\,\sigma)\leqslant\lambda h+\log\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H)<+\infty$$

для всех ρ из $\mathcal{K}_{H,h}$, т.е. ограниченность энтропии на $\mathcal{K}_{H,h}$.

Предположим, что $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}}H(\rho)<+\infty$. Покажем, что уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}h_k\exp(-\lambda h_k)=h\sum_{k=1}^{n}\exp(-\lambda h_k) \tag{7}$$

имеет единственное положительное решение λ_n для всех достаточно больших n и что последовательность $\{\lambda_n\}$ является возрастающей. Уравнение (7) равносильно уравнению $f_n(\lambda)=0$, где $f_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}(h_k-h)\exp\bigl(-\lambda(h_k-h)\bigr)$. Поскольку

$$f_n'(\lambda)=-\sum_{k=1}^{n}(h_k-h)^2\exp\bigl(-\lambda(h_k-h)\bigr)<0,$$

функция $f_n(\lambda)$ строго убывает на $[0,+\infty)$. Нетрудно видеть, что

$$f_n(0)=\sum_{k=1}^{n}h_k-nh,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}f_n(\lambda)=-\infty,\qquad h>h_{\mathrm{m}}.$$

Поскольку последовательность $\{h_k\}$ неубывающая и неограниченная, для всех достаточно больших n имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{n}h_k>nh$, и из сказанного выше следует существование единственного решения λ_n уравнения $f_n(\lambda)=0$. Для доказательства того, что $\lambda_{n+1}>\lambda_n$, достаточно заметить, что $f_{n+1}(\lambda)>f_n(\lambda)$ для всех λ из $[0,+\infty)$ и для всех n таких, что $h_n>h$.

Для каждого достаточно большого n рассмотрим состояние

$$\rho_n=\biggl(\sum_{k=1}^{n}\exp(-\lambda_n h_k)\biggr)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\exp(-\lambda_n h_k)|k\rangle\langle k| \tag{8}$$

из $\mathcal{K}_{H,h}$. Это состояние есть точка максимума функции $H(\rho)$ на подмножестве $\mathcal{K}_{H,h}^{n}$ множества $\mathcal{K}_{H,h}$, состоящего из состояний, носитель которых лежит внутри линейной оболочки векторов $\{|k\rangle\}_{k=1}^{n}$. Действительно, используя неотрицательность относительной энтропии и определение состояния ρ_n, легко видеть, что

$$H(\rho)=\lambda_n\operatorname{Tr}\rho H+\log\sum_{k=1}^{n}\exp(-\lambda_n h_k)-H(\rho\,\|\,\rho_n)\leqslant\lambda_n h+\log\sum_{k=1}^{n}\exp(-\lambda_n h_k)$$

для всех ρ из $\mathcal{K}^n_{H,h}$ и что выполнение равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_n$. Используя это наблюдение и монотонность логарифма, получаем

$$H(\rho_n) = \lambda_n h + \log \sum_{k=1}^{n} \exp(-\lambda_n h_k) \geqslant \lambda_n (h - h_{\mathrm{m}}). \tag{9}$$

Поскольку $h > h_{\mathrm{m}}$, предположение $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) < +\infty$ гарантирует ограниченность последовательности $\{\lambda_n\}$, а значит, в силу упомянутой выше монотонности этой последовательности существует $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda^* < +\infty$. Поскольку $\lambda_n \leqslant \lambda^*$ для всех n, из равенства в (9) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \exp(-\lambda^* h_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \exp(-\lambda_n h_k) < \exp\Bigl(\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)\Bigr) < +\infty \tag{10}$$

для всех n, и поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) < +\infty. \tag{11}$$

Таким образом, доказано, что $\mathrm{g}(H) \leqslant \lambda^* < +\infty$.

Поскольку $\mathcal{K}_{H,h} = \overline{\bigcup_n \mathcal{K}^n_{H,h}}$ и $\sup_{\rho\in\mathcal{K}^n_{H,h}} H(\rho) = H(\rho_n)$, из полунепрерывности снизу энтропии следует, что

$$\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n).$$

В силу леммы 2 последовательность состояний $\{\rho_n\}$ сходится к состоянию $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$. Поскольку $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda^*$, последовательность

$$\biggl\{A_n = \sum_{k=1}^{n} \exp(-\lambda_n h_k) |k\rangle\langle k|\biggr\}_n$$

операторов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ сходится к оператору $A_* = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda^* h_k)|k\rangle\langle k|$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в слабой операторной топологии. Комбинируя эти наблюдения, нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Tr} A_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \exp(-\lambda_n h_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) = \operatorname{Tr} A_*, \tag{12}$$

$$\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}) = \lim_{n\to+\infty} \rho_n = \biggl(\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k)\biggr)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k)|k\rangle\langle k|. \tag{13}$$

Используя (9) и (12), получаем

$$\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = h\lambda^* + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k). \tag{14}$$

Из полунепрерывности снизу энтропии следует, что

$$H\bigl(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})\bigr) = \lambda^* \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda^* h_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k)} + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) \leqslant \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n).$$

Учитывая (14), заключаем, что это неравенство равносильно неравенству

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda^* h_k) \leqslant h \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) \tag{15}$$

и что в случае выполнения равенства в этих неравенствах $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}) = \Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$. Обратно, если существует состояние $\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$, то оно в силу леммы 2 совпадает с $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$ и, следовательно, имеет место равенство в (15). Таким образом, существование состояния $\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$ равносильно выполнению равенства в (15). Поэтому для завершения доказательства утверждения 1) предложения достаточно показать, что неравенство $h \leqslant h_*(H)$ равносильно равенству в (15).

Покажем сначала, что из неравенства $\lambda^* > \mathrm{g}(H)$ следует равенство в (15). Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h) \exp\bigl(-\lambda(h_k - h)\bigr).$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} h_k^p \exp(-\lambda h_k)$ сходится равномерно на $\bigl[\mathrm{g}(H) + \varepsilon, +\infty\bigr)$ для любого $p \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, функция $f(\lambda)$ имеет непрерывную производную $f'(\lambda) = -\sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h)^2 \exp\bigl(-\lambda(h_k - h)\bigr) < 0$ на интервале $\bigl(\mathrm{g}(H), +\infty\bigr)$. По построению $f(\lambda_n) > f_n(\lambda_n) = 0$ для всех достаточно больших n. Поэтому из непрерывности функции $f(\lambda)$ в точке $\lambda^* \in \bigl(\mathrm{g}(H), +\infty\bigr)$ следует, что $f(\lambda^*) \geqslant 0$. Поскольку (15) равносильно обратному неравенству, получаем $f(\lambda^*) = 0$, т. е. выполнено равенство в (15).

Если $h < h_*(H)$, то $f\bigl(\mathrm{g}(H)\bigr) > 0$ (допуская случай $f\bigl(\mathrm{g}(H)\bigr) = +\infty$). Поскольку (15) означает, что $f(\lambda^*) \leqslant 0$, получаем $\lambda^* > \mathrm{g}(H)$ и в силу приведенного выше наблюдения имеем $f(\lambda^*) = 0$.

Если $h = h_*(H)$, то $f\bigl(\mathrm{g}(H)\bigr) = 0$ и, следовательно, $\lambda^* = \mathrm{g}(H)$. Действительно, если $\lambda^* > \mathrm{g}(H)$, то из приведенного выше наблюдения вытекает, что $f(\lambda^*) = 0 = f\bigl(\mathrm{g}(H)\bigr)$ вопреки строгому убыванию функции $f(\lambda)$.

Если $h > h_*(H)$, то $f\bigl(\mathrm{g}(H)\bigr) < 0$. Поскольку функция $f(\lambda)$ убывающая, то $f(\lambda^*) < 0$ и, следовательно, имеет место строгое неравенство в (15).

Докажем утверждение 2) предложения. Если $\mathrm{g}(H) = 0$, то энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ в силу наблюдения из [20]. Это также следует из импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в приведенном ниже предложении 4.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим последовательность состояний

$$\sigma_n = (1 - q_n)|1\rangle\langle 1| + \frac{q_n}{n} \sum_{k=2}^{n+1} |k\rangle\langle k|,$$

определяемую сходящейся к нулю последовательностью положительных чисел

$$q_n = (h - h_{\mathrm{m}}) \biggl(n^{-1} \sum_{k=2}^{n+1} h_k - h_{\mathrm{m}}\biggr)^{-1}.$$

Здесь предполагается, что n настолько большое, что $q_n \leqslant 1$. Поскольку последовательность $\{\sigma_n\}$ лежит в $\mathcal{K}_{H,h}$ и сходится к чистому состоянию $|1\rangle\langle 1|$, из предполагаемой непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ следует сходимость к нулю последовательности положительных чисел

$$H(\sigma_n) = h_2(q_n) + q_n \log n = h_2(q_n) + \frac{(h - h_{\mathrm{m}}) \log n}{n^{-1} \sum_{k=2}^{n+1} h_k - h_{\mathrm{m}}}\,.$$

В силу очевидной оценки $n^{-1}\sum_{k=2}^{n+1} h_k \leqslant h_{n+1}$ заключаем, что последовательность $\{\nu_n = h_{n+1}^{-1}\log n\}$ сходится к нулю. Поэтому для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H) = \sum_{n=0}^{+\infty}\exp(-\lambda h_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\lambda}{\nu_n}} < +\infty$$

и, следовательно, $\mathrm{g}(H) = 0$.

Общее выражение для $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ выводится из предыдущих наблюдений и замечания, что нижняя грань в этом выражении достигается при $\lambda = \lambda^*$, если $h \leqslant h_*(H)$, и при $\lambda = \mathrm{g}(H)$, если $h \geqslant h_*(H)$.

Доказательство свойств функции $F_H(\rho)$ основано на теореме о неявной функции и представлено в § 5.

Пусть σ – произвольное состояние. Далее существенную роль будет играть *коэффициент убывания* $\mathrm{d}(\sigma)$ *состояния* σ, определяемый следующим образом:

$$\mathrm{d}(\sigma) = \inf\bigl\{\lambda > 0 \mid \operatorname{Tr}\sigma^\lambda < +\infty\bigr\} \in [0,1].$$

Если σ – состояние полного ранга, то $-\log\sigma$ – $\mathfrak{H}$-оператор и $\mathrm{d}(\sigma) = \mathrm{g}(-\log\sigma)$.

Нетрудно видеть, что из $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ следует $H(\sigma) < +\infty$, но существуют состояния σ с конечной энтропией такие, что $\mathrm{d}(\sigma) = 1$ (например, состояние со спектром $\bigl\{a\bigl((k+1)\log^3(k+1)\bigr)^{-1}\bigr\}$, где a – нормировочный коэффициент). Особая роль этих состояний показана в следующем предложении, которое является некоммутативным обобщением теоремы 21 из работы [5], где классическое состояние – распределение вероятностей σ – называется *гиперболическим*, если $\mathrm{d}(\sigma) = 1$, и *power dominated*, если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть σ – состояние с конечной энтропией.*

1) *Если* $\mathrm{d}(\sigma) < 1$, *то*

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\sigma)$$

для любой последовательности состояний $\{\rho_n\}$, H-сходящейся[4] *к состоянию σ.*

2) *Если $\mathrm{d}(\sigma) = 1$, то для любого $h \geqslant H(\sigma)$ существует последовательность $\{\rho_n\}$ состояний конечного ранга, H-сходящаяся к состоянию σ, такая, что*

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = h.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение 2 показывает, что выпуклое множество состояний $\bigl\{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid \mathrm{d}(\sigma) < 1\bigr\}$ является максимальным множеством непрерывности энтропии по отношению к H-сходимости.

Доказательство предложения 2 основано на следующей лемме.

ЛЕММА 3. *Если σ – состояние с $\mathrm{d}(\sigma) < 1$, то для любого состояния ρ такого, что $H(\rho\,\|\,\sigma) < +\infty$, энтропия $H(\rho)$ конечна и для любого $\lambda > \mathrm{d}(\sigma)$ справедливо следующее равенство*:

$$H\bigl(\rho\,\|\,(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda)^{-1}\sigma^\lambda\bigr) = \lambda H(\rho\,\|\,\sigma) + \log\operatorname{Tr}\sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\rho).$$

Если $\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)} < +\infty$, то это равенство справедливо и для $\lambda = \mathrm{d}(\sigma)$.

[4] Это значит, что $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n\,\|\,\sigma) = 0$.

Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ – возрастающая последовательность спектральных проекторов состояния σ. При каждом n для положительных ядерных операторов $A_n = P_n\rho P_n$ и $B_n = P_n\sigma$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}H(A_n \,\|\, B_n^\lambda) &= \operatorname{Tr}(A_n \log A_n - A_n \log B_n^\lambda + B_n^\lambda - A_n)\\ &= \operatorname{Tr}\big(\big(\lambda + (1-\lambda)\big)A_n \log A_n - \lambda A_n \log B_n + B_n^\lambda - A_n\big)\\ &= \lambda H(A_n \,\|\, B_n) + \operatorname{Tr} B_n^\lambda - \lambda \operatorname{Tr} B_n - (1-\lambda)\operatorname{Tr} A_n - (1-\lambda)\operatorname{Tr} A_n(-\log A_n).\end{aligned}$$

Поскольку $B_n^\lambda = P_n\sigma^\lambda$, из [8, лемма 4] следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Tr} A_n(-\log A_n) = H(\rho), \qquad \lim_{n\to+\infty} H(A_n \,\|\, B_n^\lambda) = H(\rho \,\|\, \sigma^\lambda)$$

для всех $\lambda > \mathrm{d}(\sigma)$. Поэтому, переходя к пределу при $n \to +\infty$ в предыдущем равенстве, получаем

$$H(\rho \,\|\, \sigma^\lambda) = \lambda H(\rho \,\|\, \sigma) + \operatorname{Tr} \sigma^\lambda - 1 - (1-\lambda)H(\rho).$$

Таким образом, из конечности $H(\rho \,\|\, \sigma)$ следует конечность $H(\rho)$ и $H(\rho \,\|\, \sigma^\lambda)$ для всех $\lambda > \mathrm{d}(\sigma)$. Замечая, что

$$H\big(\rho \,\|\, (\operatorname{Tr}\sigma^\lambda)^{-1}\sigma^\lambda\big) = H(\rho \,\|\, \sigma^\lambda) + \log \operatorname{Tr}\sigma^\lambda - \operatorname{Tr}\sigma^\lambda + 1,$$

получаем равенство леммы.

Доказательство предложения 2. Пусть $\mathrm{d}(\sigma) < 1$. В силу леммы 3

$$\frac{H\big(\rho_n \,\|\, (\operatorname{Tr}\sigma^\lambda)^{-1}\sigma^\lambda\big) - \lambda H(\rho_n \,\|\, \sigma)}{1-\lambda} = \frac{\log \operatorname{Tr}\sigma^\lambda}{1-\lambda} - H(\rho_n) \tag{16}$$

для всех $\lambda > \mathrm{d}(\sigma)$. Предположим, что $\liminf_{n\to+\infty} H(\rho_n) - H(\sigma) = \Delta > 0$. Поскольку первое слагаемое в правой части (16) стремится к $H(\sigma)$ при $\lambda \to 1$, существует $\lambda' < 1$ такое, что правая часть (16) меньше, чем $-\Delta/2$, при $\lambda = \lambda'$ и всех достаточно больших n, в то время как левая часть (16) в силу неотрицательности относительной энтропии не меньше выражения $-\frac{\lambda' H(\rho_n \,\|\, \sigma)}{1-\lambda'}$, которое стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Пусть $\mathrm{d}(\sigma) = 1$ и $h > H(\sigma)$. Без ограничения общности можно считать, что σ – состояние полного ранга такое, что $-\log\sigma$ – $\mathfrak{H}$-оператор с $\mathrm{g}(-\log\sigma) = \mathrm{d}(\sigma) = 1$ и $h_*(-\log\sigma) = H(\sigma) < +\infty$. Из предложения 1 следует, что $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{-\log\sigma,h}} H(\rho) = h$ для всех $h > h_*(-\log\sigma)$. Для данного $h > h_*(-\log\sigma)$ в доказательстве предложения 1 построена последовательность $\{\rho_n\}$ состояний, определенных формулой (8), которая сходится к состоянию $\rho_*(\mathcal{K}_{-\log\sigma,h}) = \sigma$, определенному формулой (13). По построению

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = \sup_{\rho\in\mathcal{K}_{-\log\sigma,h}} H(\rho) = h, \qquad \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n \,\|\, \sigma) = 0.$$

Предложение доказано.

Рассмотрим множество $\mathcal{V}_{\sigma,c} = \big\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid H(\rho \,\|\, \sigma) \leqslant c\big\}$, определяемое состоянием σ и неотрицательным числом c. В силу свойств относительной энтропии множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ является непустым замкнутым и выпуклым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ для любых σ и c. Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ можно рассматривать как

c-псевдоокрестность состояния σ относительно псевдометрики, определяемой относительной энтропией. В следующем параграфе будет показано, что это множество играет особую роль в вопросах, связанных с понятием χ-емкости множества состояний.

Пусть $c_*(\sigma) = H\big(\big(\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}\big)^{-1}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)} \,\|\, \sigma\big)$, если $\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)} < +\infty$, и $c_*(\sigma) = +\infty$ в противном случае. Свойства сужения энтропии на множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, а также необходимые и достаточные условия существования состояния с максимальной энтропией для этого множества рассмотрены в следующем предложении.

Предложение 3. *Пусть σ – произвольное состояние $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и c – положительное число.*

1) *Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ является компактным выпуклым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

2) *Квантовая энтропия ограничена на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{d}(\sigma) < 1$.*

3) *Квантовая энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{d}(\sigma) = 0$.*

4) *Если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ и $c \leqslant c_*(\sigma)$, то $\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = \frac{\lambda^* c + \log\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda^*}}{1-\lambda^*}$, где $\lambda^* = \lambda^*(\sigma,c) \geqslant \mathrm{d}(\sigma)$ – единственное решение уравнения*[5]

$$(\lambda-1)\operatorname{Tr}(\sigma^\lambda\log\sigma) = (c + \log\operatorname{Tr}\sigma^\lambda)\operatorname{Tr}\sigma^\lambda,$$

и существует состояние с максимальной энтропией $\Gamma(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = (\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda^*})^{-1}\sigma^{\lambda^*}$. Если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ и $c > c_*(\sigma)$, то $\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = \frac{\mathrm{d}(\sigma)c + \log\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}}{1-\mathrm{d}(\sigma)}$ и в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ не существует состояния с максимальной энтропией. В обоих случаях при $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ имеет место равенство

$$\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = \inf_{\lambda\in(\mathrm{d}(\sigma),1)} \frac{\lambda c + \log\operatorname{Tr}\sigma^\lambda}{1-\lambda}.$$

В § 3 ч. II настоящей работы на рис. 2 представлены, наряду с другими характеристиками, результаты вычисления $\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho)$ как функции параметра c для состояния σ, у которого $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ и $c_*(\sigma) < +\infty$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что σ – состояние полного ранга такое, что $-\log\sigma$ – $\mathfrak{H}$-оператор[6].

1) Утверждение о компактности доказывается при помощи критерия компактности, рассмотренного в § 2, и неравенства

$$H(\rho\,\|\,\sigma) \geqslant H(P\rho P\,\|\,P\sigma P) \geqslant \operatorname{Tr}(P\rho)\log\frac{\operatorname{Tr}(P\rho)}{\operatorname{Tr}(P\sigma)} + \operatorname{Tr}(P\sigma) - \operatorname{Tr}(P\rho), \tag{17}$$

которое справедливо для любых состояний ρ, σ и произвольного проектора P. Это неравенство следует из [8, лемма 3] и свойства монотонности относительной энтропии [9], примененного к вполне положительному сохраняющему след отображению $\Phi(A) = (\operatorname{Tr} A)\tau$, где τ – произвольное состояние.

[5]Это значит, что $H\big((\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda^*})^{-1}\sigma^{\lambda^*} \,\|\, \sigma\big) = c$.

[6]Это предположение и используемая в доказательстве бесконечномерность пространства $\mathcal{H}$ подразумевают бесконечный ранг состояния σ. Однако можно показать, что все утверждения предложения 3 справедливы и для состояния σ конечного ранга.

Пусть $\{P_n\}$ – последовательность проекторов конечного ранга, выбранная по данному состоянию σ, такая, что $\operatorname{Tr} P_n\sigma > 1 - n^{-1}$. Предположим, что множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ не компактно. В силу критерия компактности для каждого n существует состояние ρ_n из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ такое, что $\operatorname{Tr}(I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n > \varepsilon$ для некоторого положительного ε. Используя неравенство (17) с $P = I_{\mathcal{H}} - P_n$, получаем

$$H(\rho_n \,\|\, \sigma) \geqslant \operatorname{Tr}\bigl((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n\bigr) \log \frac{\operatorname{Tr}\bigl((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n\bigr)}{\operatorname{Tr}\bigl((I_{\mathcal{H}} - P_n)\sigma\bigr)} + \operatorname{Tr}\bigl((I_{\mathcal{H}} - P_n)\sigma\bigr) - \operatorname{Tr}\bigl((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n\bigr) \geqslant \varepsilon \log(\varepsilon n) - 1$$

для достаточно больших n, следовательно, $H(\rho_n \,\|\, \sigma)$ стремится к $+\infty$ при $n \to +\infty$, что противоречит определению множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

2) Если $\mathrm{d}(\sigma) = 1$, то в силу утверждения 2) предложения 2 энтропия не ограничена на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$, то из леммы 3 следует, что

$$H(\rho) = \frac{\lambda H(\rho \,\|\, \sigma) + \log \operatorname{Tr} \sigma^{\lambda} - H(\rho \,\|\, \sigma_{\lambda})}{1 - \lambda} \leqslant \frac{c\lambda + \log \operatorname{Tr} \sigma^{\lambda}}{1 - \lambda} \tag{18}$$

для всех λ из $\bigl(\mathrm{d}(\sigma), 1\bigr)$ и всех ρ из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$. Поэтому $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) < +\infty$.

3) Если $\mathrm{d}(\sigma) > 0$, то в силу предложения 1 энтропия не является непрерывной на множестве $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}$, которое содержится в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Если $\mathrm{d}(\sigma) = 0$, то, как показано выше, $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = d < +\infty$ и, следовательно, множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ содержится в $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c+d}$. В силу предложения 1 энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c+d}$.

4) Обозначим через σ_{λ} состояние $(\operatorname{Tr} \sigma^{\lambda})^{-1} \sigma^{\lambda}$ и заметим, что непрерывная функция $f(\lambda) = H(\sigma_{\lambda} \,\|\, \sigma)$ является убывающей на интервале $\bigl(\mathrm{d}(\sigma), 1\bigr)$. Действительно, нетрудно показать, что эта функция имеет производную

$$f'(\lambda) = -(1 - \lambda)\bigl(\operatorname{Tr} \sigma_{\lambda} \log^2 \sigma - (\operatorname{Tr} \sigma_{\lambda} \log \sigma)^2\bigr) < 0$$

для каждого λ из $\bigl(\mathrm{d}(\sigma), 1\bigr)$. Заметим также, что

$$\lim_{\lambda \to \mathrm{d}(\sigma)+0} f(\lambda) = c_* \leqslant +\infty, \qquad f(1) = 0.$$

Предположим, что $c \leqslant c_*$. Из приведенного выше наблюдения следует существование единственного решения λ^* уравнения $f(\lambda) = c$. Таким образом, $H(\sigma_{\lambda^*} \,\|\, \sigma) = c$, следовательно,

$$H(\sigma_{\lambda^*}) = \frac{c\lambda^* + \log \operatorname{Tr} \sigma^{\lambda^*}}{1 - \lambda^*}\,.$$

Из неравенства (18) следует, что $H(\rho) \leqslant H(\sigma_{\lambda^*})$ для всех ρ из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Предположим, что $c_* < +\infty$ и $c > c_*$. В этом случае

$$h = \frac{\mathrm{d}(\sigma)c + \log \operatorname{Tr} \sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}}{1 - \mathrm{d}(\sigma)} > \frac{\mathrm{d}(\sigma)c_* + \log \operatorname{Tr} \sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}}{1 - \mathrm{d}(\sigma)} = H(\sigma_{\mathrm{d}(\sigma)}).$$

Поскольку $\mathrm{d}(\sigma_{\mathrm{d}(\sigma)}) = 1$, из предложения 2 следует, что для каждого достаточно большого m существует последовательность состояний $\{\rho_n^m\}_n$ такая, что

$$\lim_{n \to +\infty} H\bigl(\rho_n^m \,\|\, \sigma_{\mathrm{d}(\sigma)}\bigr) = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} H(\rho_n^m) = h - \frac{1}{m}\,. \tag{19}$$

Используя лемму 3, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n^m \,\|\, \sigma) = \lim_{n\to+\infty} \frac{H(\rho_n^m \,\|\, \sigma_{\mathrm{d}(\sigma)}) - \log \operatorname{Tr} \sigma^{\mathrm{d}(\sigma)} + \bigl(1-\mathrm{d}(\sigma)\bigr) H(\rho_n^m)}{\mathrm{d}(\sigma)}$$
$$= \frac{\bigl(1-\mathrm{d}(\sigma)\bigr)h - \log \operatorname{Tr} \sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}}{\mathrm{d}(\sigma)} - \frac{1-\mathrm{d}(\sigma)}{\mathrm{d}(\sigma)m} = c - \frac{1-\mathrm{d}(\sigma)}{\mathrm{d}(\sigma)m}\,.$$

Таким образом, для каждого m существует $N(m)$ такое, что ρ_n^m лежит в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для всех $n \geqslant N(m)$. С учетом этого из (19) следует, что из семейства $\{\rho_n^m\}_{n,m}$ можно выбрать последовательность $\{\hat{\rho}_n\}_n$ состояний из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, сходящуюся к состоянию $\sigma_{\mathrm{d}(\sigma)}$, такую, что $\lim_{n\to+\infty} H(\hat{\rho}_n) = h$. Поэтому $\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) \geqslant h$. Поскольку обратное неравенство следует из (18), получаем $\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = h > H(\sigma_{\mathrm{d}(\sigma)})$. В силу леммы 2 множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ не содержит состояния с максимальной энтропией.

Общее выражение для $\sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho)$ выводится из предыдущих наблюдений и замечания, что нижняя грань в этом выражении достигается при $\lambda = \lambda^*$, если $c \leqslant c_*(\sigma)$, и при $\lambda = \mathrm{d}(\sigma)$, если $c \geqslant c_*(\sigma)$.

Следующее предложение посвящено рассмотрению вопроса о непрерывности энтропии на произвольных множествах состояний.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Следующие свойства равносильны*:

(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_{H,h}$ *для некоторого $\mathfrak{H}$-оператора H с $\mathrm{g}(H) = 0$ и положительного числа h*;

(ii) *энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho \,\|\, \sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$*;

(iii) *существует $\mathfrak{H}$-оператор $\widetilde{H}$ с $\mathrm{g}(\widetilde{H}) < +\infty$ такой, что линейная функция $\operatorname{Tr} \rho\widetilde{H}$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$.*

Если равносильные свойства (i)–(iii) имеют место для множества $\mathcal{A}$, то $\mathfrak{H}$-операторы H, $\widetilde{H}$ и состояние σ можно выбрать таким образом, что $\operatorname{Tr} \sigma H < +\infty$, $\widetilde{H} = -\log \sigma$ *и* $H(\sigma) < +\infty$.

Замечание 2. Из последнего утверждения предложения 4 следует, что если свойства (i)–(iii) имеют место для множества $\mathcal{A}$, то эти свойства имеют место и для множества $\overline{\mathrm{co}}\{\mathcal{A}, \sigma\}$.

Доказательство предложения 4. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Поскольку (ii) гарантирует конечность энтропии на $\mathcal{A}$, имеем

$$H(\rho \,\|\, \sigma) = -H(\rho) + \operatorname{Tr} \rho(-\log \sigma) \quad \forall\, \rho \in \mathcal{A}. \tag{20}$$

В силу предложения 3 множество $\mathcal{A}$ компактно и, следовательно, энтропия ограничена на $\mathcal{A}$. Таким образом, из (ii) и (20) следует непрерывность и ограниченность функции $\operatorname{Tr} \rho(-\log \sigma)$ на множестве $\mathcal{A}$. Поэтому (iii) имеет место с $\widetilde{H} = -\log \sigma$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\lambda > \mathrm{g}(\widetilde{H})$ и $\sigma = \bigl(\operatorname{Tr} \exp(-\lambda\widetilde{H})\bigr)^{-1} \exp(-\lambda\widetilde{H})$ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с конечной энтропией. Свойство (iii) означает непрерывность и ограниченность функции $\operatorname{Tr} \rho(-\log \sigma)$ на множестве $\mathcal{A}$. Поэтому из (20) следует, в силу полунепрерывности снизу энтропии и относительной энтропии, непрерывность и ограниченность функций $H(\rho)$ и $H(\rho \,\|\, \sigma)$ на множестве $\mathcal{A}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $H = \sum_k h_k|k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. В силу предположения имеем $\sum_k \exp(-\lambda h_k) < +\infty$ для всех $\lambda > 0$ и, следовательно, $\sum_k h_k \exp(-\lambda h_k) < +\infty$ для всех $\lambda > 0$. Это гарантирует существование последовательности $\{\lambda_k\}$ положительных чисел, монотонно сходящейся к нулю, такой, что $\sum_k h_k \exp(-\lambda_k h_k) < +\infty$. Такую последовательность можно построить следующим образом. Для произвольного натурального m пусть $N(m)$ – минимальное натуральное число такое, что $\sum_{k=N(m)}^{+\infty} h_k \exp(-h_k/m) < 2^{-m}$. Нетрудно видеть, что последовательность

$$\lambda_k = \begin{cases} 1, & k < N(2), \\ \dfrac{1}{m}, & N(m) \leqslant k < N(m+1),\ \ m \geqslant 2, \end{cases}$$

обладает указанным свойством. Поскольку $\operatorname{Tr}\rho H = \sum_k h_k\langle k|\rho|k\rangle \leqslant h$ для всех ρ из $\mathcal{A}$, ряд $\sum_k \lambda_k h_k\langle k|\rho|k\rangle$ сходится равномерно на $\mathcal{A}$. Это гарантирует непрерывность на $\mathcal{A}$ функции $\operatorname{Tr}\rho(-\log\sigma)$, где

$$\sigma = \biggl(\sum_k \exp(-\lambda_k h_k)\biggr)^{-1} \sum_k \exp(-\lambda_k h_k)|k\rangle\langle k|.$$

Заметим, что из условия $\sum_k h_k \exp(-\lambda_k h_k) < +\infty$ следует $\operatorname{Tr}\sigma H < +\infty$ и $H(\sigma) < +\infty$. Таким образом, (iii) имеет место с $\widetilde{H} = -\log\sigma$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\widetilde{H} = \sum_k \tilde{h}_k|k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Поскольку (iii) равносильно (ii), из предложения 3 следует компактность множества $\mathcal{A}$. В соответствии с (iii) ряд $\sum_k \tilde{h}_k\langle k|\rho|k\rangle$ сходится на компактном множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной функции $\operatorname{Tr}\rho\widetilde{H}$. В силу леммы Дини этот ряд сходится равномерно на $\mathcal{A}$, что гарантирует существование последовательности $\{\lambda_k\}$ положительных чисел, монотонно сходящейся к $+\infty$, такой, что $\sum_k \lambda_k\tilde{h}_k\langle k|\rho|k\rangle \leqslant h < +\infty$ для всех ρ из $\mathcal{A}$. Нетрудно видеть, что (i) имеет место с $H = \sum_k \lambda_k\tilde{h}_k|k\rangle\langle k|$.

Последнее утверждение предложения следует из приведенного выше построения.

Из предложений 1 и 4 вытекает следующее наблюдение.

Следствие 1. *Если H – $\mathfrak{H}$-оператор с* $\mathrm{g}(H) = 0$, *то существуют состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{H}$-оператор $\widetilde{H}$ с* $\mathrm{g}(\widetilde{H}) < +\infty$ *такие, что относительная энтропия $H(\rho\,\|\,\sigma)$ и линейная функция $\operatorname{Tr}\rho\widetilde{H}$ непрерывны на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$.*

Поскольку множество $\mathcal{K}_{H,h}$ является выпуклым, из предложений 1 и 4 получаем следующий результат.

Следствие 2. *Если энтропия непрерывна на замкнутом множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho\,\|\,\sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$, то энтропия непрерывна на множестве* $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$.

Замечание 3. Предположение о существовании состояния σ в п. (ii) предложения 4 и в следствии 2 существенно. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество всех чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Энтропия тождественно равна нулю на этом множестве и, следовательно, непрерывна. Но она не является непрерывной функцией на $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Существует *компактное* множество $\mathcal{A}$ чистых состояний (сходящаяся последовательность) такое, что энтропия не ограничена на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ (см. пример 1 в ч. II настоящей работы).

Предложение 4 и следствие 2 позволяют показать непрерывность энтропии и относительной энтропии на некоторых нетривиальных множествах состояний. В ч. II настоящей работы нам потребуется следующий результат.

Следствие 3. *Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – замкнутое семейство унитарных (антиунитарных) операторов в пространстве $\mathcal{H}$, и пусть ω – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что $U_\lambda \omega U_\lambda^* = \omega$ для всех $\lambda\in\Lambda$. Тогда для любого состояния σ такого, что $\operatorname{Tr}\sigma(-\log\omega) < +\infty$, функции $H(\rho)$ и $H(\rho\,\|\,\omega)$ непрерывны на множестве $\overline{\mathrm{co}}\bigl(\{U_\lambda\sigma U_\lambda^*\}_{\lambda\in\Lambda}\bigr)$.*

Для произвольного ортонормированного базиса $\bigl\{|k\rangle\bigr\}\subset\mathcal{H}$ рассмотрим вполне положительное сохраняющее след отображение

$$\Pi_{\{|k\rangle\}}\colon \rho\mapsto\sum_k\langle k|\rho|k\rangle|k\rangle\langle k|.$$

Заметим, что множество выходных состояний отображения $\Pi_{\{|k\rangle\}}$ можно рассматривать как множество классических состояний (распределений вероятностей). Поэтому множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ можно назвать *классической проекцией* множества $\mathcal{A}$, соответствующей базису $\bigl\{|k\rangle\bigr\}$.

Следующее предложение показывает, что некоторые свойства множеств квантовых состояний тесно связаны со свойствами классических проекций этих множеств.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

1) *Множество $\mathcal{A}$ компактно, если множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно хотя бы для одного базиса $\{|k\rangle\}$.*

2) *Если множество $\mathcal{A}$ компактно, то множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно для любого базиса $\{|k\rangle\}$.*

3) *Энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A}$, если энтропия ограничена на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ хотя бы для одного базиса $\bigl\{|k\rangle\bigr\}$.*

4) *Если энтропия ограничена на выпуклом множестве $\mathcal{A}$, то энтропия ограничена на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ по крайней мере для одного базиса $\bigl\{|k\rangle\bigr\}$.*

5) *Энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$, если энтропия непрерывна на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ хотя бы для одного базиса $\bigl\{|k\rangle\bigr\}$.*

6) *Если энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho\,\|\,\sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$, то энтропия непрерывна на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ по крайней мере для одного базиса $\bigl\{|k\rangle\bigr\}$.*

Доказательство. Если множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно, то, в силу критерия компактности для подмножеств классических состояний, для любого $\varepsilon>0$ существует N_ε такое, что

$$\operatorname{Tr}P_\varepsilon\rho=\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\langle k|\rho|k\rangle\geqslant 1-\varepsilon\quad\forall\,\rho\in\mathcal{A},$$

где $P_\varepsilon=\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}|k\rangle\langle k|$ – проектор конечного ранга. Это в силу критерия компактности для подмножеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ гарантирует компактность множества $\mathcal{A}$.

Если множество $\mathcal{A}$ компактно, то для любого базиса $\{|k\rangle\}$ множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно как образ компактного множества при непрерывном отображении.

В доказательстве следующих утверждений будет использовано тождество

$$H(\rho\,\|\,\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho))=H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho))-H(\rho), \tag{21}$$

справедливое для любого состояния ρ такого, что $H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho))<+\infty$.

Если энтропия ограничена на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$, то она ограничена и на множестве $\mathcal{A}$, поскольку из (21) и неотрицательности относительной энтропии следует, что $H(\rho)\leqslant H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho))$ для любого ρ из $\mathcal{A}$.

Если энтропия ограничена на выпуклом множестве $\mathcal{A}$, то в силу приведенного далее следствия 7 множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$-оператором H с $\mathrm{g}(H)<+\infty$. Пусть $\{|k\rangle\}$ – базис из собственных векторов $\mathfrak{H}$-оператора H. Множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ также содержится в $\mathcal{K}_{H,h}$, и, следовательно, энтропия ограничена на $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ в силу предложения 1.

Предположим, что энтропия непрерывна на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$. Тогда энтропия конечна на этом множестве и в силу (21) энтропия конечна на множестве $\mathcal{A}$. Пусть ρ_0 – состояние из $\mathcal{A}$ и $\{\rho_n\}$ – последовательность состояний из $\mathcal{A}$, сходящаяся к состоянию ρ_0. Используя предположение о непрерывности энтропии на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$, полунепрерывность снизу относительной энтропии и тождество (21), получаем

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}H(\rho_n)&=\lim_{n\to+\infty}H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_n))-\liminf_{n\to+\infty}H(\rho_n\,\|\,\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_n))\\&\leqslant H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_0))-H(\rho_0\,\|\,\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_0))=H(\rho_0).\end{aligned}$$

Из этого неравенства и полунепрерывности снизу энтропии следует, что $\lim_{n\to+\infty}H(\rho_n)=H(\rho_0)$.

Если энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho\,\|\,\sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$, то в силу предложения 4 множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$-оператором H с $\mathrm{g}(H)=0$. Пусть $\{|k\rangle\}$ – базис из собственных векторов H. Тогда множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ также содержится в $\mathcal{K}_{H,h}$ и в силу предложения 1 энтропия непрерывна на $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$.

Замечание 4. Выражение "по крайней мере для одного" в пп. 4) и 6) предложения 5 нельзя, в отличие от п. 2), заменить на выражение "для любого". Действительно, для любого чистого состояния ρ существует базис $\{|k\rangle\}$ такой, что $H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho))=+\infty$.

Пусть σ – состояние с базисом из собственных векторов $\{|k\rangle\}$. Множество $\Pi^{-1}_{\{|k\rangle\}}(\sigma)$, состоящее из всех состояний, имеющих такие же диагональные значения в базисе $\{|k\rangle\}$, что и состояние σ, назовем *слоем*[7], *соответствующим*

[7] Если состояние σ имеет различные собственные значения, то базис из собственных векторов $\{|k\rangle\}$ по существу единствен и множество $\mathcal{L}(\sigma)$ определяется только состоянием σ. Если состояние σ имеет кратные собственные значения, то множество $\mathcal{L}(\sigma)$ также зависит от выбора базиса $\{|k\rangle\}$. Поскольку в последнем случае все "варианты" множества $\mathcal{L}(\sigma)$ изоморфны друг другу, будем предполагать, что выбран один из этих вариантов.

состоянию σ, и обозначим $\mathcal{L}(\sigma)$. В некотором смысле слой можно рассматривать как простейшее чисто квантовое множество состояний.

Используя (21), получаем

$$H(\rho) \leqslant H(\sigma) \quad \forall\, \rho \in \mathcal{L}(\sigma), \tag{22}$$

и, следовательно, энтропия ограничена на слое, соответствующем состоянию σ, тогда и только тогда, когда $H(\sigma) < +\infty$. Следующее предложение показывает, что ограниченность энтропии на слое гарантирует ее непрерывность.

Предложение 6. *Пусть σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

1) *Множество $\mathcal{L}(\sigma)$ является компактным выпуклым подмножеством $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

2) *Энтропия $H(\rho)$ непрерывна на множестве $\mathcal{L}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда* $\sup_{\rho\in\mathcal{L}(\sigma)} H(\rho) = H(\sigma) < +\infty$.

3) *Если $H(\sigma) < +\infty$, то $H(\rho \,\|\, \sigma) = H(\sigma) - H(\rho)$ для любого состояния ρ из $\mathcal{L}(\sigma)$.*

4) *Если $H(\sigma) = +\infty$, то $H(\rho \,\|\, \sigma) = +\infty$ для произвольного чистого состояния ρ из $\mathcal{L}(\sigma)$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из пп. 1) и 5) предложения 5 соответственно, поскольку $\Pi_{\{|k\rangle\}}\bigl(\mathcal{L}(\sigma)\bigr) = \{\sigma\}$, если $\bigl\{|k\rangle\bigr\}$ – базис из собственных векторов состояния σ.

Выражение для относительной энтропии в случае $H(\sigma) < +\infty$ есть просто переформулировка тождества (21).

Пусть $H(\sigma) = +\infty$ и ρ – произвольное чистое состояние из $\mathcal{L}(\sigma)$. Рассмотрим последовательности состояний $\bigl\{\sigma_n = (\operatorname{Tr} P_n\sigma)^{-1}P_n\sigma\bigr\}$ и $\bigl\{\rho_n = (\operatorname{Tr} P_n\rho)^{-1}P_n\rho P_n\bigr\}$, где P_n – спектральный проектор состояния σ, соответствующий его n максимальным собственным значениям.

Поскольку для каждого n чистое состояние ρ_n лежит в $\mathcal{L}(\sigma_n)$, используя (21), получаем

$$H(\rho_n \,\|\, \sigma_n) = H(\sigma_n) - H(\rho_n) = H(\sigma_n).$$

В силу [8, лемма 4] левая и правая части этого равенства сходятся к $H(\rho \,\|\, \sigma)$ и к $H(\sigma) = +\infty$ соответственно при $n \to +\infty$.

Замечание 5. Предложения 5 и 6 приводят к следующему наблюдению: *разрывность и неограниченность квантовой энтропии в бесконечномерном случае имеют чисто классическую природу.* Действительно, множество всех квантовых состояний можно представить как совокупность слоев, соответствующих всем состояниям, диагонализируемым в некотором базисе. Множество таких состояний можно отождествить с множеством классических состояний – распределений вероятностей, в то время как отдельный слой – с множеством чисто квантовых состояний. Предложение 6 показывает, что энтропия непрерывна на целом слое, если она конечна на соответствующем классическом состоянии. В силу предложения 5 разрывность энтропии связана с переходом между слоями, соответствующими множеству классических состояний, на которых энтропия разрывна.

§ 4. χ-емкость

4.1. Оптимальное среднее. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. *$\chi$-емкость* множества $\mathcal{A}$ определяется выражением

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\}} \chi\bigl(\{\pi_i,\rho_i\}\bigr), \tag{23}$$

в котором точная верхняя грань берется по всем ансамблям $\{\pi_i,\rho_i\}$ состояний из $\mathcal{A}$.

Если энтропия ограничена на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$, то

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\}} \left(H\left(\sum_i \pi_i\rho_i\right) - \sum_i \pi_i H(\rho_i)\right) \leqslant \sup_{\rho\in\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})} H(\rho) < +\infty.$$

Однако ограниченность энтропии не является необходимым условием конечности χ-емкости, как это следует из примеров, рассмотренных в ч. II настоящей работы.

В соответствии с [15] последовательность $\bigl\{\{\pi_i^n,\rho_i^n\}\bigr\}_n$ ансамблей состояний из $\mathcal{A}$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty} \chi\bigl(\{\pi_i^n,\rho_i^n\}\bigr) = \overline{C}(\mathcal{A}),$$

называется *аппроксимирующей последовательностью* для множества $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ – множество состояний (операторов плотности) в конечномерном гильбертовом пространстве, то существует ансамбль $\{\pi_i,\rho_i\}$, являющийся оптимальным ансамблем для множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная верхняя грань в определении χ-емкости (23) и среднее состояние которого обладает рядом особых свойств [14]. Если $\mathcal{A}$ – множество состояний (операторов плотности) в бесконечномерном гильбертовом пространстве, то оптимальный ансамбль, в общем случае, не существует, но можно доказать существование единственного состояния, обладающего свойствами среднего состояния оптимального ансамбля в конечномерном случае.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ-емкостью $\overline{C}(\mathcal{A})$.*

1) *Существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{A})$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что*

$$H\bigl(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\bigr) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) \quad \forall\,\rho\in\mathcal{A}.$$

Состояние $\Omega(\mathcal{A})$ лежит в $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$. Для любой аппроксимирующей последовательности ансамблей $\bigl\{\{\pi_i^n,\rho_i^n\}\bigr\}_n$ для множества $\mathcal{A}$ соответствующая последовательность средних состояний $\{\bar\rho_n\}$ H-сходится[8] *к состоянию $\Omega(\mathcal{A})$.*

2) *χ-емкость множества $\mathcal{A}$ определяется выражением*

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma) = \inf_{\sigma\in\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})} \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma) = \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H\bigl(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\bigr), \tag{24}$$

где первые два равенства выполняются и в случае $\overline{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

Доказательство. 1) Покажем сначала, что при любой аппроксимирующей последовательности ансамблей $\bigl\{\mu_n = \{\pi_i^n,\rho_i^n\}_{i=1}^{N(n)}\bigr\}$ для множества $\mathcal{A}$ соответствующая последовательность средних состояний $\{\bar\rho_n\}$ сходится к некоторому

[8] Это значит, что $\lim_{n\to+\infty} H\bigl(\bar\rho_n\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\bigr) = 0$.

состоянию из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. По определению аппроксимирующей последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $\chi(\mu_n) > \overline{C}(\mathcal{A}) - \varepsilon$ для всех $n \geqslant N_\varepsilon$. В силу леммы 1 при $m = 2$ и $\lambda = 1/2$ имеем

$$\begin{aligned}\overline{C}(\mathcal{A}) - \varepsilon &\leqslant \frac{1}{2}\,\chi(\mu_{n_1}) + \frac{1}{2}\,\chi(\mu_{n_2}) \\ &\leqslant \chi\biggl(\frac{1}{2}\,\mu_{n_1} + \frac{1}{2}\,\mu_{n_2}\biggr) - \frac{1}{8}\,\|\bar{\rho}_{n_2} - \bar{\rho}_{n_1}\|_1^2 \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) - \frac{1}{8}\,\|\bar{\rho}_{n_2} - \bar{\rho}_{n_1}\|_1^2\end{aligned}$$

и, следовательно, $\|\bar{\rho}_{n_2} - \bar{\rho}_{n_1}\|_1 < \sqrt{8\varepsilon}$ для всех $n_1 \geqslant N_\varepsilon$ и $n_2 \geqslant N_\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{\bar{\rho}_n\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому состоянию ρ_* из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Пусть σ – произвольное состояние из $\mathcal{A}$. Для каждого натурального n и произвольного η из $[0,1]$ рассмотрим ансамбль[9] μ_n^η, состоящий из набора состояний $\bigl\{\rho_1^n, \dots, \rho_{N(n)}^n, \sigma\bigr\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\bigl\{(1-\eta)\pi_1^n, \dots, (1-\eta)\pi_{N(n)}^n, \eta\bigr\}$. Получим последовательность ансамблей $\{\mu_n^\eta\}$ с соответствующей последовательностью средних состояний $\bigl\{\bar{\rho}_n^\eta = (1-\eta)\bar{\rho}_n + \eta\sigma\bigr\}_n$, сходящейся к состоянию $\bar{\rho}_\eta = (1-\eta)\rho_* + \eta\sigma$ при $n \to +\infty$.

Для произвольного n имеем

$$\chi(\mu_n^\eta) = (1-\eta)\sum_i \pi_i^n H(\rho_i^n \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta) + \eta H(\sigma \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta). \tag{25}$$

В силу предположения конечности $\overline{C}(\mathcal{A})$ обе суммы в правой части выражения (25) конечны. Применяя тождество Дональда (3) к первой сумме в правой части, получаем

$$\sum_i \pi_i^n H(\rho_i^n \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta) = \chi(\mu_n^0) + H(\bar{\rho}_n \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta).$$

Подстановка предыдущего выражения в (25) дает

$$\chi(\mu_n^\eta) = \chi(\mu_n^0) + (1-\eta)H(\bar{\rho}_n \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta) + \eta\bigl(H(\sigma \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta) - \chi(\mu_n^0)\bigr).$$

Отсюда в силу неотрицательности относительной энтропии получаем

$$H(\sigma \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta) \leqslant \eta^{-1}\bigl(\chi(\mu_n^\eta) - \chi(\mu_n^0)\bigr) + \chi(\mu_n^0), \qquad \eta \neq 0. \tag{26}$$

По определению аппроксимирующей последовательности

$$\lim_{n \to +\infty} \chi(\mu_n^0) = \overline{C}(\mathcal{A}) \geqslant \chi(\mu_n^\eta) \tag{27}$$

для всех n и $\eta > 0$. Следовательно,

$$\liminf_{\eta \to +0}\, \liminf_{n \to +\infty}\, \eta^{-1}\bigl[\chi(\mu_n^\eta) - \chi(\mu_n^0)\bigr] \leqslant 0. \tag{28}$$

В силу полунепрерывности снизу относительной энтропии из неравенств (26)–(28) следует, что

$$H(\sigma \,\|\, \rho_*) \leqslant \liminf_{\eta \to +0}\, \liminf_{n \to +\infty}\, H(\sigma \,\|\, \bar{\rho}_n^\eta) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}).$$

[9]Такое расширение ансамбля путем “подмешивания” дополнительного состояния было первоначально использовано в [14] в конечномерном случае.

Таким образом, доказано, что

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{A}} H(\sigma\,\|\,\rho_*) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}). \tag{29}$$

Пусть $\bigl\{\{\lambda_j^n,\sigma_j^n\}\bigr\}_n$ – произвольная аппроксимирующая последовательность ансамблей. В силу неравенства (29) получаем

$$\sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n\,\|\,\rho_*) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}).$$

Применяя тождество Дональда (3), получаем

$$\sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n\,\|\,\rho_*) = \sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n\,\|\,\bar{\sigma}_n) + H(\bar{\sigma}_n\,\|\,\rho_*). \tag{30}$$

Из двух предыдущих выражений следует, что

$$H(\bar{\sigma}_n\,\|\,\rho_*) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) - \sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n\,\|\,\bar{\sigma}_n).$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to+\infty$ благодаря аппроксимирующему свойству последовательности $\bigl\{\{\lambda_j^n,\sigma_j^n\}\bigr\}_n$. Таким образом, последовательность $\{\bar{\sigma}_n\}_n$ H-сходится к состоянию ρ_* и, следовательно, сходится к этому состоянию в топологии следовой нормы. Поэтому состояние ρ_* не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, а определяется только множеством $\mathcal{A}$. Обозначим это состояние $\Omega(\mathcal{A})$. Предыдущее наблюдение показывает, что $\rho_*=\Omega(\mathcal{A})$ – единственное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, для которого имеет место неравенство (29).

2) Для доказательства выражения (24) покажем сначала, что неравенство (29) на самом деле является равенством. Действительно, из выражения (30), справедливого для любой аппроксимирующей последовательности $\bigl\{\{\lambda_j^n,\sigma_j^n\}\bigr\}_n$, с учетом неотрицательности относительной энтропии следует, что

$$\sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n\,\|\,\bar{\sigma}_n) \leqslant \sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n\,\|\,\rho_*) \leqslant \sup_{\sigma\in\mathcal{A}} H(\sigma\,\|\,\rho_*).$$

В силу аппроксимирующего свойства последовательности $\bigl\{\{\lambda_j^n,\sigma_j^n\}\bigr\}_n$ левая часть этого неравенства стремится к $\overline{C}(\mathcal{A})$ при $n\to+\infty$. Это доказывает равенство в (29).

Рассмотрим функцию $F(\sigma)=\sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma)$ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Равенство в (29) означает, что $F\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A})$. Следовательно, состояние $\Omega(\mathcal{A})$ – единственная точка минимума функции $F(\sigma)$ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Действительно, пусть σ_0 – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что

$$\sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma_0) = F(\sigma_0) \leqslant F\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr) = \overline{C}(\mathcal{A}).$$

В силу утверждения 1) теоремы $\sigma_0=\Omega(\mathcal{A})$.

Если $\overline{C}(\mathcal{A})=+\infty$, то правая часть выражения (24) также равна $+\infty$. Действительно, если σ_0 – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что $\sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma_0)=c<+\infty$, то, используя тождество Дональда и неотрицательность относительной энтропии, получаем

$$\sum_i \pi_i H(\rho_i \,\|\, \bar{\rho}) \leqslant \sum_i \pi_i H(\rho_i \,\|\, \sigma_0) - H(\bar{\rho} \,\|\, \sigma_0) \leqslant c$$

для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathcal{A}$, поэтому $\overline{C}(\mathcal{A}) \leqslant c < +\infty$.

Определение 1. Состояние $\Omega(\mathcal{A})$, введенное в теореме 1, называется *оптимальным средним состоянием множества* $\mathcal{A}$.

Из теоремы 1, тождества Дональда (3) и неравенства (1) вытекает следующее полезное неравенство.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ-емкостью. Для произвольного ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathcal{A}$ со средним состоянием $\bar{\rho}$ имеет место неравенство*

$$\overline{C}(\mathcal{A}) - \chi\bigl(\{\pi_i, \rho_i\}\bigr) \geqslant H\bigl(\bar{\rho} \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr) \geqslant \frac{1}{2} \bigl\|\bar{\rho} - \Omega(\mathcal{A})\bigr\|_1^2.$$

Теорема 1 и предложение 3 позволяют получить следующий важный результат.

Следствие 5. *Любое множество состояний с конечной χ-емкостью является предкомпактным.*

Заметим, что обратное утверждение неверно. Существуют компактные множества, например сходящиеся последовательности состояний, имеющие бесконечную χ-емкость (см. § 3 ч. II настоящей работы).

Следствие 5 приводит к важному наблюдению, связанному с χ-пропускной способностью квантовых каналов с ограничениями [18], [19], [15].

Следствие 6. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ – произвольный квантовый канал и $\mathcal{A}$ – подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Если $\overline{C}(\Phi, \mathcal{A}) < +\infty$, то $\Phi(\mathcal{A})$ – предкомпактное подмножество в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$.*

Доказательство. Из определений χ-пропускной способности канала с ограничениями и χ-емкости следует, что

$$\overline{C}\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr) \leqslant \overline{C}(\Phi, \mathcal{A}).$$

Следствие доказано.

Данное наблюдение показывает, что χ-пропускная способность квантового канала без ограничений может быть конечной, только если выходное множество состояний этого канала предкомпактно.

Теорема 1 и предложение 1 приводят к следующему наблюдению о свойствах энтропии.

Следствие 7. *Энтропия ограничена на выпуклом множестве $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда это множество предкомпактно и содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$-оператором H с $\mathrm{g}(H) < +\infty$ и положительным h.*

Доказательство. Если множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ с $\mathrm{g}(H) < +\infty$, то в силу предложения 1 имеем $\sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho) < +\infty$.

Если $\sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho) < +\infty$, то $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$ и в силу теоремы 1 имеем

$$H\big(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\big) = \operatorname{Tr}\rho\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big) - H(\rho) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A})$$

для всех ρ из $\mathcal{A}$. Поэтому

$$\operatorname{Tr}\rho\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) + \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho)$$

для всех ρ из $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_{H,h}$, где $H = -\log\Omega(\mathcal{A})$ и $h = \overline{C}(\mathcal{A}) + \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho)$.

В силу следствия 7 ограниченность энтропии на выпуклом множестве $\mathcal{A}$ означает, что множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$-оператором H с конечным $\mathrm{g}(H)$. В силу теоремы 1 конечность χ-емкости произвольного множества $\mathcal{A}$ означает, что множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{A})}$, имеющем такую же χ-емкость и такое же оптимальное среднее состояние.

4.2. Оптимальная мера. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ-емкостью. В силу следствия 5 множество $\mathcal{A}$ компактно. Следовательно, множество $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ всех вероятностных мер на $\mathcal{A}$ компактно в топологии слабой сходимости (топологии Прохорова) [11]. Поскольку произвольную меру из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ можно аппроксимировать слабо сходящейся последовательностью мер с конечным носителем, из полунепрерывности снизу функционала $\chi(\mu)$ следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{A})} \chi(\mu), \tag{31}$$

т. е. точная верхняя грань по всем мерам из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ совпадает с точной верхней гранью по всем мерам с конечным носителем.

Определение 2. Мера μ_* из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ такая, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \chi(\mu_*) = \int_{\mathcal{A}} H\big(\rho\,\|\,\bar\rho(\mu_*)\big)\mu_*(d\rho),$$

называется *оптимальной мерой для множества* $\mathcal{A}$.

Используя теорему 1 и обобщенное тождество Дональда (4), нетрудно получить следующее обобщение следствия 4: *для произвольного замкнутого множества $\mathcal{A}$ с конечной χ-емкостью и произвольной меры μ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ имеет место следующее неравенство*:

$$\overline{C}(\mathcal{A}) - \chi(\mu) \geqslant H\big(\bar\rho(\mu)\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\big) \geqslant \frac{1}{2}\,\big\|\bar\rho(\mu) - \Omega(\mathcal{A})\big\|_1^2.$$

Это неравенство и теорема 1 позволяют обобщить свойство максимальной равноудаленности оптимального ансамбля [14] на бесконечномерный случай.

Предложение 7. *Пусть μ_* – оптимальная мера для замкнутого множества $\mathcal{A}$ с конечной χ-емкостью. Тогда ее барицентр $\bar\rho(\mu_*)$ совпадает с оптимальным средним состоянием $\Omega(\mathcal{A})$ и $H\big(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\big) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для μ_*-почти всех ρ.*

В частности, если существует конечный или счетный ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$, на котором достигается точная верхняя грань в определении χ-емкости (23) – оптимальный ансамбль для множества $\mathcal{A}$, то его среднее состояние $\bar{\rho}$ совпадает с оптимальным средним состоянием $\Omega(\mathcal{A})$ и $H(\rho_i \,\|\, \Omega(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для всех i таких, что $\pi_i > 0$.

Следствие 8. *Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ-емкостью. Необходимым условием существования оптимальной меры для множества $\mathcal{A}$ является неравенство $\overline{C}(\mathcal{A}) \leqslant H(\Omega(\mathcal{A}))$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty$, для которого из (2), определения оптимальной меры μ_* и предложения 7 следует

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \chi(\mu_*) = H(\bar{\rho}(\mu_*)) - \widehat{H}(\mu_*) \leqslant H(\bar{\rho}(\mu_*)) = H(\Omega(\mathcal{A})).$$

Следствие доказано.

Данное следствие дает простой способ показать отсутствие оптимальной меры для некоторого множества состояний. Этот способ будет использован в ч. II настоящей работы.

Следующая теорема дает достаточное условие существования оптимальной меры.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ-емкостью. Оптимальная мера для множества $\mathcal{A}$ существует, если выполнено одно из следующих условий:*

1) $H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty$ *и* $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\Omega(\mathcal{A}))$ *для любой последовательности* $\{\rho_n\}$ *состояний из* $\mathrm{co}(\mathcal{A})$, *H-сходящейся*[10] *к состоянию* $\Omega(\mathcal{A})$;

2) *функция* $\rho \mapsto H(\rho \,\|\, \Omega(\mathcal{A}))$ *непрерывна на множестве* $\mathcal{A}$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ-емкостью. Существует последовательность мер $\{\mu_n\}$ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ с конечным носителем, слабо сходящаяся к некоторой мере μ_* из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ с барицентром $\Omega(\mathcal{A})$, такая, что*

$$\lim_{n\to+\infty} H(\bar{\rho}(\mu_n) \,\|\, \Omega(\mathcal{A})) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \chi(\mu_n) = \overline{C}(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Пусть $\mu_n = \{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ – аппроксимирующая последовательность ансамблей для множества $\mathcal{A}$ с соответствующей последовательностью средних состояний $\{\bar{\rho}_n(\mu_n)\}$. Из теоремы 1 следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} H(\bar{\rho}(\mu_n) \,\|\, \Omega(\mathcal{A})) = 0.$$

Поскольку в силу следствия 5 множество $\mathcal{A}$ компактно, множество $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ слабо компактно. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $\{\mu_n\}$, слабо сходящаяся к некоторой мере μ_* из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Из непрерывности отображения $\mu \mapsto \bar{\rho}(\mu)$ следует, что $\bar{\rho}(\mu_*) = \Omega(\mathcal{A})$. Таким образом, данная подпоследовательность обладает всеми свойствами, указанными в лемме.

[10] Это значит, что $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n \,\|\, \Omega(\mathcal{A})) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Два условия в теореме приводят к двум различным доказательствам того, что предельная мера μ_*, введенная в лемме 4, является оптимальной мерой для множества $\mathcal{A}$.

Пусть $\{\mu_n\}$ – последовательность, существующая в силу леммы 4.

Из условия 1) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} H\bigl(\bar\rho(\mu_n)\bigr) = H\bigl(\bar\rho(\mu_*)\bigr) = H\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr) < +\infty.$$

Используя (2) и полунепрерывность снизу функционала $\widehat{H}(\mu)$, получаем

$$\limsup_{n\to+\infty} \chi(\mu_n) = \limsup_{n\to+\infty}\bigl(H\bigl(\bar\rho(\mu_n)\bigr) - \widehat{H}(\mu_n)\bigr) \leqslant H\bigl(\bar\rho(\mu_*)\bigr) - \widehat{H}(\mu_*) = \chi(\mu_*).$$

Поскольку $\lim_{n\to+\infty}\chi(\mu_n) = \overline{C}(\mathcal{A})$ и $\chi(\mu_*) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A})$, это неравенство показывает, что $\chi(\mu_*) = \overline{C}(\mathcal{A})$, т. е. оптимальность меры μ_*.

Из условия 2), компактности множества $\mathcal{A}$ и определения слабой сходимости следует, что

$$\chi(\mu_*) = \int_{\mathcal{A}} H\bigl(\rho \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr)\mu_*(d\rho) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathcal{A}} H\bigl(\rho \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr)\mu_n(d\rho).$$

Используя обобщенное тождество Дональда (4) и неотрицательность относительной энтропии, получаем

$$\int_{\mathcal{A}} H\bigl(\rho \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr)\mu_n(d\rho) = \chi(\mu_n) + H\bigl(\bar\rho(\mu_n) \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr) \geqslant \chi(\mu_n).$$

Поскольку $\lim_{n\to+\infty}\chi(\mu_n) = \overline{C}(\mathcal{A})$, из двух последних выражений следует $\chi(\mu_*) = \overline{C}(\mathcal{A})$, т. е. оптимальность меры μ_*.

Замечание 6. Условия в теореме 2 существенны, хотя и не являются необходимыми. Существуют примеры множеств с конечной χ-емкостью, не имеющих оптимальной меры. Оптимальной меры может не быть даже у счетного замкнутого множества – сходящейся последовательности состояний с конечной χ-емкостью. Существуют также примеры множеств с конечной χ-емкостью, для которых не выполнены условия теоремы 2, но существует оптимальная мера. Все указанные примеры будут рассмотрены в § 3 ч. II настоящей работы.

§ 5. Приложение

Здесь приведено доказательство свойств функции $F_H(h) = \sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$, представленных в предложении 1.

Заметим прежде всего, что в силу полунепрерывности снизу энтропии имеем

$$\lim_{h\to+\infty} F_H(h) = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho) = +\infty$$

при любом значении $\mathrm{g}(H)$, поскольку $\overline{\bigcup_{h\in\mathbb{R}_+}\mathcal{K}_{H,h}} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Рассмотрим функцию

$$g(\lambda, h) = \sum_{k=1}^{+\infty}(h_k - h)\exp(-\lambda h_k).$$

По теореме о рядах, зависящих от параметров [7], эта функция дифференцируема в любой точке (λ, h) с $\lambda > \mathrm{g}(H)$, причем

$$\frac{\partial g(\lambda,h)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(h-h_k)\exp(-\lambda h_k), \qquad \frac{\partial g(\lambda,h)}{\partial h} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\exp(-\lambda h_k). \tag{32}$$

Как показано в доказательстве предложения 1, для каждого h из интервала $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$ существует единственное $\lambda^* = \lambda^*(h) > \mathrm{g}(H)$ такое, что $g\bigl(\lambda^*(h), h\bigr) = 0$. Из (32) следует, что

$$\frac{\partial g(\lambda,h)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda^*(h)} = -\sum_{k=1}^{+\infty}(h_k-h)^2\exp\bigl(-\lambda^*(h)h_k\bigr) < 0.$$

По теореме о неявной функции функция $\lambda^*(h)$ дифференцируема на интервале $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$ и

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda^*(h)}{dh} &= -\biggl[\frac{\partial g(\lambda,h)}{\partial\lambda}\biggr]^{-1}\frac{\partial g(\lambda,h)}{\partial h}\\ &= -\biggl[\sum_{k=1}^{+\infty}(h_k-h)^2\exp\bigl(-\lambda^*(h)h_k\bigr)\biggr]^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\bigl(-\lambda^*(h)h_k\bigr) < 0.\end{aligned} \tag{33}$$

Выражение (14) означает, что

$$F_H(h) = \lambda^*(h)h + \log\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\bigl(-\lambda^*(h)h_k\bigr) \tag{34}$$

для всех h из $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr]$.

Прямое дифференцирование с учетом равенства $g\bigl(\lambda^*(h), h\bigr) = 0$ дает

$$\frac{dF_H(h)}{dh} = \frac{d}{dh}\biggl[\lambda^*(h)h + \log\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\bigl(-\lambda^*(h)h_k\bigr)\biggr] = \lambda^*(h). \tag{35}$$

Поэтому из (33) следует, что

$$\frac{d^2F_H(h)}{dh^2} = \frac{d\lambda^*(h)}{dh} < 0,$$

т. е. что $F_H(h)$ – строго вогнутая функция на интервале $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$.

Предположим, что $h_*(H) < +\infty$. Если $h > h_*(H)$, то в силу уже доказанной части предложения 1

$$F_H(h) = \mathrm{g}(H)h + \log\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\bigl(-\mathrm{g}(H)h_k\bigr) \tag{36}$$

– линейная функция и

$$\frac{dF_H(h)}{dh} = \mathrm{g}(H). \tag{37}$$

Если $h = h_*(H)$, то, как показано в доказательстве предложения 1, $\lambda^*(h) = \mathrm{g}(H)$ и, следовательно, выражения (34) и (36) в этом случае совпадают.

Для доказательства гладкости функции $F_H(h)$ в точке $h_*(H)$ заметим, что $\lambda^*(h) \to \mathrm{g}(H)$ при $h \to h_*(H) - 0$. Действительно, в силу (33) функция $\lambda^*(h)$ убывает на $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$ и для любого $\lambda > \mathrm{g}(H)$ существует

$$h_\lambda = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda h_k)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda h_k)$$

такое, что $\lambda = \lambda^*(h_\lambda)$.

Таким образом, из равенств (34)–(37) следует, что

$$\lim_{h \to h_*(H)-0} F_H(h) = F_H\bigl(h_*(H)\bigr), \qquad \lim_{h \to h_*(H)-0} \frac{dF_H(h)}{dh} = \frac{dF_H(h)}{dh}\bigg|_{h=h_*(H)+0},$$

а значит, функция $F_H(h)$ имеет непрерывную производную в точке $h_*(H)$.

Для доказательства непрерывности справа функции $F_H(h)$ в точке $h_{\mathrm{m}}(H)$ заметим, что

$$\lambda^*(h) \to +\infty \qquad \text{при} \qquad h \to h_{\mathrm{m}} + 0. \tag{38}$$

Действительно, в силу (33) функция $\lambda^*(h)$ убывает на $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$ и, следовательно, существует $\lambda^{\mathrm{m}} = \lim_{h \to h_{\mathrm{m}}(H)+0} \lambda^*(h)$. Если $\lambda^{\mathrm{m}} < +\infty$, то, переходя к пределу $h \to h_{\mathrm{m}}(H) + 0$ в равенстве

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp\bigl(-\lambda^*(h) h_k\bigr) \equiv h \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\bigl(-\lambda^*(h) h_k\bigr),$$

которое выполнено для всех h из $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$, получаем очевидное противоречие.

Пусть $d = \dim \mathcal{H}_{\mathrm{m}}(H)$. Нетрудно видеть, что

$$P(h) = \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\bigl(-\lambda^*(h) h_k\bigr) = -\lambda^*(h) h_{\mathrm{m}}(H) + Q(h), \tag{39}$$

где

$$Q(h) = \log\biggl(d + \sum_{k>d} \exp\Bigl(-\lambda^*(h)\bigl(h_k - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr)\Bigr)\biggr)$$

– неубывающая функция на интервале $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), h_*(H)\bigr)$, стремящаяся к $\log d$ при $h \to h_{\mathrm{m}}(H) + 0$.

Поскольку функция $F_H(h)$ не убывает на $\bigl(h_{\mathrm{m}}(H), +\infty\bigr)$, существует

$$\lim_{h \to h_{\mathrm{m}}(H)+0} F_H(h) \geqslant F_H\bigl(h_{\mathrm{m}}(H)\bigr).$$

Поэтому в силу (34) и (39) существует $\lim_{h \to h_{\mathrm{m}}(H)+0} \lambda^*(h)\bigl(h - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr) = C < +\infty$ и

$$\lim_{h \to h_{\mathrm{m}}(H)+0} F_H(h) = C + \log d = C + F_H\bigl(h_{\mathrm{m}}(H)\bigr).$$

Таким образом, для доказательства непрерывности справа функции $F_H(h)$ в точке $h_{\mathrm{m}}(H)$ достаточно показать, что $C = 0$. Это можно сделать, доказав, что

$$\int_{h_{\mathrm{m}}(H)}^{h''} \lambda^*(h)\,dh = \lim_{h'\to h_{\mathrm{m}}(H)+0} \int_{h'}^{h''} \lambda^*(h)\,dh < +\infty \tag{40}$$

для некоторого $h'' > h_{\mathrm{m}}(H)$. Действительно, из (40) и предположения $C > 0$ следует

$$\int_{h_{\mathrm{m}}(H)}^{h''} \bigl(h - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr)^{-1}\,dh < +\infty.$$

Противоречие.

Нетрудно видеть, что $\frac{dP(h)}{dh} = -h\frac{d\lambda^*(h)}{dh}$ и, следовательно,

$$\frac{dQ(h)}{dh} = -\frac{d\lambda^*(h)}{dh}\bigl(h - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr). \tag{41}$$

Интегрируя (41), получим

$$Q(h'') - Q(h') = \lambda^*(h')\bigl(h' - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr) - \lambda^*(h'')\bigl(h'' - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr) + \int_{h'}^{h''} \lambda^*(h)\,dh.$$

Поэтому из упомянутого выше существования пределов $\lim_{h'\to h_{\mathrm{m}}(H)+0} Q(h') = \log d$ и $\lim_{h'\to h_{\mathrm{m}}(H)+0} \lambda^*(h')\bigl(h' - h_{\mathrm{m}}(H)\bigr) = C < +\infty$ следует (40).

Из сказанного выше следует

$$\frac{F_H(h) - F_H\bigl(h_{\mathrm{m}}(H)\bigr)}{h - h_{\mathrm{m}}(H)} \geqslant \lambda^*(h) \quad \forall\, h > h_{\mathrm{m}}(H),$$

и, используя (38), получаем $\frac{dF_H(h)}{dh}\big|_{h=h_{\mathrm{m}}(H)+0} = +\infty$.

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в процессе работы над настоящей статьей.

Список литературы

1. Браттели У., Робинсон Д., *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.
2. Dell'Antonio G. F., "On the limits of sequences of normal states", *Commun. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 413–429.
3. Donald M. J., "Further results on the relative entropy", *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **101**:2 (1987), 363–373.
4. Harremoës P., Topsœ F., "Maximum entropy fundamentals", *Entropy*, **3**:3 (2001), 191–226.
5. Harremoës P., "Information Topologies with Applications", *Accepted for publication in a volume of the Bolyai Studies*, Springer, N. Y., 2004.
6. Иоффе Ф. Д., Тихомиров В. М., *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.
7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*, Высшая школа, М., 1988.
8. Lindblad G., "Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems", *Commun. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.
9. Lindblad G., "Completely positive maps and entropy inequalities", *Commun. Math. Phys.*, **40**:2 (1975), 147–151.

10. Ohya M., Petz D., *Quantum entropy and its use*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
11. Parthasarathy K. R., *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, **3**, Academic Press, N. Y.–London, 1967.
12. Сарымсаков Т. А., *Введение в квантовую теорию вероятностей*, Ташкент, Фан, 1985.
13. Schumacher B., Westmoreland M. D., "Sending classical information via noisy quantum channels", *Phys. Rev. A.*, **56**:1 (1997), 131–138.
14. Schumacher B., Westmoreland M., *Optimal signal ensembles*, E-print `quant-ph/9912122`.
15. Shirokov M. E., "The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem", *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159.
16. Shirokov M. E., *On entropic quantities related to the classical capacity of infinite dimensional quantum channels*, E-print `quant-ph/0411091`.
17. Холево А. С., "Квантовые теоремы кодирования", *УМН*, **53**:6 (1998), 193–230.
18. Холево А. С., "Классическая пропускная способность квантовых каналов с ограничениями", *Теория вероятностей и ее применения*, **48**:2 (2003), 359–374.
19. Холево А. С., Широков М. Е., "Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности", *Теория вероятностей и ее применения*, **50**:1 (2005), 98–114.
20. Wehrl A., "General properties of entropy", *Rev. Mod. Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `msh@mi.ras.ru`

Поступило в редакцию
23.12.2005