УДК 519.722

М. Е. Широков

Энтропийные характеристики подмножеств состояний. II

Исследуются свойства χ-емкости как функции множества квантовых состояний в бесконечномерном случае. Рассмотрены различные типы подмножеств состояний, для которых определены χ-емкость и оптимальное среднее. Построены контрпримеры, иллюстрирующие общие результаты. Показана возможность "конечномерной аппроксимации" χ-емкости и оптимального среднего произвольного множества квантовых состояний.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена систематическому изучению свойств квантовой энтропии и χ-емкости[1] и является логическим продолжение работы [11].

В § 2 рассматриваются общие свойства χ-емкости как функции множества состояний (теорема 1 и следствия 1, 4, 5). В частности, исследуются свойства непрерывности χ-емкости по отношению к монотонным семействам множеств и вопрос о существовании минимального замкнутого множества с данной χ-емкостью. Показана устойчивость χ-емкости и оптимального среднего по отношению к квантовому шуму. Получены оценки снизу и сверху для χ-емкости конечных объединений (предложение 1, замечание 3). Из полученных результатов, связанных с χ-емкостью, вытекает несколько наблюдений об общих свойствах множеств состояний и квантовой энтропии (следствия 2, 3, замечание 2, наблюдение, приведенное после следствия 4).

В § 3 общие результаты, полученные в работе [11] и § 2 настоящей статьи, использованы для исследования свойств различных множеств состояний. Получены условия ограниченности и непрерывности сужения энтропии на различные множества состояний (предложения 2, 8, 10 и следствие 6). Определены χ-емкость и оптимальное среднее для различных множеств состояний и исследованы связанные с ними вопросы такие, как существование оптимальной меры, регулярность и др. (предложения 3–7, 9, 10). Построены следующие примеры множеств с конечной χ-емкостью (в пп. 3.1–3.3 и 3.5 соответственно):

i) замкнутое счетное множество, не имеющее оптимальной меры;

ii) замкнутое множество, не содержащее минимального замкнутого подмножества с той же самой χ-емкостью;

iii) убывающая последовательность замкнутых множеств с одинаковой положительной χ-емкостью, пересечение которых имеет нулевую χ-емкость;

iv) замкнутое множество, имеющее оптимальную меру, но не имеющее атомической оптимальной меры.

[1] Эта величина, называемая в зарубежной литературе *the Holevo capacity*, обычно связывается с понятием квантового канала связи (см., например, [9]).

Работа выполнена при поддержке научной программы отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики" и РФФИ (проект № 06-01-00164-а).

В § 4 рассматривается “конструктивный” подход к определению χ-емкости и оптимального среднего для произвольного множества квантовых состояний. Показано, что, подобно случаю энтропии и относительной энтропии, χ-емкость и оптимальное среднее можно сначала определить для множеств квантовых состояний в конечномерном гильбертовом пространстве, а затем расширить это определение на множества квантовых состояний в бесконечномерном гильбертовом пространстве посредством предельного перехода (теорема 2). Такое определение дает принципиальную возможность численной аппроксимации χ-емкости и оптимального среднего произвольного множества квантовых состояний.

Используемые в статье обозначения полностью согласуются с обозначениями, принятыми в ч. I настоящей работы [11].

§ 2. О свойствах χ-емкости

В данном параграфе рассмотрены общие свойства χ-емкости как функции множества состояний и особая роль оптимального среднего. В работе [11] получено достаточное условие существования оптимальной меры для замкнутого множества состояний (теорема 2), которое заключается в выполнении для этого множества одного из двух условий непрерывности. Как будет показано далее, от выполнении этих условий зависят также некоторые другие свойства множества состояний, связанные с χ-емкостью. Поэтому удобно ввести следующее определение.

Определение 1. Произвольное множество $\mathcal{A}$ с конечной χ-емкостью называется *регулярным*, если выполнено одно из следующих условий:

1) $H\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr) < +\infty$ и $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr)$ для любой последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathrm{co}(\mathcal{A})$, H-сходящейся [2] к состоянию $\Omega(\mathcal{A})$;

2) функция $\rho \mapsto H\bigl(\rho \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr)$ непрерывна [3] на множестве $\overline{\mathcal{A}}$.

Заметим, что непрерывность энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ гарантирует регулярность множества $\mathcal{A}$, однако это слишком ограничительное требование. В некотором смысле условия в данном определении являются минимальными требованиями непрерывности, обеспечивающими “хорошие” свойства χ-емкости; в частности, в силу [11, теорема 2] они гарантируют существование оптимальной меры. Эти условия различны: существуют множества, для которых выполнено первое условие, но не выполнено второе, и наоборот. В большинстве примеров, рассмотренных в § 3, множества с конечной χ-емкостью являются регулярными. Примеры нерегулярных множеств с конечной χ-емкостью и следствия этой нерегулярности рассмотрены в пп. 3.1–3.3.

В следующей теореме собраны различные свойства χ-емкости и оптимального среднего, которые будут использованы далее.

Теорема 1. *Имеют место следующие свойства* [4]:

1) $\overline{C}(\mathcal{A}) \geqslant 0$ *для любого множества* $\mathcal{A}$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда множество* $\mathcal{A}$ *состоит из одного состояния*;

2) $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}\bigl(\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})\bigr)$ *и* $\Omega(\mathcal{A}) = \Omega\bigl(\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})\bigr)$ *для любого множества* $\mathcal{A}$;

---

[2] Это значит, что $\lim_{n\to+\infty} H\bigl(\rho_n \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr) = 0$.

[3] Здесь и далее имеется в виду непрерывность относительно следовой нормы.

[4] Во всех утверждениях, в которых упомянуто оптимальное среднее состояние некоторого множества, предполагается, что это множество имеет конечную χ-емкость.

3) *если* $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, *то* $\overline{C}(\mathcal{A})\leqslant\overline{C}(\mathcal{B})$, *причем если имеет место равенство*[5] *в этом неравенстве, то* $\Omega(\mathcal{A})=\Omega(\mathcal{B})$;

4) *если* $\overline{C}(\mathcal{A})<+\infty$, *то множество* $\mathcal{A}$ *предкомпактно и, следовательно,* $\overline{C}(\mathcal{A})=\overline{C}\bigl(\mathrm{Ext}(\overline{\mathcal{A}})\bigr)$;

5) *если* $\mathrm{d}\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr)<1$, *то множество* $\mathcal{A}$ *регулярно и энтропия ограничена на множестве* $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$, *если* $\mathrm{d}\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr)=0$, *то энтропия непрерывна на множестве* $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$;

6) *если* $\{\mathcal{A}_n\}$ – *последовательность множеств такая, что* $\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}_{n+1}$ *для всех* n, *то*

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}(\mathcal{A}_n)=\overline{C}\biggl(\bigcup_n\mathcal{A}_n\biggr),\qquad \lim_{n\to+\infty}\Omega(\mathcal{A}_n)=\Omega\biggl(\bigcup_n\mathcal{A}_n\biggr);$$

7) *если* $\{\mathcal{A}_n\}$ – *последовательность замкнутых множеств такая, что* $\mathcal{A}_n\supseteq\mathcal{A}_{n+1}$ *для всех* n, *то равенства*

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}(\mathcal{A}_n)=\overline{C}\biggl(\bigcap_n\mathcal{A}_n\biggr),\qquad \lim_{n\to+\infty}\Omega(\mathcal{A}_n)=\Omega\biggl(\bigcap_n\mathcal{A}_n\biggr)$$

имеют место при выполнении одного из следующих условий[6]:

a) *множество* $\mathcal{A}_1$ *регулярно и* $\Omega(\mathcal{A}_n)=\Omega(\mathcal{A}_1)$ *для всех* n;

b) *сужение энтропии* $H(\rho)$ *на множество* $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}_1)$ *непрерывно в некоторой предельной точке*[7] ω *последовательности* $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$;

c) *функция* $\rho\mapsto H(\rho\,\|\,\omega)$ *непрерывна на множестве* $\mathcal{A}_1$ *для некоторой предельной точки* ω *последовательности* $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$;

8) *множество* $\mathcal{A}$ *с конечной* χ*-емкостью содержится в максимальном множестве* $\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{A})}$ *с той же самой* χ*-емкостью*[8];

9) *каждое регулярное замкнутое множество* $\mathcal{A}$ *с конечной* χ*-емкостью содержит минимальное замкнутое подмножество с той же самой* χ*-емкостью*[9];

10) *если* $\overline{C}(\mathcal{A})<+\infty$ *и* $\overline{C}(\mathcal{B})<+\infty$, *то* $\overline{C}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})<+\infty$, *в частности* $\overline{C}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})=\max\bigl(\overline{C}(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{B})\bigr)$ *в случае* $\Omega(\mathcal{A})=\Omega(\mathcal{B})$;

11) *если* $\Phi\colon\mathfrak{S}(\mathcal{H})\mapsto\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ – *произвольный канал, то* $\overline{C}\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)\leqslant\overline{C}(\mathcal{A})$, *причем из* $\overline{C}\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A})$ *следует* $\Omega\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)=\Phi\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr)$;

12) *если* $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ – *произвольное семейство каналов из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *в* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *такое, что* $\lim_{t\to+0}\Phi_t(\rho)=\rho$ *для всех состояний* ρ *из* $\mathcal{A}$, *то*[10]

$$\lim_{t\to+0}\overline{C}\bigl(\Phi_t(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A}),\qquad \lim_{t\to+0}\Omega\bigl(\Phi_t(\mathcal{A})\bigr)=\Omega(\mathcal{A}).$$

---

[5] Заметим, что из $\mathcal{A}\subsetneq\mathcal{B}$ не следует, что $\overline{C}(\mathcal{A})<\overline{C}(\mathcal{B})$ даже в случае выпуклых и замкнутых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (см. примеры в § 3).

[6] Эти условия существенны (см. ниже замечание 1).

[7] В силу утверждения 4) множество предельных точек последовательности $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$ не пусто.

[8] Множество называется *максимальным множеством с данной* χ*-емкостью*, если оно не является собственным подмножеством множества с той же самой χ-емкостью.

[9] Множество называется *минимальным замкнутым множеством с данной* χ*-емкостью*, если оно не содержит замкнутых подмножеств с той же самой χ-емкостью.

[10] Это утверждение можно рассматривать как свойство устойчивости χ-емкости и оптимального среднего состояния по отношению к квантовому шуму.

Замечание 1. Требования регулярности и непрерывности в утверждениях 7) и 9) теоремы 1 существенны. Существуют последовательности множеств, для которых утверждение 7) не имеет места, как показывает пример в конце п. 3.3. Пример замкнутого множества с конечной χ-емкостью, не имеющего минимального замкнутого подмножества с той же самой χ-емкостью, рассмотрен в п. 3.2.

Доказательство. Утверждения 1), 2) и первая часть утверждения 3) непосредственно следуют из определения χ-емкости в силу полунепрерывности снизу и выпуклости относительной энтропии. Вторая часть 3) доказывается следующим образом. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\mathcal{B})$. В силу [11, теорема 1] имеет место неравенство $H\bigl(\rho \,\|\, \Omega(\mathcal{B})\bigr) \leqslant \overline{C}(\mathcal{B}) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для всех состояний ρ из $\mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, это неравенство выполнено для всех состояний ρ из $\mathcal{A}$. Таким образом, из утверждения единственности в теореме 1 из работы [11] следует $\Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{B})$.

Первая часть утверждения 4) получена в [11, следствие 5]. Вторая часть вытекает из свойства 2) и теоремы Крейна–Мильмана.

Поскольку в силу [11, теорема 1] имеем $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{A})}$, утверждение 5) следует из [11, предложения 2 и 3].

Для доказательства утверждения 6) заметим, что из 3) следуют существование указанного предела и неравенство

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) \leqslant \overline{C}\biggl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\biggr). \tag{1}$$

Пусть $\{\{\pi_i^k, \rho_i^k\}\}_k$ – произвольная аппроксимирующая последовательность ансамблей для множества $\bigcup_n \mathcal{A}_n$, что означает

$$\lim_{k\to+\infty} \chi(\{\pi_i^k, \rho_i^k\}) = \overline{C}\biggl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\biggr). \tag{2}$$

Поскольку ансамбль – это *конечный* набор состояний, для каждого k существует $n(k)$ такое, что $\rho_i^k \in \mathcal{A}_{n(k)}$ для всех i и, следовательно, $\overline{C}(\mathcal{A}_{n(k)}) \geqslant \chi(\{\pi_i^k, \rho_i^k\})$. Отсюда и из (2) следует выполнение равенства в (1).

Предположим, что $\overline{C}\bigl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\bigr) = \overline{C}\bigl(\overline{\mathrm{co}}\bigl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\bigr)\bigr) < +\infty$. В силу утверждения 4) множество $\overline{\mathrm{co}}\bigl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\bigr)$ компактно. Следовательно, последовательность $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$ имеет частичные пределы. Пусть $\omega = \lim_{k\to+\infty} \Omega(\mathcal{A}_{n_k})$ для некоторой подпоследовательности n_k.

По теореме 1 из [11] для каждого n существует такой ансамбль $\{\pi_i^n, \rho_i^n\}$ состояний из $\mathcal{A}_n$ со средним состоянием $\overline{\rho}_n$, что

$$\chi(\{\pi_i^n, \rho_i^n\}) \geqslant \overline{C}(\mathcal{A}_n) - \frac{1}{n}, \qquad \|\overline{\rho}_n - \Omega(\mathcal{A}_n)\|_1 \leqslant \frac{1}{n}. \tag{3}$$

В силу доказанного равенства в (1) и первого неравенства в (3) последовательность $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ является аппроксимирующей для множества $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ и, следовательно, в силу [11, теорема 1] последовательность $\{\overline{\rho}_n\}_n$ сходится к состоянию $\Omega\bigl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\bigr)$ при $n \to +\infty$. В силу второго неравенства в (3) подпоследовательность $\{\overline{\rho}_{n_k}\}_k$ сходится к состоянию ω. Поэтому $\omega = \Omega\bigl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\bigr)$. Таким образом, каждый частичный предел последовательности $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$ совпадает с состоянием $\Omega\bigl(\bigcup_n \mathcal{A}_n\bigr)$.

Для доказательства 7) заметим, что из 3) следуют существование указанного предела и неравенство

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) \geqslant \overline{C}\biggl(\bigcap_n \mathcal{A}_n\biggr). \tag{4}$$

Дополнительные условия в 7) обеспечивают различные способы доказательства равенства в неравенстве (4).

Рассмотрим сначала условия b) и c). Без ограничения общности можно считать, что существует

$$\lim_{n\to+\infty} \Omega(\mathcal{A}_n) = \omega. \tag{5}$$

В силу [11, теорема 1] для каждого натурального n существует мера μ_n с конечным носителем, лежащим внутри $\mathcal{A}_n$, такая, что

$$\chi(\mu_n) \geqslant \overline{C}(\mathcal{A}_n) - \frac{1}{n}, \qquad \|\overline{\rho}(\mu_n) - \Omega(\mathcal{A}_n)\|_1 \leqslant \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Носители всех мер последовательности $\{\mu_n\}$ лежат в множестве $\mathcal{A}_1$, которое компактно в силу утверждения 4). Поэтому последовательность $\{\mu_n\}$ слабо компактна и содержит подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к некоторой мере μ_*. Из непрерывности отображения $\mu \mapsto \overline{\rho}(\mu)$ в силу соотношений (5), (6) следует, что $\omega = \overline{\rho}(\mu_*) = \lim_{k\to+\infty} \overline{\rho}(\mu_{n_k})$. Используя [7, теорема 6.1], нетрудно видеть, что $\operatorname{supp}\mu_* \subseteq \bigcap_n \mathcal{A}_n$.

Предположим, что выполнено условие b) в 7). Тогда существует

$$\lim_{k\to+\infty} H\bigl(\overline{\rho}(\mu_{n_k})\bigr) = H\bigl(\overline{\rho}(\mu_*)\bigr) = H(\omega) < +\infty \tag{7}$$

и, используя выражение (2) из [11], получаем

$$\chi(\mu_{n_k}) = H\bigl(\overline{\rho}(\mu_{n_k})\bigr) - \widehat{H}(\mu_{n_k})$$

для достаточно больших k. Учитывая (7) и полунепрерывность снизу функционала $\widehat{H}(\mu)$, получаем

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) &= \limsup_{k\to+\infty} \chi(\mu_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} H\bigl(\overline{\rho}(\mu_{n_k})\bigr) - \liminf_{k\to+\infty} \widehat{H}(\mu_{n_k}) \\ &\leqslant H\bigl(\overline{\rho}(\mu_*)\bigr) - \widehat{H}(\mu_*) = \chi(\mu_*) \leqslant \overline{C}\biggl(\bigcap_n \mathcal{A}_n\biggr),\end{aligned}$$

что гарантирует выполнение равенства в (4).

Предположим, что выполнено условие c) утверждения 7). Поскольку это условие означает непрерывность функции $H(\rho\,\|\,\omega)$ на компактном множестве $\mathcal{A}_1$, из определения слабой сходимости следует

$$\lim_{k\to+\infty} \int H(\rho\,\|\,\omega)\mu_{n_k}(d\rho) = \int H(\rho\,\|\,\omega)\mu_*(d\rho) = \chi(\mu_*) \leqslant \overline{C}\biggl(\bigcap_n \mathcal{A}_n\biggr).$$

В силу обобщенного тождества Дональда (см. [11, тождество (4)]) имеем

$$\int H(\rho\,\|\,\omega)\mu_{n_k}(d\rho) = \chi(\mu_{n_k}) + H(\overline{\rho}(\mu_{n_k})\,\|\,\omega) \geqslant \chi(\mu_{n_k})$$

и из предыдущего неравенства получаем

$$\overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right) \geqslant \lim_{k\to+\infty}\int H(\rho\,\|\,\omega)\mu_{n_k}(d\rho) \geqslant \lim_{k\to+\infty}\chi(\mu_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty}\overline{C}(\mathcal{A}_n),$$

что гарантирует выполнение равенства в (4).

Для завершения рассмотрения условий b) и c) утверждения 7) достаточно показать, что предельное состояние ω в (5) является оптимальным средним состоянием множества $\bigcap_n \mathcal{A}_n$. По теореме 1 из [11] $H(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A}_n)) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}_n)$ для любого состояния ρ из $\bigcap_n \mathcal{A}_n$ и для произвольного n. Используя (5), доказанное равенство в (4) и полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$H(\rho\,\|\,\omega) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} H(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A}_n)) \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\overline{C}(\mathcal{A}_n) = \overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right)$$

для всех таких ρ. Из [11, теорема 1] следует, что $\omega = \Omega\bigl(\bigcap_n \mathcal{A}_n\bigr)$.

Рассмотрим условие a) утверждения 7). Заметим, что из предполагаемой регулярности множества $\mathcal{A}_1$ и условия $\Omega(\mathcal{A}_n) = \Omega(\mathcal{A}_1)$ для каждого n следует регулярность множества $\mathcal{A}_n$ для каждого n. В силу [11, теорема 2] для каждого n существует оптимальная мера μ_n с носителем на множестве $\mathcal{A}_n$, для которой $\chi(\mu_n) = \overline{C}(\mathcal{A}_n)$ и $\overline{\rho}(\mu_n) = \Omega(\mathcal{A}_n)$. Если условие 1) в определении 1 выполнено, то соотношение (7) в этом случае очевидно и повторение рассуждений в доказательстве условия b) утверждения 7) завершает доказательство. Если условие 2) в определении 1 выполнено, то рассуждения из доказательства условия c) утверждения 7) применяются непосредственно.

Утверждение 8) следует из [11, теорема 1].

Для доказательства утверждения 9) рассмотрим непустое семейство $\mathfrak{A}$ всех замкнутых подмножеств $\mathcal{A}$, имеющих такую же χ-емкость, что и множество $\mathcal{A}$, снабженное отношением частичного порядка $\prec$, определяемого включением

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}.$$

Ясно, что утверждение 9) означает существование максимального элемента в $\mathfrak{A}$. Поэтому для доказательства 9) достаточно (в силу леммы Цорна) показать, что произвольная цепь в $\mathfrak{A}$ имеет максимальный элемент. Максимальным элементом для данной цепи будет пересечение всех элементов – подмножеств этой цепи – при условии, что это пересечение есть элемент $\mathfrak{A}$. Поскольку 4) гарантирует компактность множества $\mathcal{A}$, пересечение *произвольного* убывающего семейства подмножеств множества $\mathcal{A}$ совпадает с пересечением некоторого его *счетного* подсемейства. Таким образом, достаточно показать, что

$$\overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{B}_n\right) = \overline{C}(\mathcal{A})$$

для любой убывающей последовательности $\{\mathcal{B}_n\}$ замкнутых подмножеств множества $\mathcal{A}$ такой, что $\overline{C}(\mathcal{B}_n) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для всех n. Но данное свойство следует из регулярности множества $\mathcal{A}$ и утверждения 7) с первым условием, поскольку утверждение 3) гарантирует $\Omega(\mathcal{B}_n) = \Omega(\mathcal{A})$ для всех n.

Первая часть утверждения 10) следует из приведенного ниже предложения 1. Вторая часть является следствием утверждения 3) и теоремы 1 из [11], поскольку

$$H(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A})) \leqslant \max\bigl(\overline{C}(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{B})\bigr), \qquad \Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{B})$$

для всех ρ из $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Первая часть утверждения 11) непосредственно вытекает из определения χ-емкости и свойства монотонности относительной энтропии.

Для доказательства второй части 11) предположим, что $\overline{C}(\Phi(\mathcal{A}))=\overline{C}(\mathcal{A})$. Используя свойство монотонности относительной энтропии и [11, теорема 1], получаем

$$H\bigl(\Phi(\rho)\,\|\,\Phi(\Omega(\mathcal{A}))\bigr)\leqslant H\bigl(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{A})\bigr)\leqslant\overline{C}(\mathcal{A})=\overline{C}\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)$$

для любого состояния ρ из $\mathcal{A}$. Из [11, теорема 1] следует, что $\Omega\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)=\Phi\bigl(\Omega(\mathcal{A})\bigr)$.

Утверждение 12) следует из первой части 11) и приведенной ниже леммы 1.

В силу утверждения 4) теоремы 1 и определения 1 получаем следующую модификацию теоремы 2 из [11].

Следствие 1. *Достаточным условием существования оптимальной меры для замкнутого множества $\mathcal{A}$ с конечной χ-емкостью является регулярность множества* $\operatorname{Ext}(\mathcal{A})$.

Из утверждения 5) теоремы 1 вытекает следующее наблюдение.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое выпуклое множество с конечной χ-емкостью. Тогда*:

1) *если* $\mathrm{d}(\rho)<1$ *для всех ρ из $\mathcal{A}$, то множество $\mathcal{A}$ регулярно и энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A}$*;

2) *если* $\mathrm{d}(\rho)=0$ *для всех ρ из $\mathcal{A}$, то энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$*.

Замечание 2. Следствие 2 показывает, в частности, что из ограниченности энтропии на некотором замкнутом выпуклом множестве состояний с нулевым коэффициентом убывания (например, гауссовских состояний) следует непрерывность энтропии на этом множестве.

Утверждения 4) и 6) теоремы 1 дают достаточное условие компактности объединений множеств состояний.

Следствие 3. *Если $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность множеств состояний такая, что $\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}_{n+1}$ и $\overline{C}(\mathcal{A}_n)\leqslant M<+\infty$ для всех n, то множество $\bigcup_n\mathcal{A}_n$ предкомпактно*.

Из утверждения 11) теоремы 1 вытекает следующее свойство оптимальных средних.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ-емкостью $\overline{C}(\mathcal{A})$. Тогда $\Omega(\mathcal{A})$ – инвариантное состояние для любого канала Φ такого, что $\Phi(\mathcal{A})\subseteq\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ и $\overline{C}\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A})$. В частности, $\Omega(\mathcal{A})$ – инвариантное состояние для любого автоморфизма*[11] *α пространства $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такого, что $\alpha(\mathcal{A})\subseteq\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$*.

Пусть $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ – множество всех каналов Φ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ таких, что $\Phi(\mathcal{A})\subseteq\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ и $\overline{C}\bigl(\Phi(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A})$. Это множество непусто и содержит все автоморфизмы α пространства $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такие, что $\alpha(\mathcal{A})\subseteq\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$.

Из следствия 4 вытекает следующее наблюдение: *для произвольного множества $\mathcal{A}$ с конечной χ-емкостью множество $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ содержит по крайней мере одно инвариантное состояние для всех каналов из $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$*.

Из [11, теорема 1] и следствия 4 получаем следующий результат.

[11]По теореме Вигнера каждый автоморфизм $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет вид $U(\,\cdot\,)U^*$, где U – либо унитарный, либо антиунитарный оператор в $\mathcal{H}$ [10].

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное множество состояний и $\mathfrak{F}_0$ – произвольное подмножество $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$. Пусть* $\operatorname{Inv}\mathfrak{F}_0$ *– множество инвариантных состояний для всех каналов из $\mathfrak{F}_0$. Тогда χ-емкость множества $\mathcal{A}$ определяется выражением*

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \inf_{\sigma\in\operatorname{Inv}\mathfrak{F}_0\cap\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})}\ \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma),$$

в котором подразумевается, что $\overline{C}(\mathcal{A}) = +\infty$, если $\operatorname{Inv}\mathfrak{F}_0\cap\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}) = \varnothing$.

В частности, если в $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ существует единственное состояние σ_0, инвариантное для всех каналов из $\mathfrak{F}_0$, то $\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\rho\in\mathcal{A}} H(\rho\,\|\,\sigma_0)$, и если $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$, то $\Omega(\mathcal{A}) = \sigma_0$.

Следствия 4 и 5 позволяют определять или по крайней мере локализировать оптимальное среднее состояние и вычислять χ-емкость произвольного множества состояний $\mathcal{A}$ путем поиска достаточно большого семейства $\mathfrak{F}_0$ каналов из $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$. Этот прием будет использован в следующем параграфе.

Рассмотрим вопрос об оценке χ-емкости конечных объединений.

Предложение 1. *Если $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^n$ – конечный набор множеств, то*

$$\max_{\{\lambda_k\}}\biggl(\sum_{k=1}^n \lambda_k\overline{C}(\mathcal{A}_k) + \chi\bigl(\{\lambda_k,\Omega(\mathcal{A}_k)\}\bigr)\biggr) \leqslant \overline{C}\biggl(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k\biggr) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\overline{C}(\mathcal{A}_k) + \log n,$$

где первый максимум берется по всем распределениям вероятностей с n исходами.

В случае $\overline{C}(\mathcal{A}_k) = C$ для всех $k = \overline{1,n}$ имеет место неравенство

$$C + \overline{C}\bigl(\{\Omega(\mathcal{A}_1),\dots,\Omega(\mathcal{A}_n)\}\bigr) \leqslant \overline{C}\biggl(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k\biggr) \leqslant C + \log n.$$

Доказательство. В силу [11, теорема 1] для каждого натурального m и каждого $k = \overline{1,n}$ существует ансамбль μ_k^m такой, что

$$\chi(\mu_k^m) \geqslant \overline{C}(\mathcal{A}_k) - \frac{1}{m}, \qquad \bigl\|\overline{\rho}(\mu_k^m) - \Omega(\mathcal{A}_k)\bigr\|_1 \leqslant \frac{1}{m}. \tag{8}$$

Зафиксировав произвольное распределение вероятностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, рассмотрим ансамбль $\mu_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k\mu_k^m$ состояний из $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$. Используя [11, лемма 1], полунепрерывность снизу относительной энтропии и неравенства (8), получаем

$$\begin{aligned}\overline{C}\biggl(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k\biggr) &\geqslant \liminf_{m\to+\infty}\chi(\mu_m) = \liminf_{m\to+\infty}\biggl(\sum_{k=1}^n \lambda_k\chi(\mu_k^m) + \chi\bigl(\{\lambda_k,\overline{\rho}(\mu_k^m)\}\bigr)\biggr)\\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k\overline{C}(\mathcal{A}_k) + \liminf_{m\to+\infty}\chi\bigl(\{\lambda_k,\overline{\rho}(\mu_k^m)\}\bigr) \geqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k\overline{C}(\mathcal{A}_k) + \chi\bigl(\{\lambda_k,\Omega(\mathcal{A}_k)\}\bigr),\end{aligned}$$

откуда следует оценка снизу для χ-емкости объединения.

Для доказательства оценки сверху заметим, что произвольный ансамбль μ состояний из $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ можно представить в виде $\sum_{k=1}^n \lambda_k\mu_k$, где μ_k – ансамбль состояний из $\mathcal{A}_k$ при каждом $k=\overline{1,n}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ – распределение вероятностей. Используя [11, лемма 1] и предложение 3 из следующего параграфа, получаем

$$\chi(\mu)=\sum_{k=1}^n\lambda_k\chi(\mu_k)+\chi\bigl(\{\lambda_k,\overline{\rho}(\mu_k)\}\bigr)\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\overline{C}(\mathcal{A}_k)+\log n.$$

Замечание 3. Предложение 1 показывает, что χ-емкость объединения множеств с данной χ-емкостью зависит от взаимного расположения оптимальных средних состояний этих множеств. Если оптимальные средние состояния совпадают друг с другом, то в силу утверждения 10) теоремы 1 χ-емкость объединения минимальна и равна максимальной χ-емкости объединяемых множеств. Чем больше расхождение оптимальных средних, тем больше χ-емкость объединения. Наиболее очевидно это проявляется в случае объединения двух множеств, для которого из предложения 1 и оценки снизу относительной энтропии (см. [11, неравенство (1)]) следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\geqslant\max_{\lambda\in[0,1]}\biggl(\lambda\overline{C}(\mathcal{A})+(1-\lambda)\overline{C}(\mathcal{B})+\frac{1}{2}\,\lambda(1-\lambda)\|\Omega(\mathcal{A})-\Omega(\mathcal{B})\|_1^2\biggr).$$

Заметим также, что нижняя и верхняя границы в предложении 1 совпадают тогда и только тогда, когда $\overline{C}(\mathcal{A}_i)=\overline{C}(\mathcal{A}_j)$ и

$$\bigcup_{\rho\in\mathcal{A}_i}\operatorname{supp}\rho\perp\bigcup_{\rho\in\mathcal{A}_j}\operatorname{supp}\rho\quad\text{для всех}\quad i\neq j.$$

В доказательстве теоремы 1 был использован следующий результат, который также лежит в основе доказательства теоремы 2 в § 4.

Лемма 1. *Пусть* $\{\Psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– семейство непрерывных отображений из множества* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *в себя, индексированное упорядоченным множеством* Λ, *такое, что* $\lim_\lambda\Psi_\lambda(\rho)=\rho$ *для всех состояний* ρ *из некоторого множества состояний* $\mathcal{A}$. *Тогда*:

1) $\liminf_\lambda\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)\geqslant\overline{C}(\mathcal{A})$;
2) *если* $\lim_\lambda\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A})<+\infty$, *то* $\lim_\lambda\Omega\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)=\Omega(\mathcal{A})$.

Доказательство. Утверждение 1) леммы следует из полунепрерывности снизу относительной энтропии. Действительно, для произвольного $\varepsilon>0$ существует ансамбль $\{\pi_i,\rho_i\}$ такой, что

$$\chi(\{\pi_i,\rho_i\})\geqslant C(\varepsilon)=\begin{cases}\overline{C}(\mathcal{A})-\varepsilon, & \overline{C}(\mathcal{A})<+\infty,\\ \varepsilon, & \overline{C}(\mathcal{A})=+\infty.\end{cases}$$

Используя полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$\liminf_\lambda\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)\geqslant\liminf_\lambda\chi\bigl(\{\pi_i,\Psi_\lambda(\rho_i)\}\bigr)\geqslant\chi(\{\pi_i,\rho_i\})\geqslant C(\varepsilon).$$

В силу произвольности ε из данного неравенства следует утверждение 1) леммы.

Пусть $\lim_\lambda\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)=\overline{C}(\mathcal{A})<+\infty$. В силу [11, теорема 1] для любого $\varepsilon>0$ существует ансамбль $\{\pi_i,\rho_i\}$ такой, что

$$\chi\bigl(\{\pi_i,\rho_i\}\bigr)\geqslant\overline{C}(\mathcal{A})-\varepsilon,\qquad\biggl\|\sum_i\pi_i\rho_i-\Omega(\mathcal{A})\biggr\|_1<\varepsilon.\tag{9}$$

Рассуждения из первой части доказательства показывают существование такого λ^1_ε, что

$$\chi\bigl(\{\pi_i,\Psi_\lambda(\rho_i)\}\bigr)\geqslant\chi\bigl(\{\pi_i,\rho_i\}\bigr)-\varepsilon\quad\forall\,\lambda\geqslant\lambda^1_\varepsilon.$$

По предположению существует такое λ^2_ε, что

$$\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)\leqslant\overline{C}(\mathcal{A})+\varepsilon\quad\forall\,\lambda\geqslant\lambda^2_\varepsilon.$$

Таким образом, для всех $\lambda\geqslant\max(\lambda^1_\varepsilon,\lambda^2_\varepsilon)$ имеем

$$0\leqslant\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)-\chi\bigl(\{\pi_i,\Psi_\lambda(\rho_i)\}\bigr)\leqslant\overline{C}(\mathcal{A})-\chi\bigl(\{\pi_i,\rho_i\}\bigr)+2\varepsilon\leqslant3\varepsilon$$

и, используя [11, следствие 4], получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\biggl\|\sum_i\pi_i\Psi_\lambda(\rho_i)-\Omega\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)\biggr\|_1^2&\leqslant H\biggl(\sum_i\pi_i\Psi_\lambda(\rho_i)\,\|\,\Omega\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)\biggr)\\&\leqslant\overline{C}\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)-\chi\bigl(\{\pi_i,\Psi_\lambda(\rho_i)\}\bigr)\leqslant3\varepsilon.\end{aligned}\tag{10}$$

Из условия непрерывности семейства $\{\Psi_\lambda\}$ следует существование такого λ^3_ε, что

$$\biggl\|\sum_i\pi_i\Psi_\lambda(\rho_i)-\sum_i\pi_i\rho_i\biggr\|_1\leqslant\varepsilon\quad\forall\,\lambda\geqslant\lambda^3_\varepsilon.\tag{11}$$

Используя (9)–(11), получаем

$$\begin{aligned}\bigl\|\Omega\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)-\Omega(\mathcal{A})\bigr\|_1&\leqslant\biggl\|\Omega\bigl(\Psi_\lambda(\mathcal{A})\bigr)-\sum_i\pi_i\Psi_\lambda(\rho_i)\biggr\|_1\\&+\biggl\|\sum_i\pi_i\Psi_\lambda(\rho_i)-\sum_i\pi_i\rho_i\biggr\|_1+\biggl\|\sum_i\pi_i\rho_i-\Omega(\mathcal{A})\biggr\|_1\leqslant2\varepsilon+\sqrt{6\varepsilon}\end{aligned}$$

для всех $\lambda\geqslant\max(\lambda^1_\varepsilon,\lambda^2_\varepsilon,\lambda^3_\varepsilon)$. В силу произвольности ε это неравенство доказывает утверждение 2) леммы.

§ 3. Примеры

В настоящем параграфе рассматриваются несколько типов множеств состояний, для исследования которых применяются общие результаты из [11] и предыдущего параграфа.

3.1. Конечные множества состояний и сходящиеся последовательности. В силу утверждения 4) теоремы 1 каждое множество состояний с конечной χ-емкостью является предкомпактным. Рассмотрим следующие простейшие примеры предкомпактных множеств состояний:

1) конечный набор состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^N$;

2) последовательность состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящаяся к некоторому состоянию ρ_*;

3) последовательность состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$, H-сходящаяся[12] к некоторому состоянию ρ_*.

Свойства сужения энтропии на выпуклые замыкания этих множеств рассмотрены в следующем предложении.

[12]Это значит, что $\lim_{n\to+\infty}H(\rho_n\,\|\,\rho_*)=0$.

Предложение 2. 1) *Пусть* $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ – *конечный набор состояний из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. *Энтропия непрерывна на (замкнутом) множестве* $\mathrm{co}(\{\rho_n\}_{n=1}^N)$ *тогда и только тогда, когда*

$$H(\rho_n) < +\infty \quad \textit{для всех} \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

2) *Пусть* $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – *последовательность состояний, сходящаяся к состоянию* ρ_*. *Энтропия ограничена на множестве* $\overline{\mathrm{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ *тогда и только тогда, когда существует* $\mathfrak{H}$*-оператор* H *с* $\mathrm{g}(H) < +\infty$ *такой, что*

$$\sup_n \operatorname{Tr} \rho_n H < +\infty.$$

Энтропия непрерывна на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$, *если выполнено одно из следующих равносильных условий*:

(i) $H(\rho_n) < +\infty$ *для всех* n, $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\rho_*) < +\infty$ *и существует состояние* σ *такое, что* $H(\rho_n \,\|\, \sigma) < +\infty$ *для всех* n *и*

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n \,\|\, \sigma) = H(\rho_* \,\|\, \sigma) < +\infty;$$

(ii) *существует* $\mathfrak{H}$*-оператор* H *с* $\mathrm{g}(H) = 0$ *такой, что*

$$\sup_n \operatorname{Tr} \rho_n H < +\infty;$$

(iii) *существует* $\mathfrak{H}$*-оператор* H *с* $\mathrm{g}(H) < +\infty$ *такой, что* $\operatorname{Tr} \rho_n H < +\infty$ *для всех* n *и*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Tr} \rho_n H = \operatorname{Tr} \rho_* H < +\infty.$$

3) *Пусть* $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – *последовательность состояний,* H*-сходящаяся к состоянию* ρ_*. *Энтропия ограничена на множестве* $\overline{\mathrm{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n H(\rho_n) < +\infty.$$

Энтропия непрерывна на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ *тогда и только тогда, когда* $H(\rho_n) < +\infty$ *для всех* n *и*

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\rho_*) < +\infty.$$

Замечание 4. Интересно сравнить условия ограниченности и непрерывности энтропии для сходящейся и для H-сходящейся последовательностей. Условия для H-сходящейся последовательности выглядят как естественное обобщение соответствующих условий для конечного множества состояний, в то время как условия для сходящейся последовательности включают в себя дополнительные требования. Эти требования являются существенными, как показывает пример сходящейся последовательности состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такой, что энтропия $H(\rho_n)$ конечна для всех n и

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H\Bigl(\lim_{n\to+\infty} \rho_n\Bigr) < +\infty,$$

но энтропия не ограничена на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ (см. пример в конце настоящего пункта).

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{A} = \{\rho_i\}_{i=1}^N$. Необходимость условия непрерывности очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из этого условия и общих свойств энтропии [14] следует ее ограниченность на замкнутом множестве $\mathrm{co}(\mathcal{A})$, а значит, и конечность χ-емкости этого множества. В силу [11, теорема 1] существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{A})$ такое, что

$$H\big(\rho_n \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\big) = \operatorname{Tr}\rho_n\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big) - H(\rho_n) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$$

и, следовательно, $\operatorname{Tr}\rho_n\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) + \max_n H(\rho_n) < +\infty$ для всех $n = \overline{1,N}$. Таким образом, линейная функция $\operatorname{Tr}\rho\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big)$ конечна и, следовательно, непрерывна на *конечном* множестве $\mathcal{A}$, что в силу [11, предложение 4] гарантирует непрерывность энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$.

2) Условие ограниченности для этого случая следует из [11, предложение 1], а условия непрерывности – из [11, предложение 4].

3) Пусть $\mathcal{A} = \{\rho_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Необходимость условий ограниченности и непрерывности для этого случая очевидна. Для доказательства достаточности условия ограниченности заметим, что χ-емкость множества $\mathcal{A}$ конечна (см. предложение 3). В силу [11, теорема 1] существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{A})$ такое, что

$$H\big(\rho_n \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\big) = \operatorname{Tr}\rho_n\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big) - H(\rho_n) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$$

для всех n. Следовательно,

$$\sup_n \operatorname{Tr}\rho_n\big(-\log\Omega(\mathcal{A})\big) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) + \sup_n H(\rho_n) < +\infty,$$

что в силу [11, предложение 1] гарантирует ограниченность энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$. Достаточность условия непрерывности следует из первого условия непрерывности для случая 2) с $\sigma = \rho_*$.

Вопросы, связанные с χ-емкостью конечных наборов состояний и сходящихся последовательностей, рассмотрены в следующем предложении.

Предложение 3. 1) *Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ – конечный набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда множество $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ регулярно,*

$$\overline{C}(\{\rho_n\}_{n=1}^N) \leqslant \log N$$

и существует оптимальный ансамбль $\mu_* = \{\pi_n, \rho_n\}_{n=1}^N$ для множества $\{\rho_n\}_{n=1}^N$.

2) *Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний, сходящаяся к состоянию ρ_*. χ-емкость множества $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ конечна тогда и только тогда, когда существует состояние σ такое, что*[13]

$$\sup_n H(\rho_n \,\|\, \sigma) < +\infty.$$

3) *Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний, H-сходящаяся к состоянию ρ_*. Тогда χ-емкость множества $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ конечна, причем*

$$\overline{C}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}) \leqslant \inf_m \max\left(\sup_{n>m} H(\rho_n \,\|\, \rho_*), \log m\right) + \log 2.$$

[13] Приведенный ниже пример показывает, что χ-емкость сходящейся последовательности может быть бесконечной.

В случаях 1)–3) существование оптимальной меры для множества $\{\rho_n\}$ – ансамбля $\mu_* = \{\pi_n, \rho_n\}$ – равносильно существованию распределения вероятностей $\{\pi_n\}$ и положительного числа C, удовлетворяющих следующей системе:

$$\begin{aligned} H\Bigl(\rho_n \,\Big\|\, \sum_k \pi_k \rho_k\Bigr) &= C, \qquad \pi_n > 0, \\ H\Bigl(\rho_n \,\Big\|\, \sum_k \pi_k \rho_k\Bigr) &\leqslant C, \qquad \pi_n = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Если данная система имеет решение, то $\overline{C}(\{\rho_n\}) = C$ и $\Omega(\{\rho_n\}) = \sum_n \pi_n \rho_n$.

Доказательство. 1) Для доказательства оценки сверху для χ-емкости множества $\mathcal{A} = \{\rho_n\}_{n=1}^N$ достаточно заметить, что $\mathrm{co}(\mathcal{A})$ есть выходное множество канала $\sigma \mapsto \sum_{n=1}^N \langle n|\sigma|n\rangle \rho_n$ из пространства состояний в N-мерном гильбертовом пространстве с ортонормированным базисом $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$, и использовать свойство монотонности относительной энтропии [5]. Из конечности χ-емкости в силу [11, теорема 1] следует конечность относительной энтропии $H\bigl(\rho_n \,\|\, \Omega(\mathcal{A})\bigr)$ для всех n, а значит, и регулярность множества $\mathcal{A}$. Существование оптимальной меры – оптимального ансамбля – следует из [11, теорема 2].

2) Утверждение непосредственно следует из [11, теорема 1].

3) Для доказательства оценки сверху для χ-емкости множества $\mathcal{A} = \{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ представим это множество как объединение конечного множества $\mathcal{A}_1 = \{\rho_n\}_{n=1}^m$ и множества $\mathcal{A}_2 = \{\rho_n\}_{n=m+1}^{+\infty}$. Используя [11, теорема 1], предложение 1, и утверждение 1) данного предложения, получаем

$$\begin{aligned} \overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) &\leqslant \max\bigl(\overline{C}(\mathcal{A}_1), \overline{C}(\mathcal{A}_2)\bigr) + \log 2 \\ &\leqslant \max\Bigl(\sup_{n>m} H(\rho_n \,\|\, \rho_*), \log m\Bigr) + \log 2. \end{aligned}$$

Если $\{\pi_n\}$ – оптимальное распределение вероятностей, то в силу [11, предложение 7] оно удовлетворяет системе (12) с $C = \overline{C}(\{\rho_n\})$. Обратно, если $(\{\pi_n\}, C)$ – решение этой системы, то, используя [11, вторая часть теоремы 1], легко видеть, что ансамбль $\{\pi_n, \rho_n\}$ является оптимальным для множества $\{\rho_n\}$ и $C = \overline{C}(\{\rho_n\})$.

Рассмотрим конечные множества состояний.

Если $N = 2$, то $\Omega(\{\rho_1, \rho_2\}) = \pi\rho_1 + (1-\pi)\rho_2$, где число π однозначно определяется уравнением

$$H\bigl(\rho_1 \,\|\, \pi\rho_1 + (1-\pi)\rho_2\bigr) = H\bigl(\rho_2 \,\|\, \pi\rho_1 + (1-\pi)\rho_2\bigr),$$

обе части которого равны $\overline{C}(\{\rho_1, \rho_2\})$. В случае $N > 2$ ситуация может быть более сложной. Множество $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ может содержать подмножество $\{\rho_{n_1}, \dots, \rho_{n_{N'}}\}$, $N' < N$, такое, что $\overline{C}(\{\rho_{n_1}, \dots, \rho_{n_{N'}}\}) = \overline{C}(\{\rho_1, \dots, \rho_N\})$. Это означает, что некоторые элементы в оптимальном распределении вероятностей $\{\pi_n\}$ равны нулю. Действительно, такая ситуация имеет место, если к множеству $\{\rho_1, \rho_2\}$ добавить произвольное состояние ρ_3 такое, что $H\bigl(\rho_3 \,\|\, \Omega(\{\rho_1, \rho_2\})\bigr) \leqslant \overline{C}(\{\rho_1, \rho_2\})$. Используя [11, теорема 1], легко видеть, что $\Omega(\{\rho_1, \rho_2\}) = \Omega(\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\})$ и $\overline{C}(\{\rho_1, \rho_2\}) = \overline{C}(\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\})$ в этом случае. Это простейший пример, показывающий, что из $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ не следует $\overline{C}(\mathcal{A}) < \overline{C}(\mathcal{B})$.

Существуют два случая, в которых оптимальное среднее состояние совпадает с равномерным средним состоянием

$$\Omega\bigl(\{\rho_n\}_{n=1}^N\bigr) = N^{-1}\sum_{n=1}^N \rho_n.$$

Первый случай имеет место, когда состояния $\rho_1,\dots,\rho_N$ образуют орбиту некоторой группы автоморфизмов $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (см. п. 3.5). Второй случай имеет место, когда носители состояний $\rho_1,\dots,\rho_N$ лежат во взаимно ортогональных подпространствах. Именно в этом случае χ-емкость достигает максимального значения $\log N$ независимо от вида состояний $\rho_1,\dots,\rho_N$ и от значений их энтропии. Это следует из равенства

$$H\biggl(\rho_n \,\Big\|\, N^{-1}\sum_{k=1}^N \rho_k\biggr) = H(\rho_n\,\|\,N^{-1}\rho_n) + 1 - N^{-1} = \log N, \qquad n=\overline{1,N},$$

полученного с использованием общих свойств относительной энтропии [6], [14].

Следующий пример, в котором рассмотрена сходящаяся последовательность состояний, показывает, в частности, что система (12), определяющая оптимальное распределение вероятностей и значение χ-емкости, может быть решена в некоторых нетривиальных случаях.

Пример 1 (сходящаяся последовательность состояний). Пусть $\{|n\rangle\}$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}$, и пусть $\{q_n\}$ – последовательность чисел из отрезка $[0,1]$, сходящаяся к нулю. Для данного $\varepsilon\in[0,1]$ рассмотрим множество $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$, состоящее из счетного числа состояний

$$\rho_n^{\pm} = (1-q_n)|1\rangle\langle 1| + q_n|n\rangle\langle n| \pm \eta_n(q_n,\varepsilon)\sqrt{(1-q_n)q_n}\,(|1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle 1|), \qquad n\geqslant 2,$$

где параметр $\eta_n(q_n,\varepsilon)\in[0,1]$ определяется условием

$$H(\rho_n^{\pm}) = (1-\varepsilon)h_2(q_n) = -(1-\varepsilon)\bigl((1-q_n)\log(1-q_n) + q_n\log q_n\bigr).$$

Таким образом, ε можно рассматривать как параметр “чистоты” состояний в последовательности. Если $\varepsilon=0$, то $\eta_n(q_n,\varepsilon)=0$ и все состояния $\rho_n^+=\rho_n^-$, $n\geqslant 2$, имеют диагональную матрицу в базисе $\{|n\rangle\}$ и максимальную энтропию; если $\varepsilon=1$, то $\eta_n(q_n,\varepsilon)=1$ и все состояния $\rho_n^{\pm}$, $n\geqslant 2$, чистые.

Множество $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ можно рассматривать как последовательность, сходящуюся к состоянию $\rho_1=|1\rangle\langle 1|$.

Предложение 4. 1) *χ-емкость множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ конечна тогда и только тогда, когда существует положительное λ такое, что*

$$\sum_n \exp\biggl(-\frac{\lambda}{q_n}\biggr) < +\infty. \tag{13}$$

2) *Если условие (13) выполнено, то необходимое и достаточное условие существования оптимальной меры – оптимального ансамбля $\mu_*=\{\pi_n^{\pm},\rho_n^{\pm}\}$ – для множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ определяется неравенством*

$$\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{1+\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\biggl(-\frac{\lambda^*_{\{q_n\}}}{q_n}\biggr) \geqslant 1, \tag{14}$$

в котором

$$\lambda^*_{\{q_n\}} = \inf\biggl\{\lambda\colon\ \sum_n \exp\biggl(-\frac{\lambda}{q_n}\biggr) < +\infty\biggr\}.$$

3) *Если условия* (13) *и* (14) *с данным* ε *выполнены для последовательности* $\{q_n\}$, *то*:

(i) χ-*емкость множества* $\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}$ *определяется выражением*

$$\overline{C}\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr) = \lambda^\varepsilon_{\{q_n\}} - \log \pi^\varepsilon_{\{q_n\}};$$

(ii) *оптимальное среднее* $\Omega\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)$ *множества* $\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}$ *имеет вид*

$$\pi^\varepsilon_{\{q_n\}}|1\rangle\langle 1| + \pi^\varepsilon_{\{q_n\}} \sum_{n>1} \Bigl(q_n(1-q_n)^{\frac{(1-q_n)}{q_n}}\Bigr)^{(1-\varepsilon)} \exp\biggl(-\frac{\lambda^\varepsilon_{\{q_n\}}}{q_n}\biggr)|n\rangle\langle n|;$$

(iii) *оптимальное распределение вероятностей* $\{\pi^\pm_n\}$ *имеет вид*

$$\pi^\pm_1 = 0, \quad \pi^\pm_n = \frac{1}{2}\,\pi^\varepsilon_{\{q_n\}} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\biggl(-\frac{\lambda^\varepsilon_{\{q_n\}}}{q_n}\biggr), \quad n \geqslant 2,$$

где $\lambda^\varepsilon_{\{q_n\}}$ – *единственное решение уравнения*

$$\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{1+\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\biggl(-\frac{\lambda}{q_n}\biggr) = 1,$$

а $\pi^\varepsilon_{\{q_n\}} = \Bigl(\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\Bigl(-\frac{\lambda^\varepsilon_{\{q_n\}}}{q_n}\Bigr)\Bigr)^{-1} \in [0,1]$.

4) *Условие* (13) *равносильно ограниченности энтропии на множестве* $\overline{\mathrm{co}}\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)$ *при любом* ε.

5) *Состояние с максимальной энтропией для множества* $\overline{\mathrm{co}}\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)$ *существует при некотором, а значит, и при любом* ε *тогда и только тогда, когда для последовательности* $\{q_n\}$ *выполнены условия* (13) *и* (14) *при* $\varepsilon = 1$. *В этом случае*

$$\Gamma\bigl(\overline{\mathrm{co}}\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)\bigr) = \pi^1_{\{q_n\}}|1\rangle\langle 1| + \pi^1_{\{q_n\}} \sum_{n>1} \exp\biggl(-\frac{\lambda^1_{\{q_n\}}}{q_n}\biggr)|n\rangle\langle n|$$

при любом ε, *где* $\pi^1_{\{q_n\}}$ *и* $\lambda^1_{\{q_n\}}$ – *введенные выше параметры*[14].

6) *Если условие* (13) *выполнено при любом* $\lambda > 0$, *то энтропия непрерывна на множестве* $\overline{\mathrm{co}}\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)$ *при любом* ε.

На рис. 1 показаны результаты вычисления χ-емкости множества $\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}$ как функции параметра ε для различных последовательностей $\{q_n\}$.

Доказательство. В силу [11, теорема 1] конечность χ-емкости множества $\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}$ означает существование в $\overline{\mathrm{co}}\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)$ оптимального среднего состояния $\Omega\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)$ такого, что

$$\sup_{n>1} H\bigl(\rho^\pm_n \,\|\, \Omega\bigl(\mathcal{S}^\varepsilon_{\{q_n\}}\bigr)\bigr) < +\infty. \tag{15}$$

[14] Интересно сравнить это наблюдение с результатами предложения 1 из [11] в случае $\mathfrak{H}$-оператора $H = \sum_{n=2}^{+\infty} q_n^{-1}|n\rangle\langle n|$.

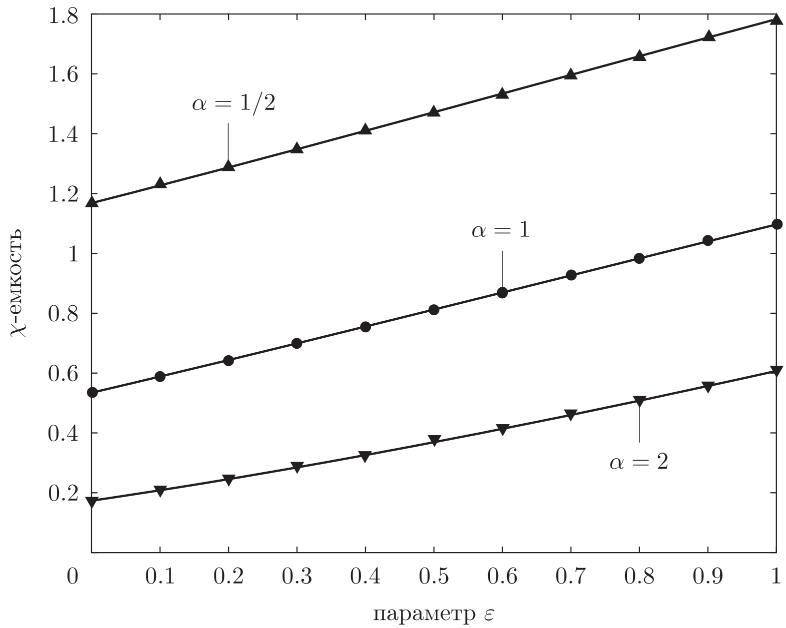

Рис. 1. χ-емкость множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ как функция параметра ε для последовательностей $\{q_n = n^{-\alpha}\}_{n\geqslant 2}$, $\alpha = 1/2, 1, 2$

В силу [1, лемма 1] оптимальное среднее состояние может быть представлено в виде

$$\Omega\bigl(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\bigr) = \pi_1\rho_1 + \sum_{n>1,\pm} \pi_n^{\pm}\rho_n^{\pm}. \tag{16}$$

Поскольку множество $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ инвариантно относительно действия автоморфизма $U(\,\cdot\,)\,U^*$, где U – унитарный оператор, диагонализируемый в базисе $\{|n\rangle\}$ и имеющий собственные значения ± 1, следствие 4 показывает, что состояние $\Omega\bigl(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\bigr)$ инвариантно относительно действия данного автоморфизма и, следовательно, диагонализируемо в базисе $\{|n\rangle\}$. Это значит, что $\pi_n^+ = \pi_n^- = \frac{1}{2}\pi_n$ для всех $n>1$ в (16) при некотором распределении вероятностей $\{\pi_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Поэтому

$$\Omega\bigl(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\bigr) = \pi|1\rangle\langle 1| + \sum_{n>1} \pi_n q_n |n\rangle\langle n|, \tag{17}$$

где $\pi = \pi_1 + \sum_{n>1}(1-q_n)\pi_n$. Таким образом,

$$H\bigl(\rho_1 \,\|\, \Omega\bigl(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\bigr)\bigr) = -\log\pi, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} H\bigl(\rho_n^{\pm} \,\|\, \Omega\bigl(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\bigr)\bigr) &= -(1-q_n)\log\pi - q_n\log(\pi_n q_n) \\ &\quad + (1-\varepsilon)\bigl((1-q_n)\log(1-q_n) + q_n\log q_n\bigr) = -(1-q_n)\log\pi \\ &\quad - q_n\log\pi_n - \varepsilon q_n\log q_n + (1-\varepsilon)(1-q_n)\log(1-q_n), \qquad n>1. \end{aligned} \tag{19}$$

Поскольку $q_n \to 0$ при $n \to +\infty$, условие (15) равносильно конечности $\sup_{n>1} q_n(-\log\pi_n)$. Нетрудно видеть, что существование распределения вероятностей $\{\pi_n\}$, удовлетворяющего этому условию, равносильно существованию положительного λ такого, что $\sum_n \exp\bigl(-\frac{\lambda}{q_n}\bigr) < +\infty$.

Заметим, что из (15) и (19) следует $\pi_n > 0$ для всех $n > 1$. Учитывая это, а также (18) и (19), систему (12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}-\log\pi \leqslant C, \qquad \pi_1(C+\log\pi)=0,\\ (1-q_n)\big((1-\varepsilon)\log(1-q_n)-\log\pi\big)-q_n\log\pi_n-\varepsilon q_n\log q_n = C.\end{gathered} \tag{20}$$

Из второй части системы (20) получаем

$$\pi_n = \pi q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}}\exp\biggl(-\frac{C+\log\pi}{q_n}\biggr), \qquad n\geqslant 2. \tag{21}$$

Поскольку последовательность $\{\pi_n\}$ должна стремиться к нулю при $n\to+\infty$, заключаем, что $-\log\pi < C$ и из первой части системы (20) следует, что $\pi_1 = 0$.

Нетрудно видеть, что если существует распределение вероятностей $\{\pi_n\}$, удовлетворяющее системе (20), то $\pi=\sum_{n>1}(1-q_n)\pi_n$ и C образуют решение системы

$$\begin{gathered}\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{1+\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}}\exp\biggl(-\frac{C+\log\pi}{q_n}\biggr)=1,\\ \sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}}\exp\biggl(-\frac{C+\log\pi}{q_n}\biggr)=\pi^{-1}.\end{gathered} \tag{22}$$

Обратно, всякое решение (π, C) системы (22) посредством выражения (21) дает распределение вероятностей $\{\pi_n\}$, удовлетворяющее системе (20).

Покажем, что система (22) имеет решение (π, C) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (14). Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{1+\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}}\exp\biggl(-\frac{x}{q_n}\biggr),\\ G(x)&=\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon}(1-q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}}\exp\biggl(-\frac{x}{q_n}\biggr).\end{aligned}$$

Эти функции непрерывны и строго убывают на $\bigl(\lambda^*_{\{q_n\}}, +\infty\bigr)$, причем $F(x)$ не превосходит $G(x)$. Следовательно, существуют обратные функции $F^{-1}(y)$ и $G^{-1}(y)$, которые непрерывны и строго убывают на $F\bigl((\lambda^*_{\{q_n\}}, +\infty)\bigr)$ и на $G\bigl(\bigl(\lambda^*_{\{q_n\}}, +\infty\bigr)\bigr)$ соответственно. Используя эти функции, систему (22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}F(C+\log\pi)&=1\\ G(C+\log\pi)&=\pi^{-1}.\end{aligned}$$

Неравенство (14) равносильно неравенству $\lim_{x\to\lambda^*_{\{q_n\}}+0}F(x)\geqslant 1$, которое в силу сказанного выше означает существование $F^{-1}(1)$. Поэтому если выполнено неравенство (14), то $C+\log\pi = F^{-1}(1)$. Следовательно, $\pi=\bigl(G(F^{-1}(1))\bigr)^{-1}\leqslant\bigl(F(F^{-1}(1))\bigr)^{-1}=1$ и $C=F^{-1}(1)+\log G\bigl(F^{-1}(1)\bigr)$ образуют единственное решение системы (22). Обозначая $F^{-1}(1)$ и π через $\lambda^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ и $\pi^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ соответственно, получаем все утверждения, связанные с χ-емкостью множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$. Если неравенство (14) не выполнено[15], то система (22) не имеет решений и, следовательно, не существует оптимального распределения вероятностей $\{\pi_n\}$. Таким образом, множество $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ не является регулярным в этом случае.

Из ограниченности энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)$ следует конечность χ-емкости множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$, а значит, как показано выше, выполнение условия (13). Обратное утверждение следует из условия ограниченности в утверждении 2) предложения 2 с $\mathfrak{H}$-оператором $\sum_{n=2}^{+\infty} q_n^{-1}|n\rangle\langle n|$. Таким образом, условие (13) равносильно ограниченности энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)$.

Предположим, что условие (14) при $\varepsilon = 1$ выполнено для последовательности $\{q_n\}$. Поскольку замкнутое множество $\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}$ состоит из чистых состояний, из гарантируемого этим условием существования оптимальной меры для данного множества следует, что оптимальное среднее $\Omega\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)$ совпадает с состоянием с максимальной энтропией $\Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)\big)$. Замечая, что $\Omega\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)$ лежит в $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{0}_{\{q_n\}}\big)$ и что $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{0}_{\{q_n\}}\big) \subseteq \overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)$ при любом ε, заключаем, что

$$\Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)\big) = \Omega\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)$$

при любом ε в этом случае.

Предположим, что существует состояние $\Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)\big)$ при некотором ε. Используя наблюдение, приведенное в [11, конец § 3], нетрудно видеть, что это означает существование состояния $\Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)\big)$ при любом ε, в частности при $\varepsilon = 1$. Поскольку замкнутое множество $\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}$ состоит из чистых состояний, состояние $\Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)\big)$ совпадает с состоянием $\Omega\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)$. В силу [11, лемма 2] сужение энтропии на множество $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)$ непрерывно в состоянии $\Omega\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big) = \Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}\big)\big)$, что гарантирует регулярность множества $\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}$. По [11, теорема 2] существует оптимальная мера для множества $\mathcal{S}^{1}_{\{q_n\}}$ и, как показано выше, условие (14) при $\varepsilon = 1$ выполнено для последовательности $\{q_n\}$.

В силу второго условия непрерывности в утверждении 2) предложения 2 с $\mathfrak{H}$-оператором $\sum_{n=2}^{+\infty} q_n^{-1}|n\rangle\langle n|$ конечность ряда в (13) для любого λ гарантирует непрерывность энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)$ при любом ε.

В завершение приведем пример последовательности $\{q_n\}$, для которой выполнено условие (13), но не выполнено условие (14) с произвольным ε. Пусть $q_n = 1/\log\big(n\log^3(2n+1)\big)$ при $n \geqslant 2$. Тогда $\lambda^*_{\{q_n\}} = 1$ и левая часть (14) при $\varepsilon = 1$ приблизительно равна 0.89. Следовательно, условие (14) не выполнено при любом ε. Как показано выше, при любом ε энтропия ограничена на множестве $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)$ и χ-емкость множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$ конечна, однако не существует ни состояния с максимальной энтропией для множества $\overline{\mathrm{co}}\big(\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}\big)$, ни оптимальной меры $\mu_* = \{\pi_n^{\pm}, \rho_n^{\pm}\}$ для множества $\mathcal{S}^{\varepsilon}_{\{q_n\}}$.

3.2. Множества $\mathcal{L}(\sigma)$ и $\mathcal{K}_{H,h}$. Пусть $\sigma = \sum_k \lambda_k|k\rangle\langle k|$ – произвольное состояние. В работе [11] определено множество $\mathcal{L}(\sigma)$, состоящее из всех состояний, имеющих такие же диагональные элементы в базисе $\{|k\rangle\}$, что и состояние σ. В силу [11, предложение 6] энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{L}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $\sup_{\rho\in\mathcal{L}(\sigma)} H(\rho) = H(\sigma) < +\infty$. Вопросы, связанные с χ-емкостью множества $\mathcal{L}(\sigma)$, рассмотрены в следующем предложении.

[15] Нетрудно построить последовательность $\{q_n\}$, для которой выполнено (13), но не выполнено (14) (см. конец пункта).

Предложение 5. *Пусть σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда*:

1) *χ-емкость множества $\mathcal{L}(\sigma)$ равна $H(\sigma)$*;

2) *если $\overline{C}\big(\mathcal{L}(\sigma)\big) = H(\sigma) < +\infty$, то множество $\mathcal{L}(\sigma)$ регулярно и существует оптимальная мера для множества $\mathcal{L}(\sigma)$ с барицентром $\Omega\big(\mathcal{L}(\sigma)\big) = \sigma$ и носителем на множестве чистых состояний из $\mathcal{L}(\sigma)$.*

Доказательство. Предположим, что χ-емкость $\overline{C}\big(\mathcal{L}(\sigma)\big)$ конечна. Пусть G – группа всех унитарных операторов в $\mathcal{H}$, диагонализируемых в базисе $\{|k\rangle\}$. Поскольку множество $\mathcal{L}(\sigma)$ инвариантно относительно действия автоморфизма $U(\,\cdot\,)U^*$ при каждом $U \in G$, из следствия 5 получаем, что $\Omega\big(\mathcal{L}(\sigma)\big) = \sigma$. Пусть ρ – произвольное чистое состояние из $\mathcal{L}(\sigma)$, например состояние, соответствующее вектору $\sum_k \sqrt{\lambda_k}\,|k\rangle$. Из [11, теорема 1], [11, предложение 6] следует, что

$$\overline{C}\big(\mathcal{L}(\sigma)\big) \geqslant H\big(\rho\,\|\,\Omega(\mathcal{L}(\sigma))\big) = H(\rho\,\|\,\sigma) = H(\sigma).$$

Поскольку $\sup_{\rho\in\mathcal{L}(\sigma)} H(\rho) = H(\sigma)$, в последнем неравенстве имеет место равенство. Для завершения доказательства утверждения 1) заметим, что из $\overline{C}\big(\mathcal{L}(\sigma)\big) = +\infty$ и [11, предложение 6] следует $H(\sigma) = +\infty$.

Утверждение о регулярности следует из [11, предложение 6].

Поскольку $\overline{C}\big(\mathcal{L}(\sigma)\big) = H\big(\Omega(\mathcal{L}(\sigma))\big)$, утверждение о существовании оптимальной меры следует из [11, теорема 2], [11, предложения 6 и 7].

В [11] введено множество $\mathcal{K}_{H,h}$, определяемое неравенством $\operatorname{Tr}\rho H \leqslant h$, где H – $\mathfrak{H}$-оператор и h – положительное число. В силу [11, предложение 1] необходимые и достаточные условия ограниченности и непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ можно выразить в терминах коэффициента роста $\mathrm{g}(H)$ $\mathfrak{H}$-оператора H, и состояние с максимальной энтропией для множества $\mathcal{K}_{H,h}$ существует тогда и только тогда, когда $h \leqslant h_*(H)$; параметры $\mathrm{g}(H)$ и $h_*(H)$ определены в [11] перед предложением 1. Вопросы, связанные с χ-емкостью множества $\mathcal{K}_{H,h}$, рассмотрены в следующем предложении.

Предложение 6. *Пусть H – $\mathfrak{H}$-оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и h – положительное число такое, что $h > h_{\mathrm{m}}(H)$. Тогда*:

1) *χ-емкость множества $\mathcal{K}_{H,h}$ совпадает с $\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ и, следовательно, является конечной тогда и только тогда, когда $\mathrm{g}(H) < +\infty$; если это условие выполнено, то*

$$\Omega(\mathcal{K}_{H,h}) = \begin{cases} \Gamma(\mathcal{K}_{H,h}) = \big(\operatorname{Tr}\exp(-\lambda^* H)\big)^{-1}\exp(-\lambda^* H), & h \leqslant h_*(H), \\ \big(\operatorname{Tr}\exp(-\mathrm{g}(H)H)\big)^{-1}\exp(-\mathrm{g}(H)H), & h > h_*(H), \end{cases}$$

где $\lambda^* = \lambda^*(H,h)$ – единственное решение уравнения

$$\operatorname{Tr} H\exp(-\lambda H) = h\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H);$$

2) *следующие утверждения равносильны*:

(i) *имеет место неравенство $h \leqslant h_*(H)$*;

(ii) *множество $\mathcal{K}_{H,h}$ регулярно*;

(iii) $\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) \leqslant H\big(\Omega(\mathcal{K}_{H,h})\big)$, *что равносильно* $\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) = H\big(\Omega(\mathcal{K}_{H,h})\big)$;

(iv) $\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) = \overline{C}\big(\mathcal{K}_{H,h} \cap \mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{H,h}))\big)$;

(v) *существует оптимальная мера для множества $\mathcal{K}_{H,h}$.*

На рис. 2 показаны результаты вычисления χ-емкости множества $\mathcal{K}_{H,h}$ как функции параметра $h = c$ для $\mathfrak{H}$-оператора $H = -\log\sigma$, у которого $h_*(H) < +\infty$.

Доказательство. Пусть $H=\sum_k h_k|k\rangle\langle k|$ и $\mathcal{K}^c_{H,h}$ – подмножество множества $\mathcal{K}_{H,h}$, состоящее из состояний, диагонализирумых в базисе $\{|k\rangle\}$. Тогда $\mathcal{K}_{H,h}=\bigcup_{\rho\in\mathcal{K}^c_{H,h}}\mathcal{L}(\rho)$ и, следовательно,

$$\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h})\geqslant \sup_{\rho\in\mathcal{K}^c_{H,h}}\overline{C}\bigl(\mathcal{L}(\rho)\bigr)=\sup_{\rho\in\mathcal{K}^c_{H,h}}H(\rho)=\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}}H(\rho),$$

где последнее равенство следует из [11, неравенство (22)]. Поскольку обратное неравенство очевидно, первая часть утверждения 1) предложения доказана.

В [11, доказательство предложения 1] построена последовательность $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathcal{K}^c_{H,h}$ такая, что $\lim_{n\to\infty}H(\rho_n)=\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}}H(\rho)$ и $\lim_{n\to\infty}\rho_n=\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$. В силу предложения 5 для каждого n существует оптимальная мера μ_n для множества $\mathcal{L}(\rho_n)$ такая, что $\overline{\rho}(\mu_n)=\rho_n$ и $\chi(\mu_n)=H(\rho_n)$. Из первой части утверждения 1) следует, что последовательность мер $\{\mu_n\}$ является аппроксимирующей последовательностью для множества $\mathcal{K}_{H,h}$. В силу [11, теорема 1] предельное состояние $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$ соответствующей последовательности барицентров $\{\rho_n\}$ является оптимальным средним состоянием множества $\mathcal{K}_{H,h}$. Утверждение 1) доказано.

Равносильность утверждений (i)–(v) будет доказана в следующем порядке: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii). С учетом доказанного выше из (i) следует, что $\Omega(\mathcal{K}_{H,h})=\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$. В силу [11, лемма 2] сужение энтропии на множество $\mathcal{K}_{H,h}$ непрерывно в состоянии $\Omega(\mathcal{K}_{H,h})$, что гарантирует регулярность множества $\mathcal{K}_{H,h}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (v). Непосредственно следует из [11, теорема 2].

(v) $\Longrightarrow$ (iii). Непосредственно вытекает из [11, следствие 8].

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Легко выводится из предложения 5 и утверждения 1).

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Если $h>h_*(H)$, то в силу [11, предложение 1] и предложения 5 имеем

$$\overline{C}\bigl(\mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{H,h}))\bigr)=H\bigl(\Omega(\mathcal{K}_{H,h})\bigr)<\sup_{\rho\in\mathcal{K}_{H,h}}H(\rho)=\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}).$$

Конструкции в доказательствах предложения 1 из [11] и предложения 6 позволяют построить следующий пример, показывающий, что условие регулярности в утверждении 9) теоремы 1 существенно.

Пример 2 (замкнутое множество состояний с конечной χ-емкостью, не содержащее минимального замкнутого подмножества с той же самой χ-емкостью). Пусть H – $\mathfrak{H}$-оператор такой, что

$$h_*(H)=\frac{\operatorname{Tr}H\exp(-\operatorname{g}(H)H)}{\operatorname{Tr}\exp(-\operatorname{g}(H)H)}<+\infty.$$

Например,

$$H=\sum_{k=1}^{+\infty}\log\bigl((k+1)\log^3(k+1)\bigr)|k\rangle\langle k|.$$

Как показано в [11, доказательство предложения 1], для данного $h>h_*(H)$ существует натуральное n_0 такое, что состояние ρ_n корректно определено формулой (8) из [11] для всех $n\geqslant n_0$ и последовательность $\{\rho_n\}_{n\geqslant n_0}$ сходится к состоянию $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$, определенному формулой (13) из [11]. Пусть $\mathcal{A}_0=\bigcup_{n\geqslant n_0}\mathcal{L}(\rho_n)$

и $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{L}\big(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})\big)$. Из [11, доказательство предложения 1] и [11, предложение 6] следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) > H\big(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})\big) = \sup_{\rho\in\mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))} H(\rho).$$

Покажем, что замкнутое множество $\mathcal{A}$ не содержит минимального замкнутого подмножества с той же самой χ-емкостью. Предположим, что $\mathcal{B}$ – минимальное подмножество $\mathcal{A}$. Поскольку $\overline{C}\big(\mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))\big)$ меньше, чем $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\mathcal{B})$, множество $\mathcal{B}$ имеет непустое пересечение с множеством $\mathcal{L}(\rho_{n_*})$ при некотором $n_* \geqslant n_0$. Покажем, что замкнутое множество $\mathcal{B}\setminus\mathcal{L}(\rho_{n_*}) \subsetneq \mathcal{B}$ имеет ту же самую χ-емкость, что и множество $\mathcal{B}$, вопреки предполагаемой минимальности множества $\mathcal{B}$.

Поскольку $\sup_{\rho\in\mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))} H(\rho) < \overline{C}(\mathcal{B})$, существует аппроксимирующая последовательность ансамблей $\{\{\pi_i^k, \rho_i^k\}\}_k$ для множества $\mathcal{B}$ такая, что соответствующая последовательность средних состояний $\{\overline{\rho}_k\}_k$ не пересекается с $\mathcal{L}\big(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})\big)$ и, следовательно, $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\overline{\rho}_k) = \rho_{n_k}$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$. Поскольку $\sup_{\rho\in\mathcal{L}(\rho_n)} H(\rho) < \overline{C}(\mathcal{B})$ для каждого $n \geqslant n_0$, последовательность $\{n_k\}$ стремится к $+\infty$. Заметим, что для любого состояния ρ из $\mathcal{B}$ состояние $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho)$ совпадает либо с $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$, либо с ρ_n при некотором n и что из разложения $\overline{\rho}_k = \sum_i \pi_i^k \rho_i^k$ следует разложение $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\overline{\rho}_k) = \sum_i \pi_i^k \Pi_{|k\rangle}(\rho_i^k)$ при каждом k. Используя это наблюдение, определения (8) и (13) из [11], нетрудно показать, что $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_i^k) = \rho_{n_k}$ для всех i и k. Таким образом, состояния ансамбля $\{\pi_i^k, \rho_i^k\}$ не лежат в $\mathcal{L}(\rho_{n_*})$ для всех достаточно больших k и, следовательно, "хвост" последовательности $\{\{\pi_i^k, \rho_i^k\}\}_k$ является аппроксимирующей последовательностью для множества $\mathcal{B}\setminus\mathcal{L}(\rho_{n_*})$. Поэтому $\overline{C}(\mathcal{B}) = \overline{C}\big(\mathcal{B}\setminus\mathcal{L}(\rho_{n_*})\big)$.

3.3. Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$. В работе [11] введено множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, определяемое неравенством $H(\rho\,\|\,\sigma) \leqslant c$, где σ – состояние и c – неотрицательное число. Если σ – состояние бесконечного ранга, то семейство непустых множеств $\{\mathcal{K}_{\sigma,c}\}_{c\in\mathbb{R}_+}$ является строго возрастающим, причем $\mathcal{K}_{\sigma,0} = \{\sigma\}$.

В силу [11, теорема 1] каждое множество $\mathcal{A}$ с конечной χ-емкостью содержится внутри компактного выпуклого множества $\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{A})}$ такого, что $\Omega\big(\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{A})}\big) = \Omega(\mathcal{A})$, $\overline{C}\big(\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}),\overline{C}(\mathcal{A})}\big) = \overline{C}(\mathcal{A})$. Ниже будут определены χ-емкость и оптимальное среднее множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для произвольных σ и c.

Из [11, предложение 3] следуют необходимые и достаточные условия ограниченности и непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ в терминах коэффициента убывания $\mathrm{d}(\sigma)$ состояния σ. Это предложение также показывает, что состояние с максимальной энтропией для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ существует тогда и только тогда, когда $c \leqslant c_*(\sigma)$; параметры $\mathrm{d}(\sigma)$ и $c_*(\sigma)$ определены в [11] перед предложением 3. Вопросы, связанные с χ-емкостью множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, рассмотрены в следующем предложении. Пусть

$$c^*(\sigma) = \frac{\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}(-\log\sigma)}{\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}}\,,$$

если $\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)} < +\infty$, и $c^*(\sigma) = +\infty$ в противном случае. Заметим, что

$$c^*(\sigma) = \frac{c_*(\sigma) + \log\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}}{1-\mathrm{d}(\sigma)} \geqslant c_*(\sigma),$$

если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$, и $c^*(\sigma) = H(\sigma)$, если $\mathrm{d}(\sigma) = 1$.

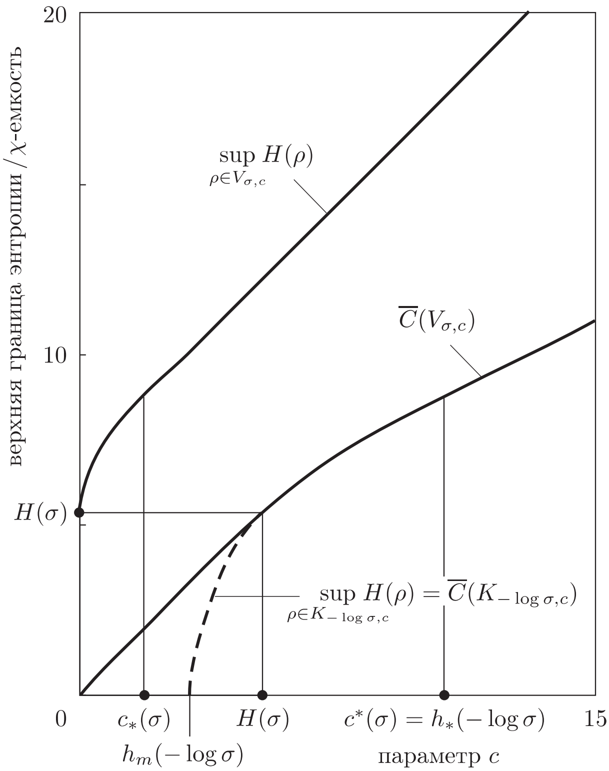

Рис. 2. Верхняя граница энтропии и χ-емкость множеств $\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}$ и $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ как функции параметра c для состояния $\sigma\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|k\rangle\langle k|}{(k+100)\log^3(k+100)}$ при $\mathrm{d}(\sigma)=1/2$

Предложение 7. *Пусть σ – состояние бесконечного ранга из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда*:

1) *если $c\leqslant H(\sigma)\leqslant+\infty$, то $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=c$ и $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\sigma$*;

2) *если $H(\sigma)<c\leqslant c^*(\sigma)$, то*

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\lambda^*c+\log\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda^*},\qquad \Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\bigl(\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda^*}\bigr)^{-1}\sigma^{\lambda^*},$$

где $\lambda^*=\lambda^*(\sigma,c)$ – единственное решение уравнения $\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda}(-\log\sigma)=c\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda}$;

3) *если $c^*(\sigma)<+\infty$ и $c\geqslant c^*(\sigma)$, то*

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\mathrm{d}(\sigma)c+\log\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)},\qquad \Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\bigl(\operatorname{Tr}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}\bigr)^{-1}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}.$$

В случаях 1)–3) имеем

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\inf_{\lambda\in[\mathrm{d}(\sigma),1]}\bigl(\lambda c+\log\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda}\bigr).$$

4) *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *имеет место неравенство $c\leqslant c^*(\sigma)$*;

(ii) $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})\leqslant H\bigl(\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})\bigr)$;

(iii) $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \overline{C}\big(\mathcal{V}_{\sigma,c} \cap \mathcal{L}\big(\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})\big)\big)$;

(iv) *существует оптимальная мера для множества* $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

5) *Множество* $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ *регулярно тогда и только тогда, когда* $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ *и* $c < c^*(\sigma)$.

На рис. 2 показаны результаты вычисления χ-емкости множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ как функции параметра c для состояния σ, у которого $c^*(\sigma) < +\infty$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ – состояние полного ранга; тогда $-\log\sigma$ – $\mathfrak{H}$-оператор. Из [11, теорема 1, 2)] следует неравенство

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) \leqslant c. \tag{23}$$

Пусть $c \leqslant H(\sigma) \leqslant +\infty$. Рассмотрим подмножество $\mathcal{T} = \mathcal{V}_{\sigma,c} \cap \mathcal{L}(\sigma)$ множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$. Учитывая монотонность χ-емкости и (23), имеем $\overline{C}(\mathcal{T}) \leqslant \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) \leqslant c < +\infty$. Поэтому для доказательства того, что $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = c$, достаточно показать, что $\overline{C}(\mathcal{T}) \geqslant c$.

Пусть G – группа всех унитарных операторов в $\mathcal{H}$, диагонализируемых в базисе $\{|k\rangle\}$. Поскольку множество $\mathcal{T}$ инвариантно относительно действия автоморфизма $U(\,\cdot\,)U^*$ при каждом $U \in G$, из следствия 5 вытекает $\Omega(\mathcal{T}) = \sigma$. Для доказательства того, что $\overline{C}(\mathcal{T}) \geqslant c$, достаточно в силу [11, теорема 1, 2)] найти состояние σ_c из множества $\mathcal{T}$ такое, что $H\big(\sigma_c \,\|\, \Omega(\mathcal{T})\big) = H(\sigma_c \,\|\, \sigma) = c$.

В случае $H(\sigma) < +\infty$ относительная энтропия $H(\rho \,\|\, \sigma)$ является в силу [11, предложение 6] непрерывной функцией на $\mathcal{L}(\sigma)$ с множеством значений $[0, H(\sigma)]$. Это гарантирует существование состояния σ_c с указанными свойствами.

В случае $H(\sigma) = +\infty$ существование состояния σ_c следует из приведенной ниже леммы 2 (при $n = 1$).

Таким образом, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \overline{C}(\mathcal{T}) = c$, и из утверждения 3) теоремы 1 следует, что $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \Omega(\mathcal{T}) = \sigma$.

Пусть $c > H(\sigma)$. Поскольку $\mathcal{K}_{-\log\sigma,c} \subset \mathcal{V}_{\sigma,c}$, из монотонности χ-емкости следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}) \leqslant \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}). \tag{24}$$

Заметим, что $c^*(\sigma) = h_*(-\log\sigma)$. Для доказательства всех утверждений, касающихся случаев $H(\sigma) < c \leqslant c^*(\sigma)$ и $c \geqslant c^*(\sigma)$, достаточно в силу предложения 6 показать, что

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}), \tag{25}$$

поскольку из этого равенства и утверждения 3) теоремы 1 следует равенство $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})$.

Предположим, что $\mathrm{d}(\sigma) = \mathrm{g}(-\log\sigma) = 1$. Тогда $c^*(\sigma) = h_*(-\log\sigma) = H(\sigma)$. В силу предложения 6 имеем $\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}) = c$ для всех $c \geqslant H(\sigma)$. Таким образом, из неравенств (23) и (24) следует равенство (25).

Предположим, что $\mathrm{d}(\sigma) = \mathrm{g}(-\log\sigma) < 1$. Тогда из [11, лемма 3] следует, что

$$H\big(\rho \,\|\, \big(\mathrm{Tr}\,\sigma^\lambda\big)^{-1}\sigma^\lambda\big) \leqslant \lambda H(\rho \,\|\, \sigma) + \log\mathrm{Tr}\,\sigma^\lambda \leqslant \lambda c + \log\mathrm{Tr}\,\sigma^\lambda$$

для всех ρ из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ и для всех $\lambda \in (\mathrm{d}(\sigma), 1]$. Используя [11, теорема 1, 2)], получаем

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) \leqslant \inf_{\lambda\in(\mathrm{d}(\sigma),1]} \sup_{\rho\in\mathcal{V}_{\sigma,c}} H\big(\rho \,\|\, \big(\mathrm{Tr}\,\sigma^\lambda\big)^{-1}\sigma^\lambda\big) \leqslant \inf_{\lambda\in(\mathrm{d}(\sigma),1]} \big(\lambda c + \log\mathrm{Tr}\,\sigma^\lambda\big).$$

В силу предложения 6 с учетом [11, предложение 1] имеем

$$\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})=\inf_{\lambda\in(\mathrm{d}(\sigma),+\infty)}\bigl(\lambda c+\log\operatorname{Tr}\sigma^{\lambda}\bigr)$$

и нетрудно видеть, что при $c>H(\sigma)$ последняя точная нижняя грань достигается в точке $\lambda^*\leqslant 1$. Таким образом, эта точная нижняя грань совпадает с предыдущей и, следовательно, равенство (25) имеет место в этом случае.

Равносильность утверждений (i)–(iv) будет доказана посредством проверки следующих импликаций: (i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) и (i) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

(i) $\Longrightarrow$ (iv). В случае $H(\sigma)<+\infty$ существование оптимальной меры для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при условии $c\leqslant c^*(\sigma)$ доказывается отдельно для $c\leqslant H(\sigma)$ и для $H(\sigma)<c\leqslant c^*(\sigma)$.

Если $c\leqslant H(\sigma)$, то, как показано выше, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T}=\mathcal{V}_{\sigma,c}\cap\mathcal{L}(\sigma)$. В силу [11, предложение 6] энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{T}$, что гарантирует его регулярность. Поэтому из [11, теорема 2] следует существование оптимальной меры для множества $\mathcal{T}$. Поскольку $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{T}\subset\mathcal{V}_{\sigma,c}$, эта мера является оптимальной мерой для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Если $\mathrm{d}(\sigma)<1$ и $H(\sigma)<c\leqslant c^*(\sigma)$, то, как показано выше, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})$ и $c^*(\sigma)=h_*(-\log\sigma)$. В силу предложения 6 существует оптимальная мера для множества $\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}$. Поскольку $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})$ и $\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}\subset\mathcal{V}_{\sigma,c}$, эта мера является оптимальной для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

В случае $H(\sigma)=+\infty$ существование оптимальной меры доказывается следующим непосредственным построением.

Для данного c пусть m и $\rho_{c,1,m}$ – натуральное число и состояние, существующие в силу леммы 2. Пусть $P_m=\sum_{k=1}^{m}|k\rangle\langle k|$ и G_m – *компактная* группа всех унитарных операторов в $\mathfrak{B}\bigl(P_m(\mathcal{H})\bigr)$, диагонализирумых в базисе $\{|k\rangle\}_{k=1}^{m}$ подпространства $P_m(\mathcal{H})$. Каждому U из G_m соответствует унитарный оператор $\widehat{U}=U\oplus I_{\mathcal{H}\ominus P_m(\mathcal{H})}$ в $\mathcal{H}$. Учитывая свойства состояния $\rho_{c,1,m}$, нетрудно видеть, что

$$\int_{G_m}\widehat{U}\rho_{c,1,m}\widehat{U}^*\mu_H(dU)=\sigma,$$

где μ_H – мера Хаара на G_m. Поскольку

$$H\bigl(\widehat{U}\rho_{c,1,m}\widehat{U}^*\,\|\,\sigma\bigr)=H\bigl(\rho_{c,1,m}\,\|\,\widehat{U}^*\sigma\widehat{U}\bigr)=H(\rho_{c,1,m}\,\|\,\sigma)=c,$$

образ этой меры μ_H при отображении $U\mapsto\widehat{U}\rho_{c,1,m}\widehat{U}^*$ является оптимальной мерой для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, носитель которой лежит в $\mathcal{L}(\sigma)$ по построению.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii). Непосредственно вытекает из [11, следствие 8].

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Если $c^*(\sigma)<+\infty$ и $c>c^*(\sigma)$, то из доказательства утверждения 3) предложения, [11, предложение 1] и предложения 6 следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})>H\bigl(\Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})\bigr),\qquad\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}).\tag{26}$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii). Если $c\leqslant H(\sigma)$, то, как показано выше, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{T})$ и $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\sigma$, где $\mathcal{T}=\mathcal{V}_{\sigma,c}\cap\mathcal{L}(\sigma)$. Если $H(\sigma)<c\leqslant c^*(\sigma)$, то из доказательства утверждения 2) предложения и предложений 5, 6 следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})=H\bigl(\Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})\bigr)=\overline{C}\bigl(\mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}))\bigr).\tag{27}$$

Поскольку $\mathcal{L}\bigl(\Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})\bigr)\subset\mathcal{K}_{-\log\sigma,c}\subset\mathcal{V}_{\sigma,c}$ и $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})=\Omega(\mathcal{K}_{-\log\sigma,c})$, получаем (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Если $c^*(\sigma) < +\infty$ и $c > c^*(\sigma)$, то выполнено неравенство (26), которое в силу предложения 5 противоречит (iii).

Если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ и $c < c^*(\sigma)$, то, как показано выше, $\mathrm{d}\big(\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})\big) < 1$, и регулярность множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ следует из утверждения 5) теоремы 1.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что из приведенной ниже леммы 3 и доказанных утверждений предложения следует, что второе условие регулярности не выполнено для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при любом состоянии σ бесконечного ранга и $c > 0$. Таким образом, достаточно показать, что первое условие регулярности не выполнено для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, когда либо $\mathrm{d}(\sigma) = 1$, либо $c \geqslant c^*(\sigma)$.

Если $\mathrm{d}(\sigma) = 1$, то, как показано выше, $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \sigma$ для любого c. В случае $H(\sigma) < +\infty$ из [11, предложение 2] следует существование последовательности состояний $\{\rho_n\}$ такой, что

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n \,\|\, \sigma) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) > H(\sigma).$$

Таким образом, состояние ρ_n лежит в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при всех достаточно больших n, и, следовательно, первое условие регулярности не имеет места. В случае $H(\sigma) = +\infty$ первое условие регулярности также, очевидно, не выполнено.

Если $\mathrm{d}(\sigma) < 1$ и $c \geqslant c^*(\sigma)$, то, как показано выше, $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \big(\mathrm{Tr}\,\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}\big)^{-1}\sigma^{\mathrm{d}(\sigma)}$. В доказательстве предложения 3 из [11] показано, что для каждого m существует последовательность $\{\rho_n^m\}_n$ состояний, для которой имеют место соотношения (19) из [11], и что состояния этой последовательности лежат в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для всех достаточно больших n. Таким образом, первое условие регулярности не выполнено и в этом случае.

Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ с $H(\sigma) = +\infty$ – нетривиальный пример нерегулярного множества с конечной χ-емкостью, содержащего состояния с бесконечной энтропией, у которого существует оптимальная мера.

Лемма 2. *Пусть $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |k\rangle\langle k|$ – состояние с бесконечной энтропией. Для произвольного натурального n пусть $\mathcal{L}_n(\sigma)$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{L}(\sigma)$, содержащее такие состояния ρ, что $\langle i|\rho|j\rangle = 0$, если $i \neq j$ и либо $i < n$, либо $j < n$. Тогда для любых $c \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существуют натуральное число m и состояние $\rho_{c,n,m}$ из $\mathcal{L}_n(\sigma)$ такие, что*

$$H(\rho_{c,n,m} \,\|\, \sigma) = c$$

и $\langle i|\rho_{c,n,m}|j\rangle = 0$, если $i \neq j$ и либо $i > m$, либо $j > m$.

Доказательство. Пусть $c \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. Рассмотрим состояние

$$\sigma_n = \mu_n^{-1} \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k |k\rangle\langle k|,$$

где $\mu_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k$, и последовательность состояний

$$\left\{\rho_n^m = \mu_n^{-1} \sum_{n\leqslant i,j\leqslant m} \sqrt{\lambda_i}\,\sqrt{\lambda_j}\,|i\rangle\langle j| + \mu_n^{-1} \sum_{k>m} \lambda_k |k\rangle\langle k|\right\}_m,$$

сходящуюся к чистому состоянию $\rho_n^* = \mu_n^{-1} \sum_{i,j\geqslant n} \sqrt{\lambda_i}\,\sqrt{\lambda_j}\,|i\rangle\langle j|$ при $m \to +\infty$. Поскольку $H(\sigma_n) = +\infty$, из [11, предложение 6] следует, что $H(\rho_n^* \,\|\, \sigma_n) = +\infty$.

Используя это и общие свойства относительной энтропии, получаем

$$H(\rho_n^m \,\|\, \sigma_n) < +\infty \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{m\to+\infty} H(\rho_n^m \,\|\, \sigma_n) = +\infty.$$

Таким образом, существует натуральное $m(c)$ такое, что

$$c\mu_n^{-1} \leqslant H(\rho_n^{m(c)} \,\|\, \sigma_n) < +\infty.$$

Выпуклая полунепрерывная снизу функция $f(\lambda) = H\bigl(\lambda\rho_n^{m(c)} + (1-\lambda)\sigma_n \,\|\, \sigma_n\bigr)$ не превосходит $\lambda H\bigl(\rho_n^{m(c)} \,\|\, \sigma_n\bigr)$ на $[0,1]$ и, следовательно, непрерывна на $[0,1]$ (см. [2]). Поскольку $f(0)=0$ и $f(1) = H\bigl(\rho_n^{m(c)} \,\|\, \sigma_n\bigr) \geqslant c\mu_n^{-1}$, существует $\lambda^* \in [0,1]$ такое, что $f(\lambda^*) = c\mu_n^{-1}$.

Пусть $m = m(c)$ и $\rho_{c,n,m} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |k\rangle\langle k| + \mu_n\bigl(\lambda^*\rho_n^m + (1-\lambda^*)\sigma_n\bigr)$. Нетрудно видеть, что $H(\rho_{c,n,m} \,\|\, \sigma) = \mu_n H\bigl(\lambda^*\rho_n^{m(c)} + (1-\lambda^*)\sigma_n \,\|\, \sigma_n\bigr) = c$ и что $\rho_{c,n,m} \in \mathcal{L}_n(\sigma)$. По построению $\langle i|\rho_{c,n,m}|j\rangle = 0$, если $i \neq j$ и либо $i > m$, либо $j > m$.

Лемма 3. *Пусть σ – состояние бесконечного ранга. Относительная энтропия $H\bigl(\rho \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr)$ не является непрерывной функцией состояния ρ на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при любом $c > 0$ и при любом λ таком, что $\operatorname{Tr}\sigma^\lambda < +\infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что σ – состояние полного ранга. Пусть ϱ – чистое состояние такое, что $H(\varrho \,\|\, \sigma) = +\infty$, и P_n – спектральный проектор состояния σ, соответствующий его n максимальным собственным значениям. Тогда последовательность чистых состояний $\varrho_n = (\operatorname{Tr} P_n\varrho)^{-1} P_n\varrho P_n$ сходится к чистому состоянию ϱ и, используя общие свойства относительной энтропии, получаем $H(\varrho_n \,\|\, \sigma) < +\infty$ для всех n и $\lim_{n\to+\infty} H(\varrho_n \,\|\, \sigma) = +\infty$.

Рассмотрим последовательность $\bigl\{\eta_n = c\bigl(H(\varrho_n \,\|\, \sigma)\bigr)^{-1}\bigr\}_{n\geqslant n_0}$, где n_0 выбрано так, что $H(\varrho_n \,\|\, \sigma) > c$ для всех $n \geqslant n_0$. Пусть $\rho_n = \eta_n\varrho_n + (1-\eta_n)\sigma$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда, используя общие свойства относительной энтропии, получаем

$$c - h_2(\eta_n) = \eta_n H(\varrho_n \,\|\, \sigma) - h_2(\eta_n) \leqslant H(\rho_n \,\|\, \sigma) \leqslant \eta_n H(\varrho_n \,\|\, \sigma) = c,$$

где $h_2(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$.

Поскольку $\eta_n \to 0$ при $n \to 0$, из этого неравенства следует, что

$$\rho_n \in \mathcal{V}_{\sigma,c} \text{ для всех } n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} H(\rho_n \,\|\, \sigma) = c. \tag{28}$$

Пусть λ – произвольное положительное число такое, что $\operatorname{Tr}\sigma^\lambda < +\infty$. В силу [11, лемма 3] имеем

$$H\bigl(\rho_n \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr) = \lambda H(\rho_n \,\|\, \sigma) + \log\operatorname{Tr}\sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\rho_n). \tag{29}$$

Используя общие свойства энтропии, получаем

$$(1-\eta_n)H(\sigma) \leqslant H(\rho_n) \leqslant (1-\eta_n)H(\sigma) + h_2(\eta_n)$$

для всех $n \geqslant n_0$ и, следовательно, $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\sigma)$.

Таким образом, из (28) и (29) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} H\bigl(\rho_n \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr) = c\lambda + \log\operatorname{Tr}\sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\sigma).$$

По построению последовательность $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ сходится к состоянию σ. Поскольку $H\bigl(\sigma \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr) = \log\operatorname{Tr}\sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\sigma)$, предыдущее выражение означает

$$\lim_{n\to+\infty} H\bigl(\rho_n \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr) = H\bigl(\sigma \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr) + c\lambda,$$

т. е. разрывность функции $H\bigl(\rho \,\|\, \bigl(\operatorname{Tr}\sigma^\lambda\bigr)^{-1}\sigma^\lambda\bigr)$ на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Следствием нерегулярности множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для любого состояния σ с бесконечной энтропией является отсутствие свойства непрерывности χ-емкости для монотонно убывающих последовательностей подмножеств этого множества (утверждение 7) теоремы 1), что подтверждается следующим примером.

Пример 3 (убывающая последовательность замкнутых множеств с одинаковой положительной χ-емкостью, пересечение которых имеет нулевую χ-емкость). Пусть σ – состояние с бесконечной энтропией. Для произвольного натурального n пусть $\mathcal{L}_n(\sigma)$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, введенное в лемме 2. Для данного $c>0$ рассмотрим убывающую последовательность замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{A}_n=\mathcal{L}_n(\sigma)\cap\mathcal{V}_{\sigma,c}$. Поскольку σ – единственное состояние из $\mathcal{A}_n$, инвариантное относительно действия всех автоморфизмов из $\mathfrak{F}(\mathcal{A}_n)$, из следствия 5 вытекает, что $\Omega(\mathcal{A}_n)=\sigma$ при каждом n. Лемма 2 гарантирует при каждом n существование состояния $\rho_{c,n,m}$ из $\mathcal{A}_n$ такого, что $H\bigl(\rho_{c,n,m} \,\|\, \Omega(\mathcal{A}_n)\bigr) = H(\rho_{c,n,m} \,\|\, \sigma) = c$, и из [11, теорема 1] следует, что $\overline{C}(\mathcal{A}_n) \geqslant c$. В силу утверждения 3) теоремы 1 имеем $\overline{C}(\mathcal{A}_n) \leqslant \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = c$ и, следовательно, $\overline{C}(\mathcal{A}_n)=c$ для всех n, а $\overline{C}\bigl(\bigcap_n \mathcal{A}_n\bigr)=0$, поскольку $\bigcap_n \mathcal{A}_n=\{\sigma\}$.

3.4. Множество $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – произвольные подмножества множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно. Пусть

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \{\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \mid \omega^{\mathcal{H}}\in\mathcal{A},\ \omega^{\mathcal{K}}\in\mathcal{B}\},$$

где $\omega^{\mathcal{H}}=\operatorname{Tr}_{\mathcal{K}}\omega$ и $\omega^{\mathcal{K}}=\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}}\omega$.

В работе [12] доказана следующая лемма.

Лемма 4. *Множество $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ является выпуклым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются выпуклыми подмножествами множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.*

Множество $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ является компактным подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются компактными подмножествами множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.

Свойства сужения энтропии на множество $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ также определяются свойствами сужения энтропии на множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – произвольные подмножества множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно. Тогда*:

1) *энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда энтропия ограничена на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$*;

2) *энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда энтропия непрерывна на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Если энтропия ограничена (непрерывна) на множестве $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, то энтропия ограничена (непрерывна) на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, поскольку для каждого состояния ρ из $\mathcal{A}$ и для каждого состояния σ из $\mathcal{B}$ состояние $\rho\otimes\sigma$ лежит в $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ и $H(\rho\otimes\sigma)=H(\rho)+H(\sigma)$.

Если энтропия ограничена на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то в силу свойства субаддитивности энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

Предположим, что энтропия непрерывна на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Пусть ω_0 – состояние из $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ и $\{\omega_n\}$ – последовательность состояний из $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, сходящаяся к состоянию ω_0. Поскольку

$$H(\omega_n)=H\bigl(\omega_n^{\mathcal{H}}\bigr)+H\bigl(\omega_n^{\mathcal{K}}\bigr)-H\bigl(\omega_n\,\|\,\omega_n^{\mathcal{H}}\otimes\omega_n^{\mathcal{K}}\bigr),\qquad n=0,1,2,\dots,$$

используя предположение о непрерывности и полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}H(\omega_n)&=\lim_{n\to+\infty}H\bigl(\omega_n^{\mathcal{H}}\bigr)+\lim_{n\to+\infty}H\bigl(\omega_n^{\mathcal{K}}\bigr)-\liminf_{n\to+\infty}H\bigl(\omega_n\,\|\,\omega_n^{\mathcal{H}}\otimes\omega_n^{\mathcal{K}}\bigr)\\&\leqslant H\bigl(\omega_0^{\mathcal{H}}\bigr)+H\bigl(\omega_0^{\mathcal{K}}\bigr)-H\bigl(\omega_0\,\|\,\omega_0^{\mathcal{H}}\otimes\omega_0^{\mathcal{K}}\bigr)=H(\omega_0).\end{aligned}$$

Из этого неравенства и полунепрерывности снизу энтропии следует, что $\lim_{n\to+\infty}H(\omega_n)=H(\omega_0)$.

Важный частный случай множества $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ – это множество всех состояний ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, имеющих заданные частичные состояния $\omega^{\mathcal{H}}=\rho$ и $\omega^{\mathcal{K}}=\sigma$. Следуя [8], обозначим это множество $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. В силу леммы 4 множество $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ выпукло и компактно при любых ρ и σ. Из субаддитивности энтропии следует, что $\sup_{\omega\in\mathcal{C}(\rho,\sigma)}H(\omega)=H(\rho)+H(\sigma)$. Подобно случаю множества $\mathcal{L}(\sigma)$ конечность энтропии на множестве $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ гарантирует ее непрерывность на этом множестве.

Следствие 6. *Энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ тогда и только тогда, когда $H(\rho)<+\infty$ и $H(\sigma)<+\infty$.*

Пусть $\{\pi_i,\rho_i\}$ и $\{\lambda_j,\sigma_j\}$ – произвольные ансамбли состояний из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. *Тензорным произведением* этих ансамблей назовем ансамбль $\{\pi_i\lambda_j,\,\rho_i\otimes\sigma_j\}$ состояний из $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Рассматривая тензорные произведения всевозможных ансамблей состояний из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, нетрудно показать, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\geqslant\overline{C}(\mathcal{A})+\overline{C}(\mathcal{B}).\tag{30}$$

Существуют примеры множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых имеет место равенство в (30). Например, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – множества, рассмотренные в п. 3.2, то равенство в (30) вытекает из субаддитивности энтропии. Однако существуют и примеры, для которых имеет место строгое неравенство в (30). Более того, если $\mathcal{A}=\{\rho\}$ и $\mathcal{B}=\{\sigma\}$, где ρ и σ – изоморфные состояния с бесконечной энтропией из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно, то в силу приведенного ниже предложения 9 левая часть (30) равна $+\infty$, а правая, очевидно, равна нулю [16].

Заметим, что из равенства в (30) следует

$$\Omega(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})=\Omega(\mathcal{A})\otimes\Omega(\mathcal{B}).\tag{31}$$

Действительно, если $\{\{\pi_i^n,\rho_i^n\}\}_n$ и $\{\{\lambda_j^n,\sigma_j^n\}\}_n$ – аппроксимирующие последовательности ансамблей для множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, то в силу предполагаемого равенства в (30) последовательность ансамблей $\{\{\pi_i^n\lambda_j^n,\,\rho_i^n\otimes\sigma_j^n\}\}_n$

[16] Строгое неравенство в (30) не противоречит гипотезе аддитивности χ-пропускной способности квантовых каналов. Действительно, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – выходные множества некоторых каналов Φ и Ψ соответственно, то выходное множество канала $\Phi\otimes\Psi$ есть собственное подмножество множества $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

является аппроксимирующей последовательностью для множества $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. По [11, теорема 1] последовательности $\{\overline{\rho}_n\}$ и $\{\overline{\sigma}_n\}$ сходятся к оптимальным средним состояниям $\Omega(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{B})$ соответственно. Поэтому последовательность $\{\overline{\rho}_n\otimes\overline{\sigma}_n\}$ сходится к состоянию $\Omega(\mathcal{A})\otimes\Omega(\mathcal{B})$ и, следовательно, в силу [11, теорема 1] это состояние является оптимальным средним состоянием $\Omega(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ множества $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Из приведенного ниже предложения 9 следует, в частности, что (31) не гарантирует равенства в (30).

Рассмотрим подробно множество $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Пусть $\rho=\sum_i\pi_i|e_i\rangle\langle e_i|$ и $\sigma=\sum_j\lambda_j|f_j\rangle\langle f_j|$, где $\{|e_i\rangle\}$ и $\{|f_j\rangle\}$ – ортонормированные системы векторов из $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. Пусть $E_{ij}=|e_i\rangle\langle e_j|$ и $F_{kl}=|f_k\rangle\langle f_l|$ – операторы ранга 1 из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ соответственно. Для произвольных распределений вероятностей $\{\pi_i\}$ и $\{\lambda_j\}$ пусть $\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$ – множество всех распределений вероятностей $\{\omega_{ij}\}$ таких, что $\sum_j\omega_{ij}=\pi_i$ и $\sum_i\omega_{ij}=\lambda_j$, т. е. $\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$ – классический аналог множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Пусть $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$ – замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$, состоящее из всех состояний вида $\sum_{i,j}\omega_{ij}E_{ii}\otimes F_{jj}$, где $\{\omega_{ij}\}\in\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$. Множество $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$ можно отождествить с классическим аналогом $\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$ множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$.

Пусть G – группа всех унитарных операторов в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$, диагонализируемых в базисе $\{|e_i\otimes f_j\rangle\}$. Нам потребуется следующее простое наблюдение.

Лемма 5. *Пусть $\rho=\sum_i\pi_i|e_i\rangle\langle e_i|$ и $\sigma=\sum_j\lambda_j|f_j\rangle\langle f_j|$ – состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.*

1) *Произвольное состояние ω из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ можно представить в виде*

$$\omega=\sum_{i,j}\omega_{ij}E_{ii}\otimes F_{jj}+\sum_{i\neq j,\,k\neq l}\eta_{ijkl}E_{ij}\otimes F_{kl},$$

где $\{\omega_{ij}\}\in\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$.

2) *Множество $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ является инвариантным для группы автоморфизмов $\{U(\,\cdot\,)U^*\}_{U\in G}$, а множество $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$ состоит из всех инвариантных состояний для этой группы, лежащих в $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$.*

Доказательство. Произвольное состояние ω из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ можно представить в виде

$$\omega=\sum_{i,j,k,l}\eta_{ijkl}E_{ij}\otimes F_{kl}.$$

Учитывая требования $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega=\rho=\sum_i\pi_iE_{ii}$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\omega=\sigma=\sum_j\lambda_jF_{jj}$, нетрудно получить утверждение 1) леммы.

Поскольку произвольный оператор U из группы определяется множеством $\{\varphi_{ij}(U)\}_{i,j}$ чисел из $[0,2\pi)$ посредством выражения

$$U=\sum_{i,j}\exp\bigl(\mathrm{i}\,\varphi_{ij}(U)\bigr)E_{ii}\otimes F_{jj},$$

имеем $UE_{ii}\otimes F_{jj}U^*=E_{ii}\otimes F_{jj}$ и $UE_{ij}\otimes F_{kl}U^*=\exp\bigl(\mathrm{i}(\varphi_{ik}-\varphi_{jl})\bigr)E_{ij}\otimes F_{kl}$. Поэтому для данных $\omega\in\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ и U получаем

$$U\omega U^*=\sum_{i,j}\omega_{ij}E_{ii}\otimes F_{jj}+\sum_{i\neq j,\,k\neq l}\eta_{ijkl}\exp\bigl(\mathrm{i}(\varphi_{ik}-\varphi_{jl})\bigr)E_{ij}\otimes F_{kl}.$$

Используя это наблюдение, нетрудно получить утверждение 2) леммы.

Следующее предложение показывает, что проблема определения χ-емкости и нахождения оптимального среднего состояния множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ является нетривиальной даже в симметричном случае $\rho\cong\sigma$.

Предложение 9. *Пусть* $\rho=\sum_i\lambda_i|e_i\rangle\langle e_i|$ *и* $\sigma=\sum_j\lambda_j|f_j\rangle\langle f_j|$ *– два изоморфных состояния и* $H(\rho)=H(\sigma)=-\sum_i\lambda_i\log\lambda_i=h\leqslant+\infty$. *Тогда*:

1) $h\leqslant\overline{C}\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)\leqslant 2h$, *причем равенство в левой части имеет место тогда и только тогда, когда* ρ *и* σ *– чистые состояния*;

2) *в случае* $h<+\infty$ *существует оптимальная мера* $\mu_*(\rho,\sigma)$ *с барицентром* $\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)$ *в* $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$, *причем* $\operatorname{supp}\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)=\operatorname{supp}\rho\otimes\operatorname{supp}\sigma$, *и следующие утверждения равносильны*:

(i) $\overline{C}\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)=2h$;

(ii) $\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)=\rho\otimes\sigma$;

(iii) *состояния* ρ *и* σ *пропорциональны проекторам конечного ранга*;

(iv) *носитель меры* $\mu_*(\rho,\sigma)$ *состоит из чистых состояний.*

Доказательство. В силу субаддитивности энтропии имеем $H(\omega)\leqslant H(\rho)+H(\sigma)=2h$ для всех ω из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Это дает оценку сверху для $\overline{C}\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)$.

Предположим, что $\overline{C}\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)<+\infty$. В силу [11, теорема 1] существует единственное состояние $\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)$ из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ такое, что

$$H\bigl(\omega\,\|\,\Omega(\mathcal{C}(\rho,\sigma))\bigr)\leqslant\overline{C}\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)\qquad\forall\,\omega\in\mathcal{C}(\rho,\sigma).\tag{32}$$

В силу следствия 4 это состояние $\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)$ инвариантно относительно автоморфизма $U(\,\cdot\,)U^*$ для любого U из G и, используя лемму 5, получаем, что

$$\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)=\sum_{i,j}\omega_{ij}E_{ii}\otimes F_{jj}\tag{33}$$

для некоторого распределения вероятностей $\{\omega_{ij}\}$ из $\mathcal{C}(\{\lambda_i\},\{\lambda_j\})$. Все вероятности ω_{ij} в этом распределении должны быть положительны, поскольку в противном случае легко найти состояние ω из множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$, для которого $H\bigl(\omega\,\|\,\Omega(\mathcal{C}(\rho,\sigma))\bigr)=+\infty$ вопреки неравенству (32).

Пусть $\omega=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\,\sqrt{\lambda_j}\,E_{ij}\otimes F_{ij}$ – чистое состояние из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Используя (32) и (33), получаем

$$\begin{aligned}\overline{C}\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)&\geqslant H\bigl(\omega\,\|\,\Omega(\mathcal{C}(\rho,\sigma))\bigr)=-\operatorname{Tr}\omega\log\bigl(\Omega(\mathcal{C}(\rho,\sigma))\bigr)\\&=-\operatorname{Tr}\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\,\sqrt{\lambda_j}\,(\log\omega_{jj})E_{ij}\otimes F_{ij}=-\sum_i\lambda_i\log\omega_{ii}.\end{aligned}\tag{34}$$

Если состояния ρ и σ не являются чистыми, то правая часть (34) больше, чем $-\sum_i\lambda_i\log\lambda_i=h$, поскольку $\omega_{ii}+\sum_{j\neq i}\omega_{ij}=\lambda_i$ и $\omega_{ij}>0$ для всех i и j.

Существование оптимальной меры в случае $h<+\infty$ следует из [11, теорема 2] и следствия 6.

Эквивалентность утверждений (i)–(iv) будет доказана в следующем порядке: (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Предположим, что

$$\Omega\bigl(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\bigr)=\rho\otimes\sigma=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_jE_{ii}\otimes F_{jj}.$$

Пусть ω – чистое состояние, введенное выше. Используя выражение (34) при $\omega_{ij}=\lambda_i\lambda_j$, получаем

$$\overline{C}\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big) \geqslant H\big(\omega \,\|\, \Omega(\mathcal{C}(\rho,\sigma))\big) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i^2 = 2h.$$

Поскольку обратное неравенство уже доказано, $\overline{C}\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big)=2h$.

(i) $\Longrightarrow$ (iv). Предположим, что $\overline{C}\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big)=2h=H(\rho\otimes\sigma)$. Пусть μ_* – произвольная оптимальная мера для множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Поскольку $\chi(\mu_*)=2h$ – максимальное значение энтропии на множестве $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$, из [11, выражение (2)] получаем

$$\widehat{H}(\mu_*)=\int H(\omega)\mu_*(d\omega)=0$$

и, следовательно, носитель меры μ_* состоит из чистых состояний.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). Пусть μ_* – оптимальная мера для множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ с носителем на множестве чистых состояний. Это означает, что барицентр $\Omega\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big)$ этой меры принадлежит выпуклому замыканию множества чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Поскольку, как показано выше, $\Omega\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big)$ – состояние из $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$ с носителем $\operatorname{supp}\rho\otimes\operatorname{supp}\sigma$, из приведенной ниже леммы 6 следует, что состояния ρ и σ пропорциональны проекторам некоторого конечного ранга.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Предположим, что состояния ρ и σ пропорциональны проекторам конечного ранга. В силу приведенной ниже леммы 6 существует ансамбль чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ со средним состоянием $\rho\otimes\sigma$. Этот ансамбль, очевидно, является оптимальным для множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$, а значит, его среднее состояние совпадает с $\Omega\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big)$.

Лемма 6. *Пусть ρ и σ – состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *множество $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$ содержит состояние с носителем $\operatorname{supp}\rho\otimes\operatorname{supp}\sigma$, которое принадлежит выпуклому замыканию множества чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$*;

(ii) *состояния ρ и σ пропорциональны проекторам некоторого конечного ранга*;

(iii) *состояние $\rho\otimes\sigma$ является конечной выпуклой комбинацией чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$.*

Доказательство. Из каждого утверждения леммы следует, что состояния ρ и σ изоморфны, поскольку в противном случае множество $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ не содержит чистых состояний.

Достаточно доказать, что (i) $\Longrightarrow$ (ii) и (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $\widehat{\omega}=\sum_{i,j}\omega_{ij}E_{ii}\otimes F_{jj}$ – состояние из $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$, принадлежащее выпуклому замыканию множества чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. В силу [1, лемма 1] существует мера μ с носителем на множестве чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ такая, что

$$\widehat{\omega}=\int_{\mathcal{C}(\rho,\sigma)}\omega\mu(d\omega).$$

Достаточно показать, что состояние ρ не имеет различных положительных собственных значений. Предположим, что λ_i и λ_j такие собственные значения. Используя разложение Шмидта для любого чистого состояния ω из $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$, нетрудно видеть, что $E_{ii}\otimes F_{jj}\omega=0$. Поэтому

$$\omega_{ij}E_{ii}\otimes F_{jj}=E_{ii}\otimes F_{jj}\widehat{\omega}=\int_{\mathcal{C}(\rho,\sigma)}E_{ii}\otimes F_{jj}\omega\mu(d\omega)=0,$$

а значит, носитель состояния $\widehat{\omega}$ не совпадает с $\operatorname{supp}\rho\otimes\operatorname{supp}\sigma$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Пусть $\rho=d^{-1}P$ и $\sigma=d^{-1}Q$, где P и Q – проекторы ранга d из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ соответственно. Пусть $\{|\varphi_i\rangle\}$ – некоторый базис из максимально сцепленных векторов в $P(\mathcal{H})\otimes Q(\mathcal{K})$. Тогда $\rho\otimes\sigma=d^{-2}\sum_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$.

Замечание 5. Интересно сравнить χ-емкость множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ с χ-емкостью множества $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)$, которое можно отождествить с классическим аналогом $\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$ множества $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$. Пусть состояния ρ и σ пропорциональны проекторам ранга d. В этом случае множество $\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$ состоит из таких распределений вероятностей $\{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^d$, что

$$\sum_{i=1}^d\omega_{ij}=d^{-1}=\sum_{j=1}^d\omega_{ij}.$$

Оптимальный ансамбль для множества $\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)\cong\mathcal{C}(\{\pi_i\},\{\lambda_j\})$ состоит из d состояний, имеющих один ненулевой элемент d^{-1} в каждом столбце и в каждой строке, с равными вероятностями d^{-1}, так что его среднее состояние есть равномерное распределение $\{\omega_{ij}=d^{-2}\}$. Таким образом,

$$\overline{C}\big(\mathcal{C}_s(\rho,\sigma)\big)=\log d^2-\log d=\log d=h=\frac{1}{2}\,\overline{C}\big(\mathcal{C}(\rho,\sigma)\big),$$

где последнее равенство следует из предложения 9. Таким образом, наличие сцепленных состояний в $\mathcal{C}(\rho,\sigma)$ приводит к двукратному увеличению χ-емкости.

3.5. Орбита компактной группы автоморфизмов. Пусть G – компактная группа и $\{U_g\}_{g\in G}$ – унитарное (проективное) представление этой группы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Рассмотрим множество $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}=\{U_g\sigma U_g^*\}_{g\in G}$. Это множество компактно как образ компактного множества G при непрерывном отображении $g\mapsto U_g\sigma U_g^*$. Выпуклое замыкание $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$ этого множества также компактно. Пусть $\omega(G,U_g,\sigma)=\int_G U_g\sigma U_g^*\mu_H(dg)$ – состояние из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$, где μ_H – мера Хаара на G.

Предложение 10. *Энтропия ограничена на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$ тогда и только тогда, когда $H\big(\omega(G,U_g,\sigma)\big)<+\infty$. В этом случае энтропия непрерывна на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$ и достигает своего максимума в состоянии*

$$\Gamma\big(\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})\big)=\omega(G,U_g,\sigma).$$

χ-емкость $\overline{C}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$ множества $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}$ равна $H\big(\sigma\,\|\,\omega(G,U_g,\sigma)\big)$. Если $\overline{C}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})<+\infty$, то множество $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}$ регулярно и образ меры Хаара μ_H при отображении $g\mapsto U_g\sigma U_g^*$ является оптимальной мерой для множества $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}$, имеющей барицентр

$$\Omega(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})=\omega(G,U_g,\sigma).$$

Доказательство. Поскольку $\int_G U_g \rho U_g^* \mu_H(dg) = \omega(G, U_g, \sigma)$ для любого состояния ρ из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$, утверждение об ограниченности следует из вогнутости энтропии и неравенства Йенсена [17]. Утверждение о непрерывности доказывается при помощи следствия 3 из [11], поскольку

$$\mathrm{Tr}\,\sigma\bigl(-\log \omega(G, U_g, \sigma)\bigr) = H\bigl(\omega(G, U_g, \sigma)\bigr).$$

Множество $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}$ инвариантно относительно действия группы автоморфизмов $\{U_g(\,\cdot\,)U_g^*\}_{g\in G}$ и $\omega(G, U_g, \sigma)$ – единственное инвариантное состояние в $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma})$ для этой группы. В силу следствия 5 имеем $\overline{C}(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}) = H\bigl(\sigma \,\|\, \omega(G, U_g, \sigma)\bigr)$ и $\Omega(\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}) = \omega(G, U_g, \sigma)$.

Утверждение о существовании оптимальной меры для множества $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}$ очевидно.

Утверждение о регулярности следует из приведенных выше наблюдений, поскольку $H\bigl(\rho \,\|\, \omega(G, U_g, \sigma)\bigr) = H\bigl(\sigma \,\|\, \omega(G, U_g, \sigma)\bigr)$ для всех ρ из $\mathcal{O}_{G,U_g,\sigma}$.

Пример 4 (замкнутое множество, имеющее оптимальную меру, но не имеющее атомической оптимальной меры). Пусть $G = \mathbb{T}$ – одномерная группа вращений (тор), представленная в виде интервала $[-\pi, \pi)$. В этом случае мера Хаара – это нормированная мера Лебега $\frac{dx}{2\pi}$. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2\bigl([-\pi, \pi)\bigr)$. Элементы $\mathcal{L}_2\bigl([-\pi, \pi)\bigr)$ можно рассматривать как 2π-периодические функции на $\mathbb{R}$. Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{T}}$ – унитарное представление группы $\mathbb{T}$, определенное правилом

$$U_\lambda\bigl(\psi(x)\bigr) = \psi(x - \lambda), \qquad \psi(x) \in \mathcal{L}_2\bigl([-\pi, \pi)\bigr).$$

Для заданного $|\varphi_0\rangle$ из $\mathcal{L}_2\bigl([\pi, \pi)\bigr)$ рассмотрим множество $\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$. В этом случае

$$\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda| d\lambda,$$

где $|\varphi_\lambda\rangle = U_\lambda|\varphi_0\rangle$. Заметим, что $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|})$ – замыкание выходного множества канала Φ, рассмотренного в [1]. В работе [1] показано, что

$$\overline{C}(\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}) = H\bigl(\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)\bigr) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^2(\varphi_0)\log c_n^2(\varphi_0), \tag{35}$$

где $\{c_n(\varphi_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x)$ относительно ортонормированной тригонометрической системы $\{\exp(\mathrm{i}\,nx)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. В силу предложения 10 конечность этого ряда означает непрерывность энтропии на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|})$. Из предложения 10 также следует, что образ нормированной меры Лебега $\frac{dx}{2\pi}$ при отображении $\lambda \mapsto U_\lambda|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|U_\lambda^*$ является оптимальной мерой для множества $\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$. Эта мера неатомическая, однако ее наличие не исключает возможности существования атомической оптимальной меры в этом случае. Ниже будет показано, что для некоторой функции $\varphi_0(x)$ множество $\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$ не имеет атомической оптимальной меры.

Пусть

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0) \\ \sqrt{2}\,, & x \in [0, +\pi). \end{cases}$$

[17] Неравенство Йенсена применимо в этом случае, поскольку энтропия является поточечным пределом монотонной последовательности непрерывных вогнутых функций [4].

В этом случае $c_n(\varphi_0) \sim n^{-1}$, а значит, сумма в (35) конечна.

Для доказательства отсутствия чисто атомической оптимальной меры достаточно показать, что состояние $\Omega(\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}) = \omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)$ не является счетной выпуклой комбинацией состояний из $\mathcal{O}_{\mathbb{T},U_\lambda,|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$.

Предположим, что

$$\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|) = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i |\varphi_{\lambda_i}\rangle\langle\varphi_{\lambda_i}|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\pi_1 \geqslant \pi_i$ для всех $i > 1$ и что $\lambda_1 = 0$. Для произвольного η имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i \langle\varphi_\eta|\varphi_{\lambda_i}\rangle^2 &= \langle\varphi_\eta|\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)|\varphi_\eta\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \langle\varphi_\eta|\varphi_\lambda\rangle^2 \, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \langle\varphi_0|\varphi_\lambda\rangle^2 \, d\lambda. \end{aligned} \tag{36}$$

Пусть $\theta(x)$ – 2π-периодическая функция, равна $(1 - \pi^{-1}|x|)^2$ на $[-\pi, +\pi]$. Тогда $\langle\varphi_\eta|\varphi_\lambda\rangle^2 = \theta(\eta - \lambda)$ для всех λ и η. Поскольку при каждом λ функция $\theta_\lambda(x) = \theta_0(x - \lambda)$ локально интегрируема, ей соответствует обобщенная функция $\widetilde{\theta}_\lambda$ из пространства $\mathfrak{D}'$. (Пространство $\mathfrak{D}'$ – линейное пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций с конечным носителем [3].) Пусть $\widetilde{\theta}'_\lambda \in \mathfrak{D}'$ – производная обобщенной функции $\widetilde{\theta}_\lambda \in \mathfrak{D}'$. Тогда (36) означает, что

$$\mathfrak{D}' - \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi_i \widetilde{\theta}'_{\lambda_i} = 0. \tag{37}$$

Пусть

$$\omega_\delta(x) = \begin{cases} \exp\bigl(-(1 - (x/\delta)^2)^{-1}\bigr), & x \in [-\delta, +\delta], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta] \end{cases}$$

– функция из пространства $\mathfrak{D}$ при каждом $\delta > 0$. Прямое интегрирование дает

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}'_\lambda(\omega'_\delta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'_\lambda(x)\omega'_\delta(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\lambda}\biggl(1 + \frac{x-\lambda}{\pi}\biggr)\omega'_\delta(x)\,dx \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{+\delta}\biggl(\frac{x-\lambda}{\pi} - 1\biggr)\omega'_\delta(x)\,dx = \frac{4\omega_\delta(\lambda)}{\pi} - \frac{2\delta I}{\pi^2}\,,\end{aligned}$$

если $\lambda \in [-\delta, +\delta]$, и

$$\widetilde{\theta}'_\lambda(\omega'_\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'_\lambda(x)\omega'_\delta(x)\,dx = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\delta}^{+\delta} x\omega'_\delta(x)\,dx = -\frac{2\delta I}{\pi^2}\,,$$

если $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]$, где

$$I = \delta^{-1}\int_{-\delta}^{+\delta} \omega_\delta(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \exp\bigl(-(1 - x^2)^{-1}\bigr)\,dx$$

– положительное число.

Пусть $\mathcal{N}(\delta)=\{i\in\mathbb{N}\mid\lambda_i\in[-\delta,+\delta]\}$ и $\mathcal{K}_n=\{2,3,\dots,n\}$. Используя предыдущее выражение, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i\widetilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta)=\pi_1\widetilde{\theta}'_0(\omega'_\delta)+\sum_{i\in\mathcal{N}(\delta)\cap\mathcal{K}_n}\pi_i\widetilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta)+\sum_{i\in(\mathbb{N}\setminus\mathcal{N}(\delta))\cap\mathcal{K}_n}\pi_i\widetilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta)$$
$$\geqslant\pi_1\biggl(\frac{4}{e\pi}-\frac{2\delta I}{\pi^2}\biggr)-\biggl(\frac{4}{e\pi}-\frac{2\delta I}{\pi^2}\biggr)\sum_{i\in\mathcal{N}(\delta),\,i>1}\pi_i-\frac{2\delta I}{\pi^2}\quad\forall\,n.$$

Поскольку $\sum_{i\in\mathcal{N}(\delta),\,i>1}\pi_i$ стремится к нулю, когда δ стремится к нулю, из данного неравенства следует $\liminf_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi_i\widetilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta)>0$ для всех достаточно малых δ, что противоречит (37).

§ 4. Другой подход к определению $\overline{C}(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$

Известно, что энтропию и относительную энтропию можно сначала определить для состояний конечного ранга, а затем посредством предельного перехода расширить это определение на произвольные состояния. Действительно, рассмотрим отображение

$$\Theta_P(\rho)=(\operatorname{Tr}P\rho)^{-1}P\rho P,$$

определяемое произвольным проектором P, с областью определения $\mathfrak{D}(\Theta_P)=\{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})\mid P\rho\neq 0\}$. В силу [4, лемма 4] энтропия $H(\rho)$ произвольного состояния ρ корректно определяется выражением

$$H(\rho)=\lim_{n\to+\infty}H\bigl(\Theta_{P_n}(\rho)\bigr),$$

а относительная энтропия $H(\rho\,\|\,\sigma)$ для любых состояний ρ и σ – выражением

$$H(\rho\,\|\,\sigma)=\lim_{n\to+\infty}H\bigl(\Theta_{P_n}(\rho)\,\|\,\Theta_{P_n}(\sigma)\bigr),$$

где $\{P_n\}$ – произвольная возрастающая последовательность проекторов конечного ранга, сильно сходящаяся к тождественному оператору $I_{\mathcal{H}}$ (предполагается, что n настолько большое, что состояния ρ и σ лежат в $\mathfrak{D}(\Theta_{P_n})$). Это значит, что данные пределы (конечные или бесконечные) существуют и не зависят от выбора последовательности $\{P_n\}$. Поскольку носители состояний $\Theta_{P_n}(\rho)$ и $\Theta_{P_n}(\sigma)$ лежат в конечномерном подпространстве $P_n(\mathcal{H})$ при каждом n, данное наблюдение сводит определение энтропии и относительной энтропии к конечномерному случаю.

В настоящем параграфе получен аналогичный результат для χ-емкости и оптимального среднего произвольного множества состояний. Поскольку для любого замкнутого подмножества состояний в d-мерном гильбертовом пространстве точную верхнюю грань в определении χ-емкости можно брать по множеству всех ансамблей из d^2 состояний, χ-емкость и оптимальное среднее состояние этого множества определяются методами линейного программирования [13]. Поэтому результаты данного параграфа дают конструктивные определения χ-емкости и оптимального среднего для произвольного множества состояний, которые (в принципе) могут быть использованы для численной аппроксимации этих величин.

Ясно, что для любого проектора P соответствующее отображение $\Theta_P(\sigma)$ непрерывно в каждой точке своей области определения. Несмотря на нелинейность этого отображения имеет место следующий результат.

Лемма 7. 1) *Для произвольного выпуклого множества* $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{D}(\Theta_P)$ *его образ* $\Theta_P(\mathcal{A})$ *при отображении* Θ_P *является выпуклым подмножеством* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

2) *Для произвольного ансамбля* $\{\pi_i, \rho_i\}_{i=1}^m$ *состояний из* $\Theta_P(\mathcal{A})$ *существует ансамбль* $\{\lambda_i, \sigma_i\}_{i=1}^m$ *состояний из* $\mathcal{A}$ *такой, что*

$$\Theta_P(\sigma_i) = \rho_i, \qquad \lambda_i \operatorname{Tr} P\sigma_i = \pi_i \sum_{j=1}^m \lambda_j \operatorname{Tr} P\sigma_j, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение 2) леммы, поскольку из него следует, что

$$\Theta_P\biggl(\sum_i \lambda_i\sigma_i\biggr) = \sum_i \pi_i\rho_i.$$

Для каждого i состояние ρ_i из $\Theta_P(\mathcal{A})$ является образом некоторого состояния σ_i из $\mathcal{A}$. Пусть $\eta_i = \pi_i(\operatorname{Tr} P\sigma_i)^{-1}$ – положительное число при каждом $i = \overline{1,m}$ и $\bigl\{\lambda_i = \eta_i\bigl(\sum_{j=1}^m \eta_j\bigr)^{-1}\bigr\}_{i=1}^m$ – распределение вероятностей. Суммируя равенства $\lambda_i \operatorname{Tr} P\sigma_i = \pi_i\bigl(\sum_{j=1}^m \eta_j\bigr)^{-1}$, получаем $\sum_{i=1}^m \lambda_i \operatorname{Tr} P\sigma_i = \bigl(\sum_{j=1}^m \eta_j\bigr)^{-1}$.

Лемма 8. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– множество с конечной* χ*-емкостью и* P *– проектор такой, что* $\eta(\mathcal{A}, P) = \inf_{\rho\in\mathcal{A}} \operatorname{Tr} P\rho > 0$. *Тогда*

$$\eta(\mathcal{A}, P)\overline{C}\bigl(\Theta_P(\mathcal{A})\bigr) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\Theta_P(\mathcal{A})$ пусть $\{\lambda_i, \sigma_i\}$ – соответствующий ансамбль состояний из $\mathcal{A}$, существующий в силу леммы 7. Следовательно, $\eta = \sum_i \lambda_i\eta_i$, где $\eta_i = \operatorname{Tr} P\sigma_i$ и $\eta = \operatorname{Tr} P\,\overline{\sigma}$.

Рассмотрим канал

$$\Phi(\rho) = P\rho P + \bigl(\operatorname{Tr}(I-P)\rho\bigr)\tau,$$

где τ – чистое состояние, соответствующее произвольному единичному вектору из $\mathcal{H} \ominus P(\mathcal{H})$. Используя общие свойства относительной энтропии, получаем

$$\begin{aligned}\chi\bigl(\{\lambda_i, \Phi(\sigma_i)\}\bigr) &= \sum_i \lambda_i H(P\sigma_i P \,\|\, P\,\overline{\sigma}P) \\ &\quad + \sum_i \lambda_i H\bigl((\operatorname{Tr}(I-P)\sigma_i)\tau \,\|\, (\operatorname{Tr}(I-P)\overline{\sigma})\tau\bigr) \geqslant \sum_i \lambda_i H(P\sigma_i P \,\|\, P\,\overline{\sigma}P) \\ &= \sum_i \lambda_i H(\eta_i\rho_i \,\|\, \eta\overline{\rho}) \geqslant \sum_i \lambda_i\eta_i H(\rho_i \,\|\, \overline{\rho}) = \eta\sum_i \pi_i H(\rho_i \,\|\, \overline{\rho}) \geqslant \eta(\mathcal{A}, P)\chi(\{\pi_i, \rho_i\}).\end{aligned}$$

В силу монотонности относительной энтропии имеем

$$\chi\bigl(\{\lambda_i, \Phi(\sigma_i)\}\bigr) \leqslant \chi(\{\lambda_i, \sigma_i\}).$$

Из двух последних неравенств следует утверждение леммы.

Замечание 6. Коэффициент $\eta(\mathcal{A}, P)$ в лемме 8 нельзя заменить на 1 (см. пример в приведенном ниже замечании 7).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда*:

1) *если χ-емкость множества $\mathcal{A}$ конечна, то*

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}\big(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})\big)=\overline{C}(\mathcal{A}),\qquad \lim_{n\to+\infty}\Omega\big(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})\big)=\Omega(\mathcal{A})$$

для любой последовательности проекторов $\{P_n\}$, сильно сходящейся к $I_{\mathcal{H}}$;

2) *если существует последовательность проекторов $\{P_n\}$, сильно сходящаяся к $I_{\mathcal{H}}$, такая, что все отображения соответствующей последовательности $\{\Theta_{P_n}\}$ корректно определены на множестве $\mathcal{A}$ и последовательность $\{\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A}))\}$ ограничена, то χ-емкость множества $\overline{C}(\mathcal{A})$ конечна.*

Доказательство. Пусть $\overline{C}(\mathcal{A})<+\infty$ и $\{P_n\}$ – произвольная последовательность проекторов, сильно сходящаяся к $I_{\mathcal{H}}$. По утверждению 4) теоремы 1 множество $\mathcal{A}$ предкомпактно. Из критерия компактности следует, что $\lim_{n\to+\infty}\eta(\mathcal{A},P_n)=1$, где $\eta(\mathcal{A},P_n)=\inf_{\rho\in\mathcal{A}}\operatorname{Tr}P_n\rho$. Таким образом, $\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{D}(\Theta_{P_n})$ для всех достаточно больших n, и, используя лемму 8, получаем

$$\limsup_{n\to+\infty}\overline{C}\big(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})\big)\leqslant\overline{C}(\mathcal{A}).$$

Поскольку $\Theta_{P_n}(\rho)\to\rho$ при $n\to+\infty$, из утверждения 1) леммы 1 следует, что

$$\liminf_{n\to+\infty}\overline{C}\big(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})\big)\geqslant\overline{C}(\mathcal{A}).$$

Из двух последних неравенств получаем первое предельное выражение в теореме, второе следует из утверждения 2) леммы 1.

Если $\overline{C}(\mathcal{A})=+\infty$ и $\{P_n\}$ – последовательность проекторов конечного ранга, сильно сходящаяся к $I_{\mathcal{H}}$, такая, что $\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{D}(\Theta_{P_n})$ для всех достаточно больших n, то в силу утверждения 1) леммы 1

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}\big(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})\big)=+\infty.$$

Замечание 7. Последовательность $\{\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A}))\}$ может сходиться к $\overline{C}(\mathcal{A})$ различным образом в зависимости от выбора последовательности $\{P_n\}$. Интересно отметить, что для некоторых множеств $\mathcal{A}$ и последовательностей $\{P_n\}$ последовательность $\{\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A}))\}$ сходится к $\overline{C}(\mathcal{A})$, строго убывая. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ – множество, состоящее из двух состояний $\left\{\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\sigma_i\right\}_{i=1,2}$, где ρ – состояние с бесконечномерным носителем $\mathcal{H}_\rho$ таким, что $\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_\rho$ – двумерное подпространство, и σ_1, σ_2 – состояния, соответствующие ортогональным единичным векторам из $\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_\rho$. Пусть $\{P_n\}$ – такая последовательность проекторов конечного ранга, что $P_n(\mathcal{H})\supseteq\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_\rho$ и последовательность $\{\eta_n=\operatorname{Tr}P_n\rho\}$ строго возрастает к 1. Нетрудно видеть, что

$$\overline{C}\big(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})\big)=\frac{1}{1+\eta_n}\log 2\searrow\frac{1}{2}\log 2=\overline{C}(\mathcal{A}),\qquad n\to+\infty.$$

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в процессе работы над данной статьей.

Список литературы

1. Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, “О понятии сцепленности в гильбертовом пространстве”, *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154; англ. пер.: A. S. Kholevo, M. E. Shirokov, R. F. Werner, “On the notion of entanglement in Hilbert spaces”, *Russ. Math. Surv.*, **60**:2 (2005), 359–360.
2. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam, 1979.
3. Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа*, Высшая школа, М., 1988.
4. G. Lindblad, “Expectation and entropy inequalities for finite quantum systems”, *Comm. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.
5. G. Lindblad, “Completely positive maps and entropy inequalities”, *Comm. Math. Phys.*, **40**:2 (1975), 147–151.
6. M. Ohya, D. Petz, *Quantum entropy and its use*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
7. K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, **3**, Academic Press, New York–London, 1967.
8. K. R. Parthasarathy, *Extremal quantum states in coupled systems*, `arXiv.org: quant-ph/0307182`.
9. А. С. Холево, “Квантовые теоремы кодирования”, *УМН*, **53**:6 (1998), 193–230; англ. пер.: A. S. Holevo, “Quantum coding theorems”, *Russ. Math. Surv.*, **53**:6 (1998), 1295–1331.
10. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, М., Ижевск, 2003; пер. с англ.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs, Springer, Berlin, 2001.
11. М. Е. Широков, “Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 193–222.
12. M. E. Shirokov, “The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem”, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159.
13. P. W. Shor, “Capacities of quantum channels and how to find them”, *Math. Program.*, **97**:1–2 (2003), 311–335; `arXiv.org: quant-ph/0304102`.
14. A. Wehrl, “General properties of entropy”, *Rev. Mod. Phys.*, **50** (1978), 221–250.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `msh@mi.ras.ru`

Поступило в редакцию
23.12.2005