УДК 519.248.3

М. Е. Широков

Свойства пространства квантовых состояний и монотонные характеристики сцепленности

Исследованы свойства бесконечномерных обобщений понятий выпуклой оболочки и выпуклой надстройки функции, определенной на множестве квантовых состояний. Получены достаточные условия совпадения и непрерывности сужений различных выпуклых оболочек полунепрерывной снизу функции на подмножество квантовых состояний с ограниченным значением обобщенной средней энергии (аффинной полунепрерывной снизу неотрицательной функции). Полученные результаты использованы для обоснования бесконечномерного обобщения метода выпуклой надстройки, широко применяемого в конечномерном случае для построения монотонных характеристик сцепленности состояний составной квантовой системы. Представлено несколько примеров монотонных характеристик сцепленности, построенных этим методом. В частности, рассмотрено бесконечномерное обобщение понятия сцепленности формирования и исследованы его свойства.

Библиография: 33 наименования.

Ключевые слова: выпуклая оболочка и выпуклая надстройка функции, квантовое состояние, монотонная характеристика сцепленности, сцепленность формирования.

Введение

При исследовании статистических свойств конечномерных квантовых систем широко используются такие понятия выпуклого анализа, как выпуклая оболочка, выпуклое замыкание, а также выпуклая надстройка (the convex roof [1]) – специальная конструкция выпуклого продолжения функции, заданной на крайних точках выпуклого множества. Последняя конструкция играет ключевую роль при построении так называемых монотонных характеристик сцепленности (entanglement monotones) – функций на множестве состояний составной квантовой системы, характеризующих сцепленность этих состояний [2], [3].

Основная трудность использования этих конструкций в бесконечномерном случае состоит в том, что их приходится применять к функциям с "патологическими" свойствами. Так, например, важнейшая из этих функций – энтропия фон Неймана – принимает значение $+\infty$ на подмножестве второй категории.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00424-а), АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"(грант 2.1.1/500), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект № 1.2.1, контракт 938) и Научной программы "Математическая теория управления" РАН.

При этом ряд “элементарных” фактов выпуклого анализа может не иметь места (например, неравенство Йенсена может не выполняться для выпуклой борелевской функции и т. п.). Все это приводит к необходимости тщательного исследования указанных выше конструкций при достаточно слабых требованиях относительно исходных функций на множестве состояний.

Основным инструментом настоящего исследования являются следующие специальные свойства выпуклого множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ квантовых состояний в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

1) слабая компактность множества мер, барицентры которых образуют компактное подмножество,
2) открытость барицентрического отображения (в слабой топологии на множестве вероятностных мер),

установленные в [4] и [5] соответственно и подробно обсуждаемые в § 1. Эти свойства отражают особые соотношения между топологией и выпуклой структурой множества квантовых состояний.

В § 2 рассмотрены обобщения понятий выпуклой оболочки функции, заданной на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, и выпуклой надстройки функции, заданной на $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, а также исследованы их свойства непрерывности. Доказана непрерывность операции выпуклого замыкания функции по отношению к монотонной поточечной сходимости на классе полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

В § 3 получено достаточное условие непрерывности и совпадения сужений различных выпуклых оболочек заданной функции на множество состояний с ограниченной обобщенной средней энергией (неотрицательной полунепрерывной снизу аффинной функцией). Из этого результата следует несколько полезных свойств выходной энтропии Реньи (в частности, выходной энтропии фон Неймана) квантового канала.

В § 4 рассмотрены приложения полученных общих результатов к теории сцепленности в составных квантовых системах [6, гл. 3] и два варианта (дискретный и непрерывный) бесконечномерного обобщения метода выпуклой надстройки, применяемого для построения монотонных характеристик сцепленности в конечномерных системах. Показано, что функции, построенные при использовании дискретного варианта, могут не обладать основным свойством монотонной характеристики сцепленности даже при ограниченной полунепрерывной снизу порождающей функции, тогда как при использовании непрерывного варианта можно построить монотонные характеристики сцепленности с хорошими свойствами при достаточно слабых требованиях к порождающей функции. Поэтому именно непрерывный вариант рассматривается в качестве бесконечномерного обобщения метода выпуклой надстройки. Примером его применения является построение бесконечномерной сцепленности формирования (Entanglement of Formation, EoF), которая является одной из основных мер сцепленности в конечномерных составных квантовых системах [7]. Сравнение этого подхода с другим возможным обобщением EoF, предложенным в [8], проводится в § 5.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов, $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ – банахово пространство линейных ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{H}$, содержащее конус $\mathfrak{B}_+(\mathcal{H})$ всех положительных операторов, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})$ – сепарабельные банаховы пространства соответственно всех ядерных операторов и ядерных эрмитовых операторов со следовой нормой $\|\cdot\|_1 = \operatorname{Tr}|\cdot|$ (см. [9]).

Замкнутые выпуклые подмножества

$$\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) = \bigl\{A \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \mid A \geqslant 0, \operatorname{Tr} A \leqslant 1\bigr\}, \qquad \mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \bigl\{A \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr} A = 1\bigr\}$$

пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ являются полными сепарабельными метрическими пространствами с метрикой, определяемой следовой нормой. Оператор ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ задает линейный функционал $A \mapsto \operatorname{Tr} A\rho$ на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, называемый в теории операторных алгебр *состоянием*, поэтому в дальнейшем для краткости будем называть операторы из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ просто *состояниями*. *Рангом* положительного оператора (состояния) будем называть размерность ортогонального дополнения его ядра.

Будем обозначать через $\operatorname{co}\mathcal{A}$ (соответственно, $\overline{\operatorname{co}}\mathcal{A}$) выпуклую оболочку (соответственно, выпуклое замыкание) множества $\mathcal{A}$ [10, с. 26]. Множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{A}$ обозначим через $\operatorname{extr}\mathcal{A}$.

Множество всех борелевских вероятностных мер на замкнутом подмножестве состояний $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости, обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Это множество является полным сепарабельным метрическим пространством [11, гл. II, § 6]. Подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из мер с конечным носителем, обозначим через $\mathcal{P}^{\mathrm{f}}(\mathcal{A})$. Далее также будем использовать сокращенные обозначения $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Барицентр меры $\mu \in \mathcal{P}$ – это состояние, определяемое интегралом Бохнера

$$\bar{\rho}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \sigma\mu(d\sigma).$$

Для произвольного подмножества $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ обозначим через $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ (соответственно, $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathcal{A}}$) подмножество множества $\mathcal{P}$ (соответственно, $\widehat{\mathcal{P}}$), состоящее из всех мер с барицентром в $\mathcal{A}$.

Конечный или счетный набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ называется *ансамблем* и обозначается $\{\pi_i, \rho_i\}$. Далее будем рассматривать ансамбль как частный случай вероятностной меры на множестве квантовых состояний.

Энтропия фон Неймана состояния ρ и *относительная энтропия* состояний ρ и σ определяются соответственно выражениями

$$H(\rho) = -\sum_i \langle i|\,\rho\log\rho\,|i\rangle, \qquad H(\rho\,\|\sigma) = \sum_i \langle i|\,(\rho\log\rho - \rho\log\sigma)\,|i\rangle,$$

в которых $\{|i\rangle\}$ – базис из собственных векторов состояния ρ, причем предполагается, что $H(\rho\,\|\sigma) = +\infty$, если носитель состояния ρ (ортогональное дополнение ядра оператора ρ) не лежит внутри носителя состояния σ. Энтропия и относительная энтропия являются полунепрерывными снизу функциями своих аргументов со значениями в $[0, +\infty]$, первая из которых вогнута, а вторая выпукла по совокупности аргументов [12].

Неограниченный положительный оператор в пространстве $\mathcal{H}$ с дискретным спектром конечной кратности будем называть $\mathfrak{H}$-*оператором*.

Множество квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ обладает следующими двумя свойствами:

A) для любого компактного множества $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ множество $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно (см. [4]);

B) барицентрическое отображение $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \bar{\rho}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ открыто (см. [5], [13]).

Свойство A) позволяет доказать наличие у множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ некоторых хорошо известных свойств компактных выпуклых множеств (см. [14, лемма 1] или приведенные ниже предложения 1 и 6), следовательно, его можно рассматривать как один из вариантов "слабой" компактности. В действительности это свойство не является чисто топологическим, но отражает особое соотношение между топологией и выпуклой структурой множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Следуя терминологии, принятой в [13], [15], будем называть его *свойством μ-компактности*.

Заметим, что μ-компактность пересечения положительного конуса с единичным шаром является отличительной особенностью банахова пространства ядерных операторов (класса Шаттена порядка $p = 1$) в семействе классов Шаттена порядка $p \geqslant 1$. Более того, можно показать, что множество $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ перестает быть[1] μ-компактным в топологии $\|\cdot\|_p$-нормы при $p > 1$ и что класс Шаттена порядка $p = 2$ – гильбертово пространство операторов Гильберта–Шмидта – не содержит μ-компактов, не являющихся компактами. Эти и другие результаты о свойстве μ-компактности, а также примеры μ-компактных множеств рассмотрены в [15].

Свойство B) выражает еще одно соотношение между топологией и выпуклой структурой множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Характеризация этого свойства для любого μ-компактного выпуклого множества получена в [13, теорема[2] 1]. В силу этой теоремы свойство B) равносильно непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и открытости отображения

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \times [0,1] \ni (\rho, \sigma, \lambda) \mapsto \lambda\rho + (1-\lambda)\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Аналог последнего свойства для любого выпуклого множества представляется наиболее просто проверяемым и (его эквивалентная, но формально более строгая формулировка) называется свойством *устойчивости* (см. [17], [18] и библиографию в этих работах).

[1]Это показывает, что свойство μ-компактности не сохраняется при ослаблении топологии (в отличие от свойства компактности).

[2]Данная теорема является частичным некомпактным обобщением результатов из [16], относящихся к выпуклым компактам. Полное обобщение этих результатов на класс μ-компактных выпуклых множеств получено в [15].

§ 2. Выпуклая оболочка и выпуклая надстройка

В настоящем параграфе рассмотрено несколько понятий и конструкций для функций, определенных на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Заметим, что все введенные определения носят универсальный характер, т. е. могут быть сформулированы в терминах функций, определенных на выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве $\mathcal{A}$ локально выпуклого пространства (в роли $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$). Соответственно, основные результаты, полученные в параграфе, также могут быть доказаны в этом расширенном контексте при определенных дополнительных условиях, налагаемых на множество $\mathcal{A}$ (выполненных для $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$). Возможности такого рода обобщений рассмотрены в приложении.

2.1. Несколько понятий выпуклости функции. Далее будем рассматривать функции на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, принимающие значения в $[-\infty, +\infty]$, которые ограничены либо сверху, либо снизу.

Помимо общеизвестного понятия выпуклой функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ будем также использовать его следующие более сильные модификации.

Функция f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ называется *σ-выпуклой*, если

$$f\biggl(\sum_i \pi_i\rho_i\biggr) \leqslant \sum_i \pi_i f(\rho_i)$$

для любого *счетного* ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Универсально измеримая[3] функция f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ называется *μ-выпуклой*, если

$$f\biggl(\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \rho\mu(d\rho)\biggr) \leqslant \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu(d\rho)$$

для любой меры μ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Простейшим примером борелевской выпуклой функции на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, для которой свойства σ-выпуклости и μ-выпуклости не имеют места, является функция, принимающая значение 0 на выпуклом множестве состояний конечного ранга и значение $+\infty$ на множестве состояний бесконечного ранга. Различие между рассмотренными выше свойствами выпуклости можно показать также с помощью функций из приведенных ниже примеров 1, 2 (первая из которых выпукла, но не σ-выпукла, а вторая σ-выпукла, но не μ-выпукла).

Из выпуклости следует σ-выпуклость для любой ограниченной сверху функции на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (см. предложение A-1 в приложении).

В силу интегрального неравенства Йенсена (предложение A-2 в приложении) все указанные свойства выпуклости равносильны для полунепрерывных снизу функций и ограниченных сверху полунепрерывных сверху функций на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

2.2. Выпуклая оболочка и выпуклое замыкание. *Выпуклая оболочка* $\operatorname{co} f$ функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – это наибольшая выпуклая функция, не превосходящая функцию f [20, § 2.8], что означает

$$\operatorname{co} f(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i), \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{1}$$

[3]Это означает измеримость функции f относительно любой меры из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ [19].

(точная нижняя грань берется по множеству всех конечных ансамблей $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний со средним состоянием ρ).

σ-выпуклая оболочка σ-co f функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ определяется формулой

$$\sigma\text{-co}\, f(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i), \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{2}$$

(точная нижняя грань берется по множеству всех счетных ансамблей $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний со средним состоянием ρ). Функция σ-co f является σ-выпуклой, поскольку для любого счетного ансамбля $\{\lambda_i, \sigma_i\}$ со средним состоянием σ и любого семейства $\{\{\pi_{ij}, \rho_{ij}\}_j\}_i$ счетных ансамблей такого, что $\sigma_i = \sum_j \pi_{ij}\rho_{ij}$ для всех i, счетный ансамбль $\{\lambda_i\pi_{ij}, \rho_{ij}\}_{ij}$ имеет среднее состояние σ. Поэтому σ-co f – это наибольшая σ-выпуклая функция, не превосходящая функцию f.

μ-выпуклая оболочка μ-co f борелевской функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ определяется формулой

$$\mu\text{-co}\, f(\rho) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\mu(d\sigma), \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{3}$$

(точная нижняя грань берется по множеству всех вероятностных мер μ с барицентром ρ). Если функция μ-co f универсально измерима[4] и μ-выпукла, то она является наибольшей μ-выпуклой функцией, не превосходящей функцию f. В силу приведенных ниже предложений 1, 2 (с учетом очевидной выпуклости функции μ-co f и предложения A-2 в приложении) это справедливо для любой ограниченной снизу полунепрерывной снизу или ограниченной сверху полунепрерывной сверху функции f.

Выпуклое замыкание $\overline{\text{co}}f$ ограниченной снизу функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – это наибольшая выпуклая полунепрерывная снизу (замкнутая) функция, не превосходящая функцию f [20, § 2.8]. В силу теоремы Фенхеля (см. [10], [20], [21]) функция $\overline{\text{co}}f$ совпадает с двойным преобразованием Фенхеля функции f, что означает[5]

$$\overline{\text{co}}f(\rho) = f^{**}(\rho) = \sup_{A\in\mathfrak{B}_+(\mathcal{H})} [\operatorname{Tr} A\rho - f^*(A)], \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \tag{4}$$

где

$$f^*(A) = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})} [\operatorname{Tr} A\rho - f(\rho)], \qquad A \in \mathfrak{B}_+(\mathcal{H}).$$

Из определений и предложения A-2 в приложении следует, что

$$\overline{\text{co}}f(\rho) \leqslant \mu\text{-co}\, f(\rho) \leqslant \sigma\text{-co}\, f(\rho) \leqslant \text{co}\, f(\rho), \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}),$$

для любой борелевской ограниченной снизу функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Можно показать (см. приведенное ниже следствие 1), что равенства в этих неравенствах имеют место для любой непрерывной ограниченной функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Следующие примеры показывают, что последнее утверждение не имеет места в общем случае.

---

[4]Используя результаты из [19], универсальную измеримость функции μ-co f можно доказать для любой ограниченной борелевской функции f.

[5]Поскольку пространство $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ является двойственным к пространству $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})$, для получения приведенного ниже выражения необходимо рассмотреть продолжение $\hat{f}$ функции f на вещественное банахово пространство $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})$, полагая $\hat{f} = +\infty$ на $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H}) \setminus \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Пример 1. Пусть H – энтропия фон Неймана (см. § 1) и ρ_0 – такое состояние, что $H(\rho_0) = +\infty$. Поскольку множество состояний с конечной энтропией выпукло, то $\operatorname{co} H(\rho_0) = +\infty$, в то время как $\sigma\text{-co}\, H(\rho_0) = 0$ в силу спектральной теоремы.

Пример 2. Пусть f – индикаторная функция дополнения замкнутого множества $\mathcal{A}_s$ чистых состояний-произведений из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ и ω_0 – построенное в [14] состояние из множества $\overline{\operatorname{co}}\mathcal{A}_s$ такое, что любая мера из $\mathcal{P}_{\{\omega_0\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}))$ не может иметь атомов в $\mathcal{A}_s$. Легко показать, что $\sigma\text{-co}\, f(\omega_0) = 1$. В силу [14, лемма 1] существует мера μ_0 из $\mathcal{P}_{\{\omega_0\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}))$ с носителем на множестве $\mathcal{A}_s$. Поэтому $\mu\text{-co}\, f(\omega_0) = 0$. Заметим, что $\sigma\text{-co}\, f$ – μ_0-интегрируемая σ-выпуклая ограниченная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$, для которой нарушается интегральное неравенство Йенсена:

$$1 = \sigma\text{-co}\, f(\omega_0) > \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})} \sigma\text{-co}\, f(\omega)\mu_0(d\omega) = 0$$

(здесь учитывается, что функция $\sigma\text{-co}\, f$ совпадает с функцией f на носителе меры μ_0).

Пример 3. Пусть f – индикаторная функция множества, состоящего из одного чистого состояния. Тогда $\mu\text{-co}\, f = f$, а $\overline{\operatorname{co}} f \equiv 0$.

В силу μ-компактности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ из [13, предложение 3] получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Если f – полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее μ-выпуклая оболочка полунепрерывна снизу, т. е.*

$$\overline{\operatorname{co}} f(\rho) = \mu\text{-co}\, f(\rho) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\mu(d\sigma), \qquad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}). \tag{5}$$

Точная нижняя грань в (5) достигается на некоторой мере из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}$.

μ-компактность множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является существенным условием справедливости представления (5) для выпуклого замыкания [15, предложение 7]. Из представления (5) следует, в частности, что выпуклое замыкание любой полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ совпадает с этой функцией на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ чистых состояний. Заметим также, что условие ограниченности снизу в предложении 1 существенно, поскольку в силу леммы 2 единственная выпуклая полунепрерывная снизу неограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – это функция, тождественно равная $-\infty$.

Устойчивость множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ позволяет доказать следующее утверждение.

Предложение 2. *Если f – полунепрерывная сверху функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее выпуклая оболочка полунепрерывна сверху. Если, дополнительно, f – ограниченная сверху функция, то ее выпуклая оболочка, σ-выпуклая оболочка и μ-выпуклая оболочка совпадают:* $\operatorname{co} f = \sigma\text{-co}\, f = \mu\text{-co}\, f$.

Доказательство. Полунепрерывность сверху функции $\mathrm{co}\, f$ можно вывести из более общего утверждения приведенной далее леммы 4, заметив, что в силу [4, лемма 3] для любой последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящейся к состоянию ρ_0, существует такой $\mathfrak{H}$-оператор H в пространстве $\mathcal{H}$, что $\sup_{n\geqslant 0} \mathrm{Tr}\, H\rho_n < +\infty$.

Совпадение функций $\mathrm{co}\, f$ и μ-$\mathrm{co}\, f$ при условии ограниченности сверху функции f легко показать, используя полунепрерывность сверху функционала $\mu \mapsto \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu(d\rho)$ на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ и плотность мер с конечным носителем в множестве мер с заданным барицентром [4, лемма 1].

Пример 3 показывает, что условия предложения 2 не гарантируют совпадение функции $\overline{\mathrm{co}} f$ с функцией μ-$\mathrm{co}\, f = \sigma$-$\mathrm{co}\, f = \mathrm{co}\, f$.

Предложения 1, 2 имеют очевидное следствие.

Следствие 1. *Если f – непрерывная ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее выпуклая оболочка непрерывна на любом подмножестве множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, где она совпадает с μ-выпуклой оболочкой этой функции.*

Если f – непрерывная ограниченная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее выпуклая оболочка, σ-выпуклая оболочка, μ-выпуклая оболочка и выпуклое замыкание совпадают и функция $\mathrm{co}\, f = \sigma$-$\mathrm{co}\, f = \mu$-$\mathrm{co}\, f = \overline{\mathrm{co}} f$ непрерывна.

Используя предложение 1, нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием совпадения функций $\mathrm{co}\, f$ и μ-$\mathrm{co}\, f$ в состоянии $\rho_0 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является выполнение для выпуклой измеримой (в силу предложения 2) функции $\mathrm{co}\, f$ неравенства Йенсена $\mathrm{co}\, f(\rho_0) \leqslant \int \mathrm{co}\, f(\rho)\mu(d\rho)$ для любой меры μ из $\mathcal{P}_{\{\rho_0\}}$. Одно достаточное условие такого совпадения приведено далее в следствии 6.

Второе утверждение следствия 1 показывает, что

$$\overline{\mathrm{co}} f(\rho) = \mathrm{co}\, f(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i), \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \tag{6}$$

для любой непрерывной ограниченной функции f на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Это представление для выпуклого замыкания является некомпактным обобщением следствия I.3.6 из [22].

Далее нам потребуется следующий аппроксимативный результат.

Лемма 1. *Пусть f – борелевская ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Для любого состояния ρ_0 из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ существует такая последовательность $\{\rho_n\}$, сходящаяся к состоянию ρ_0, что*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sigma\text{-}\mathrm{co}\, f(\rho_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{co}\, f(\rho_n) \leqslant \mu\text{-}\mathrm{co}\, f(\rho_0).$$

Если, дополнительно, функция f полунепрерывна снизу, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma\text{-}\mathrm{co}\, f(\rho_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{co}\, f(\rho_n) = \mu\text{-}\mathrm{co}\, f(\rho_0).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай неотрицательной функции f. Для заданного натурального n пусть μ_n – такая мера из $\mathcal{P}_{\{\rho_0\}}$, что

$$\mu\text{-}\mathrm{co}\, f(\rho_0) \geqslant \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu_n(d\rho) - \frac{1}{n}.$$

Поскольку множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ сепарабельно, существует последовательность $\{\mathcal{A}_i^n\}$ борелевских подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с диаметром, не превосходящим $1/n$, такая, что $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \bigcup_i \mathcal{A}_i^n$ и $\mathcal{A}_i^n \cap \mathcal{A}_j^n = \varnothing$, если $j \neq i$. Пусть $m = m(n)$ – такое число, что $\sum_{i=m+1}^{+\infty} \mu_n(\mathcal{A}_i^n) < 1/n$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu_n(\mathcal{A}_i^n) > 0$ для любого $i = \overline{1,m}$. При каждом i множество $\mathcal{A}_i^n$ содержит такое состояние ρ_i^n, что $f(\rho_i^n) \leqslant (\mu_n(\mathcal{A}_i^n))^{-1} \int_{\mathcal{A}_i^n} f(\rho)\mu_n(d\rho)$.

Пусть $\mathcal{B}_n = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_i^n$. Рассмотрим состояние $\rho_n = (\mu_n(\mathcal{B}_n))^{-1} \sum_{i=1}^m \mu_n(\mathcal{A}_i^n)\rho_i^n$. Покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \rho_0. \tag{7}$$

При каждом i состояние $\hat{\rho}_i^n = (\mu_n(\mathcal{A}_i^n))^{-1} \int_{\mathcal{A}_i^n} \rho\mu_n(d\rho)$ принадлежит множеству $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}_i^n)$ с диаметром, не превосходящем $1/n$. Следовательно, выполнено $\|\rho_i^n - \hat{\rho}_i^n\|_1 \leqslant 1/n$ при $i = \overline{1,m}$. Учитывая, что $\mu_n(\mathcal{B}_n) = \sum_{i=1}^m \mu_n(\mathcal{A}_i^n)$, имеем

$$\begin{aligned}
\|\rho_n - \rho_0\|_1 &= \left\| (\mu_n(\mathcal{B}_n))^{-1} \sum_{i=1}^m \mu_n(\mathcal{A}_i^n)\rho_i^n - \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{A}_i^n} \rho\mu_n(d\rho) - \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{B}_n} \rho\mu_n(d\rho) \right\|_1 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^m \mu_n(\mathcal{A}_i^n) \|(\mu_n(\mathcal{B}_n))^{-1}\rho_i^n - \hat{\rho}_i^n\|_1 + \left\| \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{B}_n} \rho\mu_n(d\rho) \right\|_1 \\
&\leqslant (1 - \mu_n(\mathcal{B}_n)) + \sum_{i=1}^m \mu_n(\mathcal{A}_i^n)\|\rho_i^n - \hat{\rho}_i^n\|_1 + \mu_n(\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{B}_n) < \frac{3}{n},
\end{aligned}$$

откуда следует (7).

В силу выбора состояния ρ_i^n имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{co}\, f(\rho_n) &\leqslant (\mu_n(\mathcal{B}_n))^{-1} \sum_{i=1}^m \mu_n(\mathcal{A}_i^n) f(\rho_i^n) \leqslant (\mu_n(\mathcal{B}_n))^{-1} \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{A}_i^n} f(\rho)\mu_n(d\rho) \\
&\leqslant (\mu_n(\mathcal{B}_n))^{-1} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu_n(d\rho) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(\mu\text{-}\mathrm{co}\, f(\rho_0) + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Из этого неравенства следует первое утверждение леммы. В силу предложения 1 второе утверждение леммы следует из первого (поскольку σ-$\mathrm{co}\, f \geqslant \mu$-$\mathrm{co}\, f = \overline{\mathrm{co}} f$). Лемма доказана.

Нам также потребуется следующее следствие ограниченности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Лемма 2. *Если вогнутая функция f полунепрерывна сверху на выпуклом подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и конечна в некоторой точке этого множества, то эта функция ограничена сверху на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть ρ_0 – такое состояние из $\mathcal{A}$, что $f(\rho_0) = c_0 \neq \pm\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $c_0 = 0$. Если существует такая последовательность $\{\rho_n\} \subset \mathcal{A}$, что $\lim_{n\to+\infty} f(\rho_n) = +\infty$, то последовательность состояний $\sigma_n = (1-\lambda_n)\rho_0 + \lambda_n\rho_n$ из $\mathcal{A}$, где $\lambda_n = (f(\rho_n))^{-1}$, сходится к состоянию ρ_0 в силу ограниченности множества $\mathcal{A}$ и $f(\sigma_n) \geqslant \lambda_n f(\rho_n) = 1$ в силу вогнутости и неотрицательности функции f, что противоречит полунепрерывности сверху этой функции.

2.3. Выпуклая надстройка. Если $\dim\mathcal{H} < +\infty$, то любое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ можно представить в виде среднего состояния некоторого конечного ансамбля чистых состояний. Это гарантирует корректность следующего выпуклого продолжения на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ любой функции f, определенной на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ чистых состояний,

$$f_*(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}^{\mathrm{f}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i), \qquad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{8}$$

(точная нижняя грань берется по множеству всех конечных ансамблей $\{\pi_i,\rho_i\}$ *чистых* состояний со средним состоянием ρ). Следуя принятой в [1] терминологии, будем называть это продолжение *выпуклой надстройкой* (the convex roof) функции f. Понятие выпуклой надстройки играет существенную роль в квантовой теории информации, где оно используется, в частности, для построения мер сцепленности (см. § 4).

В случае $\dim\mathcal{H} = +\infty$ можно рассмотреть следующие обобщения этой конструкции.

σ-выпуклая надстройка функции f на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ чистых состояний – это функция f_*^σ на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, определяемая формулой

$$f_*^\sigma(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i), \qquad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{9}$$

(точная нижняя грань берется по множеству всех счетных ансамблей $\{\pi_i,\rho_i\}$ *чистых* состояний со средним состоянием ρ). Аналогично случаю функции σ-co f легко показать σ-выпуклость функции f_*^σ. Поэтому f_*^σ – это наибольшее σ-выпуклое продолжение функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

μ-выпуклая надстройка борелевской функции f на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ чистых состояний – это функция f_*^μ на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, определяемая формулой

$$f_*^\mu(\rho) = \inf_{\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \int_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\mu(d\sigma), \qquad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{10}$$

(точная нижняя грань берется по множеству всех вероятностных мер μ с носителем на множестве *чистых* состояний и барицентром ρ). Если функция f_*^μ универсально измерима[6] и μ-выпукла, то она является наибольшим μ-выпуклым продолжением функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. В силу приведенных ниже предложений 3, 4 (с учетом очевидной выпуклости функции f_*^μ и предложения A-2 в приложении) это имеет место для любой ограниченной снизу полунепрерывной снизу или ограниченной сверху полунепрерывной сверху функции f.

Заметим, что понятия σ-выпуклой и μ-выпуклой надстройки можно свести к введенным в п. 2.2 понятиям σ-выпуклой и μ-выпуклой оболочек. Именно, нетрудно видеть, что $f_*^\sigma = \sigma\text{-co}\,\hat f$ и $f_*^\mu = \mu\text{-co}\,\hat f$ для любой функции f на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, где

$$\hat f(\rho) = \begin{cases} f(\rho), & \rho\in\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}),\\ +\infty, & \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}). \end{cases}$$

Поскольку из полунепрерывности снизу функции f на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ следует полунепрерывность снизу функции $\hat f$ на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, из предло-

[6] Используя результаты из [19], универсальную измеримость функции f_*^μ можно доказать для любой ограниченной борелевской функции f.

жения 1 получаем следующий результат (вытекающий также из [13, утверждение А теоремы 2] с учетом μ-компактности множества $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$).

Предложение 3. *Если f – полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее μ-выпуклая надстройка f_*^μ – это наибольшее полунепрерывное снизу выпуклое продолжение функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ точная нижняя грань в определении величины $f_*^\mu(\rho)$ в (10) достигается на некоторой мере из $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}$.*

Существенность свойства μ-компактности в доказательстве последнего предложения показывают примеры из [15].

В силу [13, теорема 1] устойчивость множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ гарантирует[7] открытость отображения $\mathcal{P}(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \bar{\rho}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Поэтому из [13, утверждение B теоремы 2] получаем следующий результат.

Предложение 4. *Если f – полунепрерывная сверху ограниченная сверху функция на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее σ-выпуклая надстройка и μ-выпуклая надстройка совпадают, функция $f_*^\sigma = f_*^\mu$ полунепрерывна сверху на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и является наибольшим ограниченным сверху выпуклым продолжением функции f на это множество.*

Предложения 3, 4 имеют очевидное следствие.

Следствие 2. *Если f – непрерывная ограниченная функция на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то ее σ-выпуклая и μ-выпуклая надстройки совпадают и функция $f_*^\sigma = f_*^\mu$ непрерывна на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

Это следствие показывает, в частности, существование непрерывного выпуклого продолжения на все множество квантовых состояний любой непрерывной ограниченной функции на множестве чистых состояний.

2.4. О выпуклых оболочках вогнутых функций. В случае $\dim\mathcal{H} < +\infty$ нетрудно показать, что выпуклая оболочка любой вогнутой функции f, определенной на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, совпадает с выпуклой надстройкой сужения $f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})}$ этой функции на множество $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, причем в силу свойства устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ из непрерывности функции f следует непрерывность функции $\operatorname{co} f = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})_*$.

Аналог этого утверждения для случая $\dim\mathcal{H} = +\infty$ установлен в следующем предложении.

Предложение 5. *Если f – вогнутая ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то $\sigma\text{-}\operatorname{co} f = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})_*^\sigma$. Если, дополнительно, функция f полунепрерывна снизу, то $\mu\text{-}\operatorname{co} f = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})_*^\mu$ и эта функция полунепрерывна снизу.*

Если f – вогнутая полунепрерывная сверху (соответственно, непрерывная ограниченная снизу) функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то

$$\operatorname{co} f = \sigma\text{-}\operatorname{co} f = \mu\text{-}\operatorname{co} f = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})_*^\sigma = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})_*^\mu$$

и эта функция полунепрерывна сверху (соответственно, непрерывна).

[7] В силу обобщенной теоремы Вестерстрема–О'Брайена, доказанной в [15], открытость данного отображения равносильна устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Доказательство. Совпадение функций σ-co f и $(f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_{*}$ (соответственно, функций μ-co f и $(f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\mu}_{*}$) можно показать, доказав неравенство σ-co $f \geqslant (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_{*}$ (соответственно, неравенство μ-co $f \geqslant (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\mu}_{*}$).

Первое неравенство для вогнутой ограниченной снизу функции f непосредственно следует из дискретного неравенства Йенсена (предложение A-1 в приложении).

Пусть f – ограниченная снизу полунепрерывная снизу вогнутая функция и ρ_0 – произвольное состояние. В силу леммы 1 существует такая последовательность $\{\rho_n\}$, сходящаяся к состоянию ρ_0, что $\lim_{n\to+\infty}\sigma\text{-co}\, f(\rho_n) = \mu\text{-co}\, f(\rho_0)$. В силу доказанной части предложения имеем

$$\sigma\text{-co}\, f(\rho_n) = (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_{*}(\rho_n) \geqslant (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\mu}_{*}(\rho_n) \qquad \forall\, n.$$

Переходя к пределу $n \to +\infty$ в этом неравенстве и учитывая предложение 3, получаем неравенство μ-co $f(\rho_0) \geqslant (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\mu}_{*}(\rho_0)$.

Пусть f – полунепрерывная сверху вогнутая функция. Если эта функция не равна тождественно $-\infty$ или $+\infty$, то в силу леммы 2 она ограничена сверху. Из предложений 2, 4 следует, что $\mathrm{co}\, f = \sigma\text{-co}\, f = \mu\text{-co}\, f$ и $(f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_{*} = (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\mu}_{*}$ соответственно, а также полунепрерывность сверху этих функций. Учитывая, что $\mathrm{co}\, f \geqslant (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_{*}$ в силу предложения A-2 из приложения и μ-co $f \leqslant (f|_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_{*}$ в силу определений, получаем основное утверждение второй части предложения.

Утверждение для случая непрерывной ограниченной снизу функции f следует из доказанного выше.

2.5. Об одном свойстве выпуклого замыкания. Известно[8], что для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу функций на выпуклом компактном множестве $\mathcal{A}$, поточечно сходящейся к функции f_0, соответствующая последовательность $\{\overline{\mathrm{co}} f_n\}$ поточечно сходится к функции $\overline{\mathrm{co}} f_0$. Свойство μ-компактности некомпактного множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ позволяет доказать выполнение для этого множества аналогичного утверждения.

Предложение 6. *Для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любой сходящейся последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет место неравенство*

$$\liminf_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}} f_n(\rho_n) \geqslant \overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0),$$

где $f_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n$ и $\rho_0 = \lim_{n\to+\infty}\rho_n$. В частности,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}} f_n(\rho) = \overline{\mathrm{co}} f_0(\rho) \qquad \forall\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Заметим, что свойство μ-компактности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *равносильно* выполнимости последнего утверждения предложения 6 (см. [23]).

[8] Для случая непрерывной функции f_0 это утверждение следует из леммы Дини. Существенность условия компактности показывает сходящаяся к функции $f_0(x) \equiv 1$ последовательность функций $f_n(x) = \exp(-x^2/n)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $\overline{\mathrm{co}} f_n(x) \equiv 0$ для всех n.

Доказательство. Для любой борелевской функции g на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любой меры $\mu \in \mathcal{P}$ будем использовать следующее обозначение:

$$\mu(g) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} g(\sigma)\mu(d\sigma).$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{f_n\}$ состоит из неотрицательных функций. Предположим, что существует такая последовательность $\{\rho_n\}$, сходящаяся к состоянию ρ_0, что

$$\overline{\mathrm{co}} f_n(\rho_n) + \Delta \leqslant \overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0), \qquad \Delta > 0, \qquad \forall\, n.$$

Будем считать, что $\overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0) < +\infty$, случай $\overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0) = +\infty$ рассматривается аналогично.

В силу представления (4) существует такая непрерывная аффинная функция α на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, что

$$\alpha(\rho) \leqslant f_0(\rho) \quad \forall\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \qquad \overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0) \leqslant \alpha(\rho_0) + \frac{1}{4}\Delta. \tag{11}$$

Пусть N – такое число, что $|\alpha(\rho_n) - \alpha(\rho_0)| < \frac{1}{4}\Delta$ для всех $n \geqslant N$.

В силу предложения 1 для каждого n существует мера $\mu_n \in \mathcal{P}_{\{\rho_n\}}$ такая, что $\overline{\mathrm{co}} f_n(\rho_n) = \mu_n(f_n)$. Поскольку функция α аффинна, имеем

$$\begin{aligned}\mu_n(\alpha) - \mu_n(f_n) &= \alpha(\rho_n) - \overline{\mathrm{co}} f_n(\rho_n) \\ &= [\alpha(\rho_n) - \alpha(\rho_0)] + [\alpha(\rho_0) - \overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0)] + [\overline{\mathrm{co}} f_0(\rho_0) - \overline{\mathrm{co}} f_n(\rho_n)] \\ &\geqslant -\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \Delta = \frac{1}{2}\Delta \qquad \forall\, n \geqslant N.\end{aligned} \tag{12}$$

μ-компактность множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ гарантирует относительную компактность последовательности $\{\mu_n\}$. В силу теоремы Прохорова (см. [24, § 6]) эта последовательность является *плотной*, что означает существование для каждого $\varepsilon > 0$ такого компактного подмножества $\mathcal{K}_\varepsilon \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, что $\mu_n(\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех n.

Пусть $M = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} |\alpha(\rho)|$ и $\varepsilon_0 = \frac{\Delta}{4M}$. В силу (12) для всех $n \geqslant N$ имеем

$$\int_{\mathcal{K}_{\varepsilon_0}} (\alpha(\rho) - f_n(\rho))\mu_n(d\rho) \geqslant \frac{1}{2}\Delta - \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{K}_{\varepsilon_0}} (\alpha(\rho) - f_n(\rho))\mu_n(d\rho) \geqslant \frac{1}{4}\Delta.$$

Следовательно, множество $\mathcal{C}_n = \{\rho \in \mathcal{K}_{\varepsilon_0} \mid \alpha(\rho) \geqslant f_n(\rho) + \frac{1}{4}\Delta\}$ непусто для всех $n \geqslant N$.

Поскольку последовательность $\{f_n\}$ является возрастающей, последовательность $\{\mathcal{C}_n\}$ *замкнутых* подмножеств *компакта* $\mathcal{K}_{\varepsilon_0}$ монотонна: $\mathcal{C}_{n+1} \subseteq \mathcal{C}_n \ \forall\, n$. Следовательно, существует $\rho_* \in \bigcap_n \mathcal{C}_n$. Это означает, что $\alpha(\rho_*) \geqslant f_n(\rho_*) + \frac{1}{4}\Delta$ для всех n, а значит, $\alpha(\rho_*) > f_0(\rho_*)$, что противоречит (11).

Следствие 3. *Для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на множестве* $\operatorname{extr} \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *и любой сходящейся последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет место неравенство*

$$\liminf_{n \to +\infty} (f_n)_*^\mu(\rho_n) \geqslant (f_0)_*^\mu(\rho_0),$$

где $f_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n$ *и* $\rho_0 = \lim_{n\to+\infty} \rho_n$. *В частности,*

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n)^{\mu}_{*}(\rho) = (f_0)^{\mu}_{*}(\rho) \quad \forall\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Доказательство. В силу [13, теоремы 1, 2] для каждой полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции f на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ функция

$$f^*(\rho) \doteq \sup_{\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \int_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\mu(d\sigma) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i), \qquad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}),$$

является полунепрерывным снизу ограниченным снизу вогнутым продолжением функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Нетрудно показать, что для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, поточечно сходящейся к функции f_0, соответствующая возрастающая последовательность $\{f_n^*\}$ поточечно сходится к функции f_0^* на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Поэтому утверждение следствия можно вывести из предложения 6, используя предложения 1, 5.

Замечание 1. В утверждении следствия 3 μ-выпуклую надстройку нельзя заменить на σ-выпуклую надстройку. Действительно, пусть f – индикаторная функция множества $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_s$ и ω_0 – несцепленное состояние, рассмотренное в примере 2. В [5, доказательство леммы 1] показано, что эта функция f является пределом возрастающей последовательности $\{f_n\}$ непрерывных ограниченных функций на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$. Поскольку в силу следствия 2 имеем $(f_n)^{\sigma}_{*} = (f_n)^{\mu}_{*}$ для всех n, из следствия 3 и свойства состояния ω_0 следует, что $\lim_{n\to+\infty}(f_n)^{\sigma}_{*}(\omega_0) = (f_0)^{\mu}_{*}(\omega_0) = 0$ и $(f_0)^{\sigma}_{*}(\omega_0) = 1$.

Замечание 2. Из теоремы о монотонной сходимости следуют утверждения, двойственные вторым утверждениям предложения 6 и следствия 3:

1) *для любой убывающей последовательности* $\{f_n\}$ *борелевских ограниченных сверху функций на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\text{-}\mathrm{co}\, f_n(\rho) = \mu\text{-}\mathrm{co}\, f_0(\rho) \quad \forall\, \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \qquad \textit{где} \quad f_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n;$$

2) *для любой убывающей последовательности* $\{f_n\}$ *борелевских ограниченных сверху функций на множестве* $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n)^{\mu}_{*}(\rho) = (f_0)^{\mu}_{*}(\rho) \quad \forall\, \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \qquad \textit{где} \quad f_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Используя следствие 1, предложение 6, утверждение 1) из замечания 2 и лемму Дини, нетрудно доказать следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть* $\{f_t\}_{t\in\mathrm{T}\subseteq\mathbb{R}}$ – *семейство непрерывных ограниченных функций на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *такое, что*:

1) $f_{t_1}(\rho) \leqslant f_{t_2}(\rho)$ *для всех* $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *и всех* $t_1, t_2 \in \mathrm{T}$ *таких, что* $t_1 < t_2$;

2) *функция* $\mathrm{T}\ni t \mapsto f_t(\rho)$ *непрерывна для всех* $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Тогда функция $\mathfrak{S}(\mathcal{H})\times\mathrm{T}\ni(\rho,t)\mapsto \mathrm{co}\, f_t(\rho)$ *непрерывна.*

Используя следствие 2, следствие 3, утверждение 2) из замечания 2 и лемму Дини, можно доказать аналогичное утверждение для μ-выпуклой надстройки семейства непрерывных ограниченных функций на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

§ 3. Основная теорема

Пусть α – полунепрерывная снизу аффинная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$ (не равная тождественно $+\infty$). Рассмотрим семейство замкнутых подмножеств

$$\mathcal{A}_c = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid \alpha(\rho) \leqslant c\}, \qquad c \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. В следующей теореме представлены свойства сужений выпуклых оболочек на подмножества этого семейства.

Теорема 1. *Пусть f – борелевская ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и α – рассмотренная выше аффинная функция. Если функция f имеет полунепрерывное сверху ограниченное сужение на множество $\mathcal{A}_c$ при каждом $c \geqslant 0$ и*

$$\limsup_{c\to+\infty} c^{-1} \sup_{\rho\in\mathcal{A}_c} f(\rho) < +\infty, \tag{14}$$

то

$$\operatorname{co} f(\rho) = \sigma\text{-}\operatorname{co} f(\rho) = \mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho)$$

для всех $\rho \in \bigcup_{c>0} \mathcal{A}_c$ и общее сужение этих функций на множество $\mathcal{A}_c$ полунепрерывно сверху при каждом $c \geqslant 0$.

Если, дополнительно, функция f полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то

$$\operatorname{co} f(\rho) = \sigma\text{-}\operatorname{co} f(\rho) = \mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho) = \overline{\operatorname{co}} f(\rho)$$

для всех $\rho \in \bigcup_{c>0} \mathcal{A}_c$ и общее сужение этих функций на множество $\mathcal{A}_c$ непрерывно при каждом $c \geqslant 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что f – неотрицательная функция.

Пусть ρ_0 – такое состояние, что $\alpha(\rho_0) = c_0 < +\infty$. По условию $\mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho_0) \leqslant f(\rho_0) < +\infty$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ пусть μ_0 – такая мера из $\mathcal{P}_{\{\rho_0\}}$, что

$$\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu_0(d\rho) < \mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho_0) + \varepsilon.$$

Условие (14) гарантирует существование таких положительных чисел c_* и M, что $f(\rho) \leqslant M\alpha(\rho)$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{A}_{c_*}$.

Заметим, что $\lim_{c\to+\infty} \mu_0(\mathcal{A}_c) = 1$. Действительно, из неравенства

$$c\mu_0(\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{A}_c) \leqslant \int_{\mathcal{A}_c} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho) + \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_c} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho) = \alpha(\rho_0) = c_0,$$

полученного с использованием приведенного далее следствия A-1 в приложении, следует, что

$$\mu_0(\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{A}_c) \leqslant \frac{c_0}{c}.$$

Поэтому из теоремы о монотонной сходимости следует, что

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_c} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho) = \lim_{c\to+\infty}\biggl(\alpha(\rho_0) - \int_{\mathcal{A}_c} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho)\biggr) = 0.$$

Пусть $c^* > c_*$ выбрано так, что $\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_{c^*}} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho) < \varepsilon$. В силу приведенной ниже леммы 3 существует такая последовательность $\{\mu_n\}$ мер из $\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\rho_0\}}$, слабо сходящаяся к мере μ_0, что $\mu_n(\mathcal{A}_{c^*}) = \mu_0(\mathcal{A}_{c^*})$ и $\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_{c^*}} \alpha(\rho)\mu_n(d\rho) < \varepsilon$ для всех n. Поскольку функция f полунепрерывна сверху и ограничена на множестве $\mathcal{A}_{c^*}$, имеем (см. [24, § 2])

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathcal{A}_{c^*}} f(\rho)\mu_n(d\rho) \leqslant \int_{\mathcal{A}_{c^*}} f(\rho)\mu_0(d\rho).$$

Поэтому, замечая, что

$$\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_{c^*}} f(\rho)\mu_n(d\rho) \leqslant M \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_{c^*}} \alpha(\rho)\mu_n(d\rho) < M\varepsilon, \qquad n = 0,1,2,\dots,$$

получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{co} f(\rho_0) &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu_n(d\rho) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathcal{A}_{c^*}} f(\rho)\mu_n(d\rho) + M\varepsilon \\ &\leqslant \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu_0(d\rho) + M\varepsilon \leqslant \mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho_0) + \varepsilon(M+1).\end{aligned}$$

Поскольку ε произвольно, это показывает, что $\operatorname{co} f(\rho_0) = \mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho_0)$.

Применение приведенной ниже леммы 4 завершает доказательство первого утверждения теоремы.

В силу предложения 1 второе утверждение теоремы следует из первого.

Лемма 3. *Пусть α – полунепрерывная снизу аффинная функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$ и μ_0 – мера из $\mathcal{P}$ такая, что $\alpha(\bar{\rho}(\mu_0)) < +\infty$. Для любого $c>0$ существует такая последовательность $\{\mu_n\}$ мер из $\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\bar{\rho}(\mu_0)\}}$, сходящаяся к мере μ_0, что*

$$\mu_n(\mathcal{A}_c) = \mu_0(\mathcal{A}_c), \qquad \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_c} \alpha(\rho)\mu_n(d\rho) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_c} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho)$$

для всех n, где $\mathcal{A}_c$ – подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, определенное в (13).

Доказательство. Докажем лемму, используя простую модификацию доказательства леммы 1 в [4], состоящую в нахождении по заданному n такого набора $\{\mathcal{A}_i^n\}_{i=1}^{m+2}$ из $m+2$ $(m=m(n))$ непересекающихся борелевских подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, что $\bigcup_{i=1}^{m+2} \mathcal{A}_i^n = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, при этом:

1) множество $\mathcal{A}_i^n$ имеет диаметр, не превосходящий $1/n$, при $i=\overline{1,m}$;

2) $\mu_0(\mathcal{A}_{m+1}^n) < 1/n$ и $\mu_0(\mathcal{A}_{m+2}^n) < 1/n$;

3) множество $\mathcal{A}_i^n$ содержится либо в $\mathcal{A}_c$, либо в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_c$ при $i=\overline{1,m+2}$.

Существенную часть в этой конструкции составляют импликация

$$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \ \Rightarrow\ (\mu_0(\mathcal{A}))^{-1}\int_{\mathcal{A}} \rho\mu_0(d\rho) \in \mathcal{B}, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{A}_c, \quad \mathfrak{S}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{A}_c,$$

и равенство

$$\int_{\mathcal{A}} \alpha(\rho)\mu_0(d\rho) = \mu_0(\mathcal{A})\,\alpha\biggl(\frac{1}{\mu_0(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}} \rho\mu_0(d\rho)\biggr), \qquad \mathcal{A}\subseteq\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \quad \mu_0(\mathcal{A})\neq 0,$$

которые легко доказываются с помощью приведенного далее следствия A-1 в приложении. Лемма доказана.

Устойчивость множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ используется в доказательстве теоремы 1 посредством следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть α – полунепрерывная снизу аффинная функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$ и f – функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, имеющая полунепрерывное сверху сужение на множество $\mathcal{A}_c$, определенное в (13), при каждом $c \geqslant 0$. Тогда функция $\operatorname{co} f$ имеет полунепрерывное сверху сужение на множество $\mathcal{A}_c$ при каждом $c \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $\rho_0 \in \mathcal{A}_{c_0}$ и $\{\rho_n\} \subset \mathcal{A}_{c_0}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к состоянию ρ_0. Предположим, что существует

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{co} f(\rho_n) > \operatorname{co} f(\rho_0). \tag{15}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ пусть $\{\pi_i^0, \rho_i^0\}_{i=1}^m$ – такой ансамбль из $\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\rho_0\}}$, что $\sum_{i=1}^m \pi_i^0 f(\rho_i^0) < \operatorname{co} f(\rho_0) + \varepsilon$. В силу устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (см. [5]) существует такая последовательность $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}_{i=1}^m\}_n$ ансамблей, что $\sum_{i=1}^m \pi_i^n \rho_i^n = \rho_n$ при каждом n, $\lim_{n\to+\infty} \pi_i^n = \pi_i^0$ и $\lim_{n\to+\infty} \rho_i^n = \rho_i^0$ при $i = \overline{1,m}$. Пусть $\pi_* = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \pi_i^0$. Существует такое N, что $\pi_i^n \geqslant \pi_*/2$ для всех $n \geqslant N$ и $i = \overline{1,m}$. Из неравенства $\sum_{i=1}^m \pi_i^n \alpha(\rho_i^n) = \alpha(\rho_n) \leqslant c_0$ следует, что $\rho_i^n \in \mathcal{A}_{2c_0/\pi_*}$ для всех $n \geqslant N$ и $i = \overline{1,m}$. В силу полунепрерывности сверху функции f на множестве $\mathcal{A}_{2c_0/\pi_*}$ имеем

$$\limsup_{n\to+\infty} \operatorname{co} f(\rho_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^m \pi_i^n f(\rho_i^n) \leqslant \sum_{i=1}^m \pi_i^0 f(\rho_i^0) < \operatorname{co} f(\rho_0) + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε противоречит (15).

Замечание 3. Если f – вогнутая функция, то условие (14) следует из ограниченности сужения этой функции на множество $\mathcal{A}_c$ при каждом c. Действительно, для любой неотрицательной полунепрерывной снизу аффинной функции α из вогнутости функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ легко выводится вогнутость функции $c \mapsto \sup_{\rho\in\mathcal{A}_c} f(\rho)$ на множестве $\mathbb{R}_+$, следовательно, конечность этой функции гарантирует выполнение условия (14).

С учетом замечания 3 из теоремы 1 и предложения 5 получаем следующий результат.

Следствие 5. *Пусть f – вогнутая полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и α – полунепрерывная снизу аффинная функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$. Если функция f имеет непрерывное ограниченное сужение на множество $\mathcal{A}_c$, определенное в (13), при каждом $c \geqslant 0$, то*

$$\operatorname{co} f(\rho) = \sigma\text{-}\operatorname{co} f(\rho) = \mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho) = \overline{\operatorname{co}} f(\rho) = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\sigma}_*(\rho) = (f|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})})^{\mu}_*(\rho)$$

для всех $\rho \in \bigcup_{c>0} \mathcal{A}_c$ и общее сужение этих функций на множество $\mathcal{A}_c$ непрерывно при каждом $c \geqslant 0$.

Используя теорему 1, можно получить следующие достаточные условия совпадения и непрерывности выпуклых оболочек.

Следствие 6. *Пусть f – борелевская ограниченная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и ρ_0 – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Если существует такая аффинная полунепрерывная снизу функция α на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$, что $\alpha(\rho_0)<+\infty$, функция f имеет полунепрерывное сверху ограниченное сужение на множество $\mathcal{A}_c$, определенное в (13), при каждом $c\geqslant 0$ и выполнено условие (14), то*

$$\operatorname{co} f(\rho_0)=\sigma\text{-}\operatorname{co} f(\rho_0)=\mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho_0).$$

Следствие 7. *Пусть f – полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\{\rho_n\}$ – произвольная последовательность состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящаяся к состоянию ρ_0. Если существует такая аффинная полунепрерывная снизу функция α на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$, что $\sup_n \alpha(\rho_n)<+\infty$, функция f имеет непрерывное ограниченное сужение на множество $\mathcal{A}_c$, определенное в (13), при каждом $c\geqslant 0$ и выполнено условие (14), то*

$$\operatorname{co} f(\rho_n)=\sigma\text{-}\operatorname{co} f(\rho_n)=\mu\text{-}\operatorname{co} f(\rho_n)=\overline{\operatorname{co}} f(\rho_n), \qquad n=0,1,2,\dots, \tag{16}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{co} f(\rho_n)=\operatorname{co} f(\rho_0). \tag{17}$$

Замечание 4. Если f – вогнутая функция, то в силу замечания 3 условие (14) в следствиях 6 и 7 можно убрать.

Пример 4. Важную роль при исследовании информационных свойств квантового канала играют выходная энтропия фон Неймана и выходная энтропия Реньи этого канала и их выпуклые замыкания [25].

Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H})\mapsto \mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ – произвольный квантовый канал, т. е. линейное вполне положительное сохраняющее след отображение из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ (см. [9, § 3.1]), и $\mathfrak{S}(\mathcal{H})\ni\rho\mapsto (R_p\circ\Phi)(\rho)=\frac{\log\operatorname{Tr}\Phi(\rho)^p}{1-p}$ – выходная энтропия Реньи этого канала порядка $p\in(0,+\infty]$ (случай $p=1$ соответствует выходной энтропии фон Неймана $-\operatorname{Tr}\Phi(\rho)\log\Phi(\rho)$, случай $p=+\infty$ соответствует функции $-\log\lambda_{\max}(\Phi(\rho))$, где $\lambda_{\max}(\Phi(\rho))$ – максимальное собственное значение состояния $\Phi(\rho)$). При $p\in(0,1]$ функция $R_p\circ\Phi$ полунепрерывна снизу, вогнута и принимает значения в $[0,+\infty]$, а при $p\in(1,+\infty]$ она непрерывна и принимает значения в $[0,+\infty)$, но не является вогнутой. Выходная энтропия фон Неймана $H\circ\Phi=R_1\circ\Phi$ является точной верхней гранью (поточечным пределом при $p\to1+0$) монотонного семейства непрерывных функций $\{R_p\circ\Phi\}_{p>1}$. В силу предложения 6 выпуклое замыкание $\overline{\operatorname{co}}(H\circ\Phi)$ выходной энтропии фон Неймана является точной верхней гранью (поточечным пределом при $p\to1+0$) монотонного семейства функций $\{\overline{\operatorname{co}}(R_p\circ\Phi)\}_{p>1}$.

Следствие 6 позволяет доказать, что

$$\begin{gathered}\operatorname{co}(R_p\circ\Phi)(\rho_0)=\sigma\text{-}\operatorname{co}(R_p\circ\Phi)(\rho_0)=\mu\text{-}\operatorname{co}(R_p\circ\Phi)(\rho_0)=\overline{\operatorname{co}}(R_p\circ\Phi)(\rho_0)\\ \forall\, p\in[1,+\infty]\end{gathered} \tag{18}$$

для любого состояния ρ_0 такого, что $(H\circ\Phi)(\rho_0)<+\infty$. Действительно, из условия $H(\Phi(\rho_0))<+\infty$ следует существование такого $\mathfrak{H}$-оператора H' в пространстве $\mathcal{H}'$, что

$$\mathrm{g}(H')=\inf\{\lambda>0 \mid \operatorname{Tr}\exp(-\lambda H')<+\infty\}<+\infty$$

и $\operatorname{Tr} H'\Phi(\rho_0) < +\infty$. В силу [26, предложение 1] условия следствия 6 выполнены для функции $f(\rho) = (R_p \circ \Phi)(\rho) \leqslant (H \circ \Phi)(\rho)$ при $p \in [1, +\infty]$, если $\alpha(\rho) = \operatorname{Tr} H'\Phi(\rho)$. Заметим, что (18) может не иметь места, если $(H \circ \Phi)(\rho_0) = +\infty$ (см. [25, предложение 7]).

В силу следствия 1 и установленного выше совпадения выпуклых оболочек и непрерывности энтропии Реньи при $p > 1$ следует непрерывность функции $\mathrm{co}(R_p \circ \Phi)$ на выпуклом подмножестве $\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid (H \circ \Phi)(\rho) < +\infty\}$ при $p > 1$.

Если выходная энтропия фон Неймана $H \circ \Phi$ непрерывна на некотором подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то в силу [25, теорема 1] ее выпуклое замыкание $\overline{\mathrm{co}}(H \circ \Phi)$ также непрерывно на этом множестве и совпадает на нем с выпуклой оболочкой $\mathrm{co}(H \circ \Phi)$. Если множество $\mathcal{A}$ компактно, то из установленной выше непрерывности функции $\mathrm{co}(R_p \circ \Phi)$ и леммы Дини следует равномерная сходимость непрерывных функций $\mathrm{co}(R_p \circ \Phi)|_{\mathcal{A}} = \overline{\mathrm{co}}(R_p \circ \Phi)|_{\mathcal{A}}$ к непрерывной функции $\mathrm{co}(H \circ \Phi)|_{\mathcal{A}} = \overline{\mathrm{co}}(H \circ \Phi)|_{\mathcal{A}}$ при $p \to 1 + 0$. Это показывает, в частности, что для χ-пропускной способности[9] $\mathcal{A}$-ограниченного канала Φ (см. [4]) имеет место выражение

$$\overline{C}(\Phi, \mathcal{A}) = \lim_{p \to 1+0} \sup_{\rho \in \mathcal{A}} \bigl((R_p \circ \Phi)(\rho) - \mathrm{co}(R_p \circ \Phi)(\rho)\bigr).$$

Это выражение может быть использовано для аппроксимации χ-пропускной способности (поскольку энтропию Реньи при $p > 1$ часто удобнее вычислять, чем энтропию фон Неймана), а также при исследовании вопроса о непрерывности χ-пропускной способности как функции канала (поскольку энтропия Реньи непрерывна при $p > 1$).

§ 4. Монотонные характеристики сцепленности

4.1. Основные свойства. Сцепленность – специфическое свойство квантовых систем, которое можно рассматривать как особый вид корреляции, не имеющей классического аналога. Именно это свойство лежит в основе построения различных квантовых алгоритмов и криптографических протоколов (см. [6, гл. 3]). Одна из основных задач теории сцепленности состоит в построении количественных характеристик сцепленности состояния составной квантовой системы и исследовании их свойств (см. [3], [27] и библиографию в этих работах). Важный класс таких характеристик образуют так называемые монотонные характеристики сцепленности (entanglement monotones) [2]. В настоящем параграфе рассмотрено бесконечномерное обобщение метода выпуклой надстройки построения монотонных характеристик сцепленности и изучаются его свойства. Это обобщение основано на результатах, полученных в предыдущих параграфах.

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Состояние ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ называется *разделимым*, или *несцепленным*, если оно принадлежит выпуклому замыканию множества всех чистых состояний-произведений из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, в противном случае оно называется *сцепленным*.

---

[9]Эта величина, называемая в зарубежной литературе *the Holevo capacity*, тесно связана с пропускной способностью для передачи классической информации по квантовому каналу связи (см., например, [6, гл. 5]).

Ключевым в теории сцепленности является понятие LOCC-*операции*, т.е. такой операции, которая сводится к последовательности локальных операций (Local Operation) над каждой из подсистем и обмену классической информацией между этими подсистемами (Classical Communication) [3], [27]. Результатом действия *селективной* LOCC-операции на любое состояние составной системы является *ансамбль* – набор состояний этой системы с соответствующим распределением вероятностей (в общем случае – вероятностная мера на множестве состояний составной системы). Типичный пример селективной LOCC-операции – квантовое измерение над одной из подсистем составной системы, которое каждому априорному состоянию ставит в соответствие набор апостериорных состояний, отвечающих исходам измерения, и распределение вероятностей этих исходов [9, гл. 2]. Усреднение выходного ансамбля селективной LOCC-операции дает соответствующую *неселективную* LOCC-операцию, результатом действия которой на любое состояние составной системы является некоторое *состояние* этой системы. В приведенном выше примере это усреднение соответствует квантовому измерению, при котором результат измерения игнорируется (а измеряемое состояние при этом может изменяться).

Монотонная характеристика сцепленности (МХС) – это любая неотрицательная функция E на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, обладающая двумя следующими свойствами (см. [2], [3]).

EM-1) $\{E(\omega)=0\}\Leftrightarrow\{\omega$ – *несцепленное состояние*$\}$.

EM-2a) *Монотонность функции E относительно неселективных* LOCC-*операций*. Это означает, что

$$E(\omega)\geqslant E\biggl(\sum_i \pi_i\omega_i\biggr) \tag{19}$$

для любого состояния $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ и любой LOCC-операции, результатом действия которой на состояние ω является конечный или счетный ансамбль $\{\pi_i,\omega_i\}$.

К этому требованию часто добавляется следующее.

EM-2b) *Монотонность функции E относительно селективных* LOCC-*операций*. Это означает, что

$$E(\omega)\geqslant \sum_i \pi_i E(\omega_i) \tag{20}$$

для состояния $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ и любой LOCC-операции, результатом действия которой на состояние ω является конечный или счетный ансамбль $\{\pi_i,\omega_i\}$.

В бесконечномерном случае естественным обобщением предыдущего требования является следующее.

EM-2c) *Монотонность функции E относительно обобщенной селективной* LOCC-*операции*. Это означает, что для любого состояния $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ и любого локального инструмента[10] $\mathfrak{M}$ с множеством значений $\mathcal{X}$ функция $x\mapsto$

[10] *Инструментом* в пространстве состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в измеримом множестве $\mathcal{X}$ называется функция множеств $\mathfrak{M}$, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ и удовлетворяющая условиям (см.[9, гл. 4]): $\mathfrak{M}(B)$ – линейное вполне положительное не увеличивающее след преобразование пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ для любого $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{X})$; $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ – сохраняющее след преобразование; если $\{B_j\}\subset\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ – конечное или счетное разбиение множества $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ на попарно непересекающиеся подмножества, то $\mathfrak{M}(B)[T]=\sum_j\mathfrak{M}(B_j)[T]$, $T\in\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, где ряд сходится по норме пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

$E(\sigma(x|\,\omega))$ является μ_ω-измеримой на множестве $\mathcal{X}$ и

$$E(\omega) \geqslant \int_{\mathcal{X}} E(\sigma(x|\,\omega))\mu_\omega(dx), \tag{21}$$

где $\mu_\omega(\cdot) = \mathrm{Tr}\,\mathfrak{M}(\cdot)(\omega)$ и $\{\sigma(x|\,\omega)\}_{x\in\mathcal{X}}$ – соответственно вероятностная мера на множестве $\mathcal{X}$, описывающая результат измерения, и семейство апостериорных состояний, соответствующие априорному состоянию ω [9], [28].

Замечание 5. По определению функция $x \mapsto \sigma(x|\,\omega)$ является μ_ω-измеримой по отношению к минимальной σ-алгебре на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, для которой все линейные функционалы $\omega \mapsto \mathrm{Tr}\,A\omega$, $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, являются измеримыми. В силу [29, следствие 1] эта σ-алгебра совпадает с борелевской σ-алгеброй на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Поэтому функция $x \mapsto \sigma(x|\,\omega)$ является μ_ω-измеримой по отношению к борелевской σ-алгебре на $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, следовательно, функция $x \mapsto E(\sigma(x|\,\omega))$ μ_ω-измерима при любой борелевской функции $\omega \mapsto E(\omega)$.

Монотонная характеристика сцепленности E называется *мерой сцепленности*, если $E(\omega) = H(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega)$ для любого чистого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, где H – энтропия фон Неймана [3].

Иногда в определение МХС включается дополнительное требование выпуклости (см. [27]).

ЕМ-3a) *Выпуклость функции E на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Это означает, что

$$E\biggl(\sum_i \pi_i\omega_i\biggr) \leqslant \sum_i \pi_i E(\omega_i)$$

для любого конечного ансамбля $\{\pi_i, \omega_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

Данное требование обусловлено тем, что сцепленность не может возрастать при операции выпуклого смешивания (которая описывает классический шум процедуры приготовления квантового состояния).

Две следующие более сильные формы требования выпуклости мотивированы необходимостью рассматривать счетные и непрерывные ансамбли состояний при исследовании бесконечномерных квантовых систем (см. [4]).

ЕМ-3b) *σ-выпуклость функции E на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Это означает, что

$$E\biggl(\sum_i \pi_i\omega_i\biggr) \leqslant \sum_i \pi_i E(\omega_i)$$

для любого счетного ансамбля $\{\pi_i, \omega_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

Если последнее требование выполнено, то ЕМ-2b) $\Rightarrow$ ЕМ-2a).

ЕМ-3c) *μ-выпуклость функции E на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Это означает, что функция E универсально измерима и

$$E\biggl(\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})} \omega\mu(d\omega)\biggr) \leqslant \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})} E(\omega)\mu(d\omega)$$

для любой борелевской вероятностной меры μ на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, которую можно рассматривать как обобщенный (непрерывный) ансамбль состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

В § 2 показано, что эти свойства выпуклости в общем случае не равносильны.

EM-4) *Субаддитивность функции E.* Это означает, что

$$E(\omega_1 \otimes \omega_2) \leqslant E(\omega_1) + E(\omega_2) \tag{22}$$

для любых состояний $\omega_1 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ и $\omega_2 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$.

Данное свойство гарантирует существование регуляризации

$$E^*(\omega) = \lim_{n \to +\infty} \frac{E(\omega^{\otimes n})}{n}, \qquad \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}).$$

В конечномерном случае естественным является требование непрерывности МХС на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. В бесконечномерном случае это требование слишком ограничительно. Более того, из разрывности энтропии фон Неймана следует разрывность любой меры сцепленности на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ в этом случае. Поэтому необходимо рассматривать ослабленные модификации требования непрерывности.

EM-5a) *Полунепрерывность снизу функции E на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.* Это означает, что

$$\liminf_{n \to +\infty} E(\omega_n) \geqslant E(\omega_0)$$

для любой последовательности $\{\omega_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, сходящейся к состоянию ω_0, что равносильно замкнутости множества состояний, определяемого неравенством $E(\omega) \leqslant c$ при любом $c > 0$. Физически это требование обусловлено тем, что сцепленность не может возрастать при предельных переходах. Существенно, что из полунепрерывности снизу функции E следует ее измеримость и равносильность требований EM-3a)–EM-3c) для этой функции (в силу приведенного далее предложения A-2 в приложении).

С физической точки зрения естественным является следующее требование.

EM-5b) *Непрерывность E на подмножествах множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ с ограниченной средней энергией.* Пусть $H_{\mathcal{H}}$ и $H_{\mathcal{K}}$ – положительные операторы в пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно, которые являются гамильтонианами квантовых систем, ассоциированных с этими пространствами [9, § 1.2]. Тогда положительный оператор $H_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{K}} + I_{\mathcal{H}} \otimes H_{\mathcal{K}}$ является гамильтонианом составной системы, следовательно, множество состояний составной системы со средней энергией, не превосходящей h, определяется неравенством

$$\mathrm{Tr}(H_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{K}} + I_{\mathcal{H}} \otimes H_{\mathcal{K}})\omega \leqslant h.$$

Требование EM-5b) означает непрерывность сужения функции E на подмножества множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, определяемые этим неравенством при всех $h > 0$.

Наиболее сильным является следующее требование.

EM-5c) *Непрерывность функции E на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.*

Далее мы увидим, что и в бесконечномерном случае существует нетривиальные МХС, для которых выполнено это требование (см. ниже пример 5).

4.2. Обобщенный метод выпуклой надстройки. В конечномерном случае общепринятым методом построения МХС является метод выпуклой надстройки (the convex roof construction) [3], [27], [30]. В соответствии с этим методом для заданной вогнутой непрерывной неотрицательной функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такой, что

$$f^{-1}(0) = \operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \qquad f(\rho) = f(U\rho U^*) \tag{23}$$

для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любого унитарного оператора U в пространстве $\mathcal{H}$, соответствующая МХС E^f определяется как выпуклая надстройка $(f\circ\Theta|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})})_*$ сужения функции $f\circ\Theta$ на множество $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, где $\Theta\colon \omega\mapsto \operatorname{Tr}_{\mathcal{K}}\omega$ – частичный след. Данным методом строится одна из наиболее важных мер сцепленности – сцепленность формирования E_F (Entanglement of Formation, EoF) при использовании в качестве функции f энтропии фон Неймана [7].

В бесконечномерном случае существуют два возможных обобщения этой конструкции: σ-выпуклая надстройка $(f\circ\Theta|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})})_*^\sigma$ и μ-выпуклая надстройка $(f\circ\Theta|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})})_*^\mu$ функции $f\circ\Theta|_{\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})}$. Для упрощения записи везде далее будем опускать символ сужения и обозначать данные функции $(f\circ\Theta)_*^\sigma$ и $(f\circ\Theta)_*^\mu$ соответственно.

С помощью результатов, полученных в предыдущих параграфах, можно доказать следующие утверждения о свойствах этих функций.

Теорема 2. *Пусть f – неотрицательная вогнутая функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, удовлетворяющая условию (23).*

A-1) *Если функция f полунепрерывна сверху, то*

$$(f\circ\Theta)_*^\sigma = (f\circ\Theta)_*^\mu = \mu\text{-co}(f\circ\Theta) = \sigma\text{-co}(f\circ\Theta) = \operatorname{co}(f\circ\Theta),$$

функция $(f\circ\Theta)_*^\mu = (f\circ\Theta)_*^\sigma$ полунепрерывна сверху и удовлетворяет требованиям EM-1), EM-2c) *и* EM-3c).

A-2) *Если функция f полунепрерывна снизу, то функция $(f\circ\Theta)_*^\sigma$ удовлетворяет требованиям*[11] EM-2b) *и* EM-3b), *в то время как функция $(f\circ\Theta)_*^\mu$ совпадает с функцией $\overline{\operatorname{co}}(f\circ\Theta)$ и удовлетворяет требованиям* EM-1), EM-2c), EM-3c) *и* EM-5a).

B) *Если функция f субаддитивна*[12], *то функции $(f\circ\Theta)_*^\sigma$ и $(f\circ\Theta)_*^\mu$ удовлетворяют требованию* EM-4).

C) *Пусть $H_{\mathcal{H}}$ – положительный оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Если функция f полунепрерывна снизу и имеет непрерывное сужение на подмножество $\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}},h} = \{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr} H_{\mathcal{H}}\rho \leqslant h\}$ при каждом $h>0$, то*

$$(f\circ\Theta)_*^\mu(\omega) = (f\circ\Theta)_*^\sigma(\omega) = \overline{\operatorname{co}}(f\circ\Theta)(\omega) = \operatorname{co}(f\circ\Theta)(\omega) \qquad \forall\,\omega\in\bigcup_{h>0}\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}}\otimes I_{\mathcal{K}},h},$$

[11]Пример в приведенном ниже замечании 6 показывает, что функция $(f\circ\Theta)_*^\sigma$ может не удовлетворять требованиям EM-1), EM-3c) и EM-5a) даже при ограниченной полунепрерывной снизу функции f.

[12]Это означает, что $f(\rho_1\otimes\rho_2)\leqslant f(\rho_1)+f(\rho_2)$ для любых состояний $\rho_1\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ и $\rho_2\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$, где $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – сепарабельные гильбертовы пространства (здесь неявно используется изоморфность всех таких пространств).

где $\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}}\otimes I_{\mathcal{K}},h} = \{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \mid \mathrm{Tr}(H_{\mathcal{H}}\otimes I_{\mathcal{K}})\omega \leqslant h\}$, *и общее сужение этих функций на множество* $\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}}\otimes I_{\mathcal{K}},h}$ *непрерывно при каждом* $h > 0$. *В частности, если* $H_{\mathcal{H}}$ *– гамильтониан квантовой системы, ассоциированной с пространством* $\mathcal{H}$, *то функции* $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$ *и* $(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}$ *удовлетворяют требованию* EM-5b).

D) *Если функция* f *непрерывна на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, *то*

$$(f\circ\Theta)^{\mu}_{*} = (f\circ\Theta)^{\sigma}_{*} = \overline{\mathrm{co}}(f\circ\Theta) = \mu\text{-}\mathrm{co}(f\circ\Theta) = \sigma\text{-}\mathrm{co}(f\circ\Theta) = \mathrm{co}(f\circ\Theta)$$

и функция $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*} = (f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}$ *удовлетворяет требованию* EM-5c).

Доказательство. A) В силу леммы 2 из полунепрерывности сверху и вогнутости функции f следует ее ограниченность, а предложение 5 гарантирует

$$(f\circ\Theta)^{\mu}_{*} = (f\circ\Theta)^{\sigma}_{*} = \mu\text{-}\mathrm{co}(f\circ\Theta) = \sigma\text{-}\mathrm{co}(f\circ\Theta) = \mathrm{co}(f\circ\Theta)$$

и полунепрерывность сверху данной функции. Приведенное предложение A-2 в приложении обеспечивает выполнение требования EM-3c) для функции $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*} = (f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}$ в этом случае.

В силу предложения 3 полунепрерывность снизу функции f гарантирует полунепрерывность снизу функции $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$, т. е. выполнение требования EM-5a) для этой функции. Предложение A-2 в приложении обеспечивает выполнение требования EM-3c) для функции $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$ в этом случае.

Выполнение требования EM-3b) для функции $(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}$ следует из ее определения.

Повторяя рассуждения из доказательства LOCC-монотонности выпуклой надстройки функции $f\circ\Theta$ в конечномерном случае (см. [3], [7]) и используя дискретное неравенство Йенсена (см. предложение A-1 в приложении), можно показать выполнение требования EM-2b) для функции $(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}$.

Рассмотрим требование EM-2c). Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольный инструмент, действующий в подсистеме, ассоциированной с пространством $\mathcal{K}$. Если функция f полунепрерывна снизу (соответственно, сверху), то функция $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$ полунепрерывна снизу (соответственно, сверху) и, следовательно, является борелевской. В силу замечания 5 это гарантирует μ_{ω}-измеримость функции $x \mapsto E(\sigma(x|\,\omega))$ для любого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

Пусть ω – чистое состояние. Из локальности инструмента $\mathfrak{M}$ следует, что

$$\Theta(\omega) = \int_{\mathcal{X}} \Theta(\sigma(x|\,\omega))\mu_{\omega}(dx).$$

Поскольку f – неотрицательная вогнутая полунепрерывная снизу или полунепрерывная сверху функция, из предложения A-2 в приложении следует, что

$$f\circ\Theta(\omega) \geqslant \int_{\mathcal{X}} f\circ\Theta(\sigma(x|\,\omega))\mu_{\omega}(dx) \geqslant \int_{\mathcal{X}} (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}(\sigma(x|\,\omega))\mu_{\omega}(dx),$$

где последнее неравенство следует из предложения 5.

Пусть ω – произвольное состояние. Покажем сначала, что

$$(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}(\omega) \geqslant \int_{\mathcal{X}} (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}(\sigma(x|\,\omega))\mu_{\omega}(dx). \tag{24}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ пусть $\{\pi_i, \omega_i\}$ – ансамбль из $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}))$ такой, что

$$(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}(\omega) > \sum_i \pi_i f\circ\Theta(\omega_i) - \varepsilon.$$

Из приведенного выше рассуждения для случая чистого состояния следует, что

$$(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}(\omega) > \sum_i \pi_i \int_{\mathcal{X}} (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}(\sigma(x|\,\omega_i))\mu_{\omega_i}(dx) - \varepsilon. \tag{25}$$

В силу теоремы Радона–Никодима из разложения

$$\mu_\omega(\cdot) = \mathrm{Tr}\ \mathfrak{M}(\cdot)(\omega) = \sum_i \pi_i \,\mathrm{Tr}\ \mathfrak{M}(\cdot)(\omega_i) = \sum_i \pi_i \mu_{\omega_i}(\cdot)$$

следует существование такого семейства $\{p_i\}$ μ_ω-измеримых функций на $\mathcal{X}$, что

$$\pi_i \mu_{\omega_i}(\mathcal{X}_0) = \int_{\mathcal{X}_0} p_i(x)\mu_\omega(dx)$$

для любого μ_ω-измеримого подмножества $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$ и $\sum_i p_i(x) = 1$ для μ_ω-почти всех x из $\mathcal{X}$. Поскольку

$$\int_{\mathcal{X}_0} \sigma(x|\,\omega)\mu_\omega(dx) = \sum_i \pi_i \int_{\mathcal{X}_0} \sigma(x|\,\omega_i)\mu_{\omega_i}(dx) = \sum_i \int_{\mathcal{X}_0} \sigma(x|\,\omega_i)p_i(x)\mu_\omega(dx)$$

для любого μ_ω-измеримого подмножества $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$, имеем

$$\sum_i p_i(x)\sigma(x|\,\omega_i) = \sigma(x|\,\omega)$$

для μ_ω-почти всех x из $\mathcal{X}$.

Заметим, что функция $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$ является σ-выпуклой в обоих случаях. Действительно, если f – полунепрерывная сверху функция, это следует из ее совпадения с функцией $(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}$, если f – полунепрерывная снизу функция, то выпуклая функция $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$ полунепрерывна снизу и, следовательно, μ-выпукла (в силу приведенного в приложении предложения A-2).

Используя (25) и σ-выпуклость функции $(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$, получаем

$$\begin{aligned}(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}(\omega) &> \int_{\mathcal{X}} \sum_i p_i(x)(f\circ\Theta)^{\mu}_{*}(\sigma(x|\,\omega_i))\mu_\omega(dx) - \varepsilon\\ &\geqslant \int_{\mathcal{X}} (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}(\sigma(x|\,\omega))\mu_\omega(dx) - \varepsilon,\end{aligned}$$

откуда в силу произвольности ε следует (24).

Если f – полунепрерывная сверху функция, то $(f\circ\Theta)^{\sigma}_{*} = (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$ и (24) равносильно (21) для функции $E = (f\circ\Theta)^{\sigma}_{*} = (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}$.

Если f – полунепрерывная снизу функция, то для заданного произвольного состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ из леммы 1 и предложения 5 следует существование такой последовательности $\{\omega_n\} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, сходящейся к состоянию ω, что

$$\lim_{n\to+\infty} (f\circ\Theta)^{\sigma}_{*}(\omega_n) = (f\circ\Theta)^{\mu}_{*}(\omega).$$

Неравенство (21) для функции $E = (f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$ можно доказать, используя неравенство (24) для каждого состояния в последовательности $\{\omega_n\}$ и переходя к пределу $n \to +\infty$ при помощи приведенной в приложении леммы A-1 с учетом полунепрерывности снизу функции $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$.

Рассмотрим требование EM-1). Заметим, что состояние ω является несцепленным тогда и только тогда, когда в $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))$ существует мера μ с носителем на множестве чистых состояний-произведений [14].

Пусть f – полунепрерывная снизу функция. В силу предложения 3 для любого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ существует такая мера μ_ω из $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))$, что $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}(\omega) = \int f \circ \Theta(\sigma)\mu_\omega(d\sigma)$. Поэтому выполнение требования EM-1) для функции $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$ следует из приведенной выше характеристики множества несцепленных состояний.

Пусть f – полунепрерывная сверху функция. Тогда функция $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*} = (f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$ равна нулю на множестве несцепленных состояний в силу приведенной выше характеристики этого множества.

Предположим, что функция $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*} = (f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$ равна нулю на некотором сцепленном состоянии ω_0. Тогда существует такая локальная операция Λ, что состояние $\Lambda(\omega_0)$ сцеплено и имеет частичные состояния конечного ранга. В силу доказанной выше LOCC-монотонности функция $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*} = (f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$ равна нулю на сцепленном состоянии $\Lambda(\omega_0)$.

Пусть $\mathcal{H}_0$ – конечномерный носитель состояния $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\Lambda(\omega_0)$. Тогда полунепрерывная сверху вогнутая функция f, удовлетворяющая условию (23), имеет непрерывное сужение на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$. Действительно, непрерывность этого сужения в любом чистом состоянии из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ следует из полунепрерывности сверху неотрицательной функции f и условия (23), а непрерывность этого сужения в любом смешанном состоянии из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ следует из известного утверждения о непрерывности любой вогнутой ограниченной функции в любой внутренней точке выпуклого подмножества банахова пространства [21, предложение 3.2.3]. Поскольку

$$(f \circ \Theta|_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K})})^{\mu}_{*} = (f \circ \Theta)^{\mu}_{*}|_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K})},$$

приведенное выше рассуждение для случая полунепрерывной снизу функции f показывает, что из равенства $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}(\Lambda(\omega_0)) = 0$ следует несцепленность состояния $\Lambda(\omega_0)$, что противоречит предположению.

B) Если функция f субаддитивна, то функция $f \circ \Theta$ также субаддитивна. Пусть $\mu_i \in \widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega_i\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{L}_i))$, где $\mathcal{L}_i = \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{K}_i$, $i = 1, 2$, – произвольные меры. Множество состояний-произведений в $\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$ можно отождествить с декартовым произведением множеств $\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{L}_1)$ и $\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2)$. Следовательно, на этом множестве определено декартово произведение мер μ_1 и μ_2, обозначаемое $\mu_1 \otimes \mu_2$, которое можно считать мерой из $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega_1 \otimes \omega_2\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2))$ с носителем на множестве состояний-произведений. Используя эту конструкцию, нетрудно показать субаддитивность функции $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$. То же рассуждение[13] с атомическими мерами μ_1 и μ_2 показывает субаддитивность функции $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*}$.

[13] В этом случае мера $\mu_1 \otimes \mu_2$ соответствует тензорному произведению счетных ансамблей чистых состояний, соответствующих мерам μ_1 и μ_2.

C) Если функция f полунепрерывна снизу и удовлетворяет дополнительным условиям утверждения C) теоремы, то функция $f \circ \Theta$ удовлетворяет условиям следствия 5 с аффинной функцией $\alpha(\omega) = \mathrm{Tr}(H_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{K}})\omega$.

D) Утверждение непосредственно следует из предложения 5.

Замечание 6. Функция $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*}$ может не удовлетворять основному требованию EM-1) даже при ограниченной полунепрерывной снизу функции f (см. утверждение A-2) теоремы 2), что подтверждает следующий пример. Действительно, пусть f – индикаторная функция множества всех смешанных состояний в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и ω_0 – такое несцепленное состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, что любая мера из $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega_0\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))$ не имеет атомов, лежащих в множестве состояний-произведений [14]. Нетрудно видеть, что $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*}(\omega_0) = 1$ (в то время как $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}(\omega_0) = 0$).

Приведенная в замечании 6 функция $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*}$ также не удовлетворяет требованиям EM-3c) и EM-5a). Это общая черта любой σ-выпуклой надстройки, не совпадающей с соответствующей μ-выпуклой надстройкой.

Замечание 6 и утверждения теоремы 2 показывают, что функция $(f \circ \Theta)^{\sigma}_{*}$ либо совпадает с функцией $(f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$ (если f полунепрерывна сверху), либо может не удовлетворять основному требованию EM-1) MXC (если f полунепрерывна снизу). Поэтому конструкция, основанная на μ-выпуклой надстройке, представляется более предпочтительным кандидатом на роль бесконечномерного обобщения метода выпуклой надстройки построения MXC. Будем использовать следующее обозначение:

$$E^{f} = (f \circ \Theta)^{\mu}_{*}$$

для любой функции f, удовлетворяющей условиям теоремы 2.

Пример 5. Обобщая на бесконечномерный случай результат из [30], рассмотрим семейство функций

$$f_{\alpha}(\rho) = 2(1 - \mathrm{Tr}\,\rho^{\alpha}), \qquad \alpha > 1,$$

на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ при $\dim \mathcal{H} = +\infty$. Функции этого семейства неотрицательны, вогнуты, непрерывны и удовлетворяют условиям (23). Из теоремы 2 следует, что $\{E^{f_{\alpha}}\}_{\alpha > 1}$ – семейство MXC, удовлетворяющих требованиям EM-1), EM-2c), EM-3c) и EM-5c). В случае $\alpha = 2$ монотонную характеристику сцепленности E^{f_2} можно считать бесконечномерным обобщением понятия I-tangle [31]. В силу следствия 4 функция $(\omega, \alpha) \mapsto E^{f_{\alpha}}(\omega)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \times [1, +\infty)$. В силу следствия 3 точная верхняя грань монотонного семейства $\{E^{f_{\alpha}}\}_{\alpha > 1}$ непрерывных MXC совпадает с индикаторной функцией множества сцепленных состояний.

Пример 6. Пусть $R_p(\rho) = \frac{\log \mathrm{Tr}\,\rho^{p}}{1-p}$ – энтропия Реньи состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ порядка $p \in [0, 1]$ (случай $p = 0$ соответствует функции $\log \mathrm{rank}(\rho)$, случай $p = 1$ соответствует энтропии фон Неймана), R_p – вогнутая полунепрерывная снизу субаддитивная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, принимающая значения в $[0, +\infty]$ и удовлетворяющая условиям (23). В силу теоремы 2 функция E^{R_p} является монотонной характеристикой сцепленности, удовлетворяющей требованиям

ЕМ-1), ЕМ-2с), ЕМ-3с), ЕМ-4) и ЕМ-5а). В случае $p = 0$ монотонная характеристика сцепленности E^{R_0} является бесконечномерным обобщением меры Шмидта [27]. В случае $p = 1$ монотонная характеристика сцепленности $E^{R_1} = E^H$ является мерой сцепленности, которую можно считать бесконечномерным обобщением сцепленности формирования (Entanglement of Formation) [7] (см. следующий параграф). Если $\mathrm{g}(H_{\mathcal{H}}) = \inf\{\lambda > 0 \mid \operatorname{Tr}\exp(-\lambda H_{\mathcal{H}}) < +\infty\} = 0$, то из теоремы 2, C) следует, что мера сцепленности $E^{R_1} = E^H$ удовлетворяет требованию ЕМ-5b), поскольку энтропия фон Неймана $H = R_1$ непрерывна на множестве $\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}},h}$ (см. [26, предложение 1]).

4.3. Аппроксимация МХС. В общем случае МХС, построенные методом μ-выпуклой надстройки, являются неограниченными и разрывными функциями, что приводит к аналитическим трудностям при рассмотрении этих функций. Некоторые из этих трудностей можно преодолеть, используя следующий аппроксимативный результат.

Предложение 7. *Пусть f – вогнутая неотрицательная полунепрерывная снизу* (*соответственно*, *полунепрерывная сверху*) *функция на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, *удовлетворяющая условиям* (23), *которая является пределом возрастающей* (*соответственно*, *убывающей*) *последовательности* $\{f_n\}$ *вогнутых непрерывных неотрицательных функций на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, *удовлетворяющих условиям* (23). *Тогда* МХС E^f *является пределом возрастающей* (*соответственно*, *убывающей*) *последовательности* $\{E^{f_n}\}_n$ *непрерывных* МХС.

Если, *дополнительно*, *функция* f *удовлетворяет условию* C) *теоремы* 2, *то последовательность* $\{E^{f_n}\}$ *сходится к* МХС E^f *равномерно на компактных подмножествах множества* $\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}}\otimes I_{\mathcal{K}},h}$ *при каждом* $h > 0$.

Доказательство. Первое утверждение этого предложения следует из теоремы 2, следствия 3 и замечания 2. Второе утверждение следует из первого и леммы Дини.

§ 5. Сцепленность формирования

5.1. Два определения. Сцепленность формирования (Entanglement of Formation, EoF) состояния ω конечномерной составной квантовой системы определена в [7] как минимально возможная средняя сцепленность *конечного* разложения состояния ω по чистым состояниям (сцепленность чистого состояния определяется как энтропия фон Неймана частичного состояния). В принятых нами обозначениях это означает, что

$$E_F = (H \circ \Theta)_* = \overline{\mathrm{co}}(H \circ \Theta) = \mathrm{co}(H \circ \Theta).$$

Возможное обобщение этого понятия рассмотрено в [8], где сцепленность формирования состояния ω бесконечномерной составной квантовой системы определяется как минимально возможная средняя сцепленность *счетного* разложения состояния ω по чистым состояниям, что означает $E_F^d = (H \circ \Theta)_*^\sigma$.

Используя рассмотренный в п. 4.2 обобщенный метод выпуклой надстройки с энтропией фон Неймана H в роли функции f, можно определить сцепленность формирования как $E_F^c = E^H = (H \circ \Theta)_*^\mu = \overline{\mathrm{co}}(H \circ \Theta)$, что соответствует предложенному в [25] подходу, согласно которому сцепленность формирования состояния ω бесконечномерной составной квантовой системы определяется как минимально возможная средняя сцепленность *непрерывного* разложения состояния ω по чистым состояниям.

Интересный открытый вопрос – это соотношение между E_F^d и E_F^c. Из определений следует, что

$$E_F^d(\omega) \geqslant E_F^c(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}).$$

В [25] показано, что

$$E_F^d(\omega) = E_F^c(\omega) \tag{26}$$

для такого состояния ω, что либо $H(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\omega) < +\infty$, либо $H(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega) < +\infty$. Равенство (26), очевидно, выполнено для всех чистых состояний и для всех несцепленных состояний, но его справедливость для любого состояния ω до сих пор не доказана. Пример в замечании 6 показывает, что этот вопрос нельзя решить, используя только такие аналитические свойства энтропии фон Неймана, как вогнутость и полунепрерывность снизу. Заметим, что гипотеза о совпадении функций E_F^d и E_F^c равносильна гипотезе о полунепрерывности снизу функции E_F^d, поскольку E_F^c – это наибольшая полунепрерывная снизу выпуклая функция, совпадающая с энтропией фон Неймана на множестве чистых состояний.

Несмотря на то, что определение функции E_F^d кажется более естественным с физической точки зрения (поскольку оно включает в себя минимизацию по ансамблям квантовых состояний, а не по мерам), предположение о существовании такого состояния ω_0, что $E_F^d(\omega_0) \neq E_F^c(\omega_0)$, приводит к следующему “нефизическому” свойству этой функции. Для каждого натурального n рассмотрим измерение – разложение единицы $\{M_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$, где

$$M_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\right) \otimes I_{\mathcal{K}}, \qquad M_k = |n+k-1\rangle\langle n+k-1| \otimes I_{\mathcal{K}}, \quad k>1.$$

Ясно, что последовательность $\{\Phi_n\}_n$, где $\Phi_n = \{M_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$, неселективных локальных операций сходится к тождественному преобразованию (в топологии сильной операторной сходимости). Поскольку функции E_F^d и E_F^c удовлетворяют требованиям EM-2b) и EM-3b), при каждом n имеем

$$E_F^d(\omega_0) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k^n E_F^d(\omega_k^n) \geqslant E_F^d\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k^n \omega_k^n\right) = E_F^d(\Phi_n(\omega_0)),$$

$$E_F^c(\omega_0) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k^n E_F^c(\omega_k^n),$$

где $\pi_k^n = \mathrm{Tr}\, M_k^n \omega_0 M_k^n$ – вероятность k-го исхода и $\omega_k^n = (\pi_k^n)^{-1} M_k^n \omega_0 M_k^n$ – апостериорное состояние, соответствующее этому исходу [9, гл. 4].

Поскольку при всех n и k состояние $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega_k^n$ имеет конечный ранг, в силу упомянутого выше результата из [25] имеем $E_F^d(\omega_k^n) = E_F^c(\omega_k^n)$. Поэтому из последних двух неравенств следует, что

$$E_F^d(\Phi_n(\omega_0)) = E_F^d\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k^n \omega_k^n\right) \leqslant E_F^c(\omega_0)$$

для всех n и, следовательно,

$$\limsup_{n\to+\infty} E_F^d(\Phi_n(\omega_0)) \leqslant E_F^d(\omega_0) - \Delta, \qquad \Delta = E_F^d(\omega_0) - E_F^c(\omega_0) > 0,$$

несмотря на то, что последовательность $\{\Phi_n\}_n$ неселективных локальных операций сходится к тождественному преобразованию. В отличие от этого, из полунепрерывности снизу и LOCC-монотонности функции E_F^c следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} E_F^c(\Phi_n(\omega_0)) = E_F^c(\omega_0)$$

для любого состояния ω_0 и любой последовательности $\{\Phi_n\}_n$ неселективных LOCC-операций, сходящейся к тождественному преобразованию.

Другое преимущество функции E_F^c состоит в ее обобщенной LOCC-монотонности, т. е. выполнении требования EM-2c), которое следует из теоремы 2, в то время как предположение $E_F^d \neq E_F^c$ означает, что функция E_F^d не является полунепрерывной снизу, а это является серьезным препятствием в доказательстве для нее аналогичного свойства.

5.2. Аппроксимация EoF. Для заданного натурального $n > 1$ рассмотрим функцию H_n на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, определяемую формулой

$$H_n(\rho) = \sup \sum_i \pi_i H(\rho_i),$$

в которой точная верхняя грань берется по всем возможным ансамблям $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний ранга $\leqslant n$ со средним состоянием ρ. Нетрудно видеть, что функция H_n вогнута, удовлетворяет условиям (23), имеет множество значений $[0, \log n]$ и совпадает с энтропией фон Неймана H на подмножестве множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, состоящем из состояний ранга $\leqslant n$. Используя усиленную версию свойства устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, в [32] показано, что функция H_n непрерывна на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и возрастающая последовательность $\{H_n\}$ поточечно сходится к энтропии фон Неймана H на этом множестве.

В силу теоремы 2 функция $E_F^n = (H_n \circ \Theta)_*^\mu$ является МХС, удовлетворяющей требованиям EM-1), EM-2c), EM-3c), EM-4) и EM-5c). Нетрудно видеть, что функция E_F^n имеет множество значений $[0, \log n]$ и совпадает с функцией E_F^c на множестве

$$\bigl\{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \mid \min\{\operatorname{rank} \operatorname{Tr}_{\mathcal{K}} \omega, \operatorname{rank} \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} \omega\} \leqslant n\bigr\}.$$

В силу предложения 7 возрастающая последовательность $\{E_F^n\}$ непрерывных МХС поточечно сходится к функции E_F^c на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ и эта сходимость равномерна на любых компактных подмножествах множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, на которых непрерывна функция E_F^c, в частности на компактных подмножествах множества $\mathcal{K}_{H_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{K}}, h}$ при каждом $h > 0$, где $H_{\mathcal{H}}$ – такой $\mathfrak{H}$-оператор в пространстве $\mathcal{H}$, что $\operatorname{Tr} e^{-\lambda H_{\mathcal{H}}} < +\infty$ при любом $\lambda > 0$. Условия непрерывности функции E_F^c рассмотрены в следующем пункте.

5.3. Условия непрерывности EoF. Из [25, теорема 1] вытекает следующее условие непрерывности функции E_F^c, которое можно также сформулировать как условие непрерывности функции E_F^d, поскольку данное условие гарантирует совпадение этих функций.

Предложение 8. *Функция E_F^c имеет непрерывное сужение на подмножество $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, если функция $\omega \mapsto H(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\omega)$ или $\omega \mapsto H(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega)$ имеет непрерывное сужение на множество $\mathcal{A}$.*

Это условие позволяет получить упомянутый в примере 6 результат (справедливость требования EM-5b)), а также следующее утверждение.

Следствие 8. *Функция E_F^c имеет непрерывное сужение на подмножество $\{\omega \mid \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega = \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})\}$ тогда и только тогда, когда $H(\rho) < +\infty$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если $H(\rho) = +\infty$, то существует такое чистое состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, что $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega = \rho$.

В силу следствия 8 для любого непрерывного семейства $\{\Phi_t\}$ неселективных локальных операций над квантовой системой, ассоциированной с пространством $\mathcal{K}$, и любого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ такого, что $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega < +\infty$, функция $t \mapsto E_F^c(\Phi_t(\omega))$ непрерывна.

Для любого состояния σ пусть $\mathrm{d}(\sigma) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Tr}\,\sigma^{\lambda} < +\infty\}$ – характеристика спектра этого состояния. Ясно, что $\mathrm{d}(\sigma) \in [0, 1]$. Предложение 8, предложение 2 из [26] и свойство монотонности относительной энтропии приводят к следующему условию непрерывности функции E_F^c по отношению к сходимости, определяемой относительной энтропией (которая является более сильной, чем сходимость по следовой норме).

Следствие 9. *Пусть ω_0 – такое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, для которого либо $\mathrm{d}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\omega) < 1$, либо $\mathrm{d}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega) < 1$. Если $\{\omega_n\}$ – такая последовательность, что $\lim_{n\to+\infty} H(\omega_n\|\omega_0) = 0$, то $\lim_{n\to+\infty} E_F^c(\omega_n) = E_F^c(\omega_0)$.*

§ 6. Возможные обобщения

Определения σ-выпуклой и μ-выпуклой функций естественно формулируются для функций на любом выпуклом замкнутом подмножестве локально выпуклого пространства при условии существования барицентра у любой вероятностной меры на этом подмножестве. Определения σ-выпуклой и μ-выпуклой надстроек также допускают подобное обобщение, однако при этом приходится налагать условия, обеспечивающие корректность определения этих конструкций.

Существует класс выпуклых подмножеств локально выпуклых пространств, включающий в себя как все метризуемые компакты, так и некоторые важные для приложений некомпактные множества (например, множество квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$), на которые легко обобщаются все основные результаты из § 2, 3. Этот класс множеств, названных в [13] μ-компактными, подробно исследуется в работе [15], где показана возможность обобщения на множества этого класса некоторых классических результатов о свойствах выпуклых компактов, в частности доказаны μ-компактные версии теоремы Шоке о барицентрическом разложении и теоремы Вестерстрема–О'Брайена [16]. Последний результат устанавливает равносильность свойства устойчивости выпуклого μ-компакта (т. е. открытости отображения выпуклого смешивания) с рядом других свойств, в частности открытости барицентрического отображения и открытости его сужения на множество мер, сосредоточенных на крайних точках данного μ-компакта.

Используя результаты из [13], [15], нетрудно показать, что все утверждения из § 2, 3 выполнены для любого выпуклого μ-компактного множества $\mathcal{A}$ (в роли $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$), обладающего свойством устойчивости и такого, что $\mathcal{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathcal{A})$, причем свойство устойчивости используется только в доказательствах предложений 2, 4, следствий 1, 2, 4, второй части предложения 5, теоремы 1 и ее следствий, а в доказательствах предложения 3 и следствия 3 его можно заменить более слабым требованием замкнутости множества $\operatorname{extr}\mathcal{A}$, которое необходимо для определения μ-выпуклой надстройки, в то время как условие $\mathcal{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathcal{A})$ необходимо для определения σ-выпуклой надстройки и используется в доказательствах всех утверждений, связанных с этой конструкцией.

Приложения

A1. Неравенство Йенсена для функций на банаховых пространствах. Здесь приведены достаточные условия выполнимости для выпуклых функций на банаховых пространствах со значениями в $[-\infty, +\infty]$ неравенства Йенсена в дискретной и в интегральной формах. В качестве простейшего примера, показывающего существенность условий в приведенных ниже предложениях и следствии, можно рассмотреть аффинную борелевскую функцию на симплексе распределений вероятностей со счетным числом исходов, принимающую значения 0 и $+\infty$ на множествах распределений конечного и бесконечного ранга соответственно. Другие примеры рассмотрены в § 2.

С помощью неравенства Йенсена для конечных выпуклых комбинаций и предельного перехода легко доказать следующее утверждение.

Предложение A-1 (дискретное неравенство Йенсена). *Пусть f – выпуклая ограниченная сверху функция на замкнутом выпуклом ограниченном подмножестве $\mathcal{A}$ банахова пространства. Тогда для любого счетного набора $\{x_i\} \subset \mathcal{A}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ имеет место неравенство*

$$f\biggl(\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i x_i\biggr) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i f(x_i).$$

Предложение A-2 (интегральное неравенство Йенсена). *Пусть f – выпуклая функция на замкнутом ограниченном выпуклом подмножестве $\mathcal{A}$ сепарабельного банахова пространства, которая либо полунепрерывна снизу, либо* *ограничена сверху и полунепрерывна сверху. Тогда для любой борелевской вероятностной меры μ на множестве $\mathcal{A}$ имеет место неравенство*

$$f\biggl(\int_{\mathcal{A}} x\mu(dx)\biggr) \leqslant \int_{\mathcal{A}} f(x)\mu(dx). \tag{27}$$

(Заметим, что если $\mathcal{A}$ – подмножество в $\mathbb{R}^n$, то неравенство (27) выполнено для любой борелевской функции f со значениями в $[-\infty,+\infty]$ и любой борелевской меры μ [33].)

Доказательство. Пусть μ_0 – произвольная борелевская вероятностная мера на множестве $\mathcal{A}$.

Пусть f – ограниченная сверху полунепрерывная сверху функция. Тогда функционал $\mu\mapsto\int_{\mathcal{A}} f(x)\mu(dx)$ полунепрерывен сверху на множестве борелевских вероятностных мер на $\mathcal{A}$, снабженном слабой топологией [24, § 2]. Пусть $\{\mu_n\}$ – последовательность мер с конечным носителем и тем же самым барицентром, что и мера μ_0, слабо сходящаяся к мере μ_0. В силу выпуклости функции f неравенство (27) выполнено при $\mu=\mu_n$ для каждого n. Переходя к пределу $n\to+\infty$ в этом неравенстве с учетом полунепрерывности сверху функционала $\mu\mapsto\int_{\mathcal{A}} f(x)\mu(dx)$, получаем неравенство (27) с $\mu=\mu_0$.

Пусть f – полунепрерывная снизу функция. В силу аналога леммы 2 для множества $\mathcal{A}$ можно считать, что функция f ограничена снизу. Предположим, что $\int_{\mathcal{A}} f(x)\mu_0(dx)<+\infty$. Используя конструкцию из доказательства леммы 1, можно построить такую последовательность $\{\mu_n\}$ мер на множестве $\mathcal{A}$ с конечным носителем, что

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathcal{A}} f(x)\mu_n(dx)\leqslant\int_{\mathcal{A}} f(x)\mu_0(dx), \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathcal{A}} x\mu_n(dx)=\int_{\mathcal{A}} x\mu_0(dx).$$

В силу выпуклости функции f неравенство (27) выполнено при $\mu=\mu_n$ для каждого n. Переходя к пределу $n\to+\infty$ в этом неравенстве с учетом полунепрерывности снизу функции f, получаем неравенство (27) с $\mu=\mu_0$.

Следствие А-1. *Пусть f – аффинная полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на замкнутом ограниченном выпуклом подмножестве $\mathcal{A}$ сепарабельного банахова пространства. Тогда для любой борелевской вероятностной меры μ на множестве $\mathcal{A}$ имеет место равенство*

$$f\biggl(\int_{\mathcal{A}} x\mu(dx)\biggr) = \int_{\mathcal{A}} f(x)\mu(dx). \tag{28}$$

А2. Свойство апостериорных состояний. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольный инструмент на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с множеством значений $\mathcal{X}$ [9, гл. 4]. Для произвольного состояния $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ пусть $\mu_\rho(\cdot)=\operatorname{Tr}\mathfrak{M}(\cdot)(\rho)$ – апостериорная мера на множестве $\mathcal{X}$ и $\{\sigma(x|\rho)\}_{x\in\mathcal{X}}$ – семейство апостериорных состояний, соответствующих априорному состоянию ρ [9], [28].

Лемма А-1. *Для любой выпуклой полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любой последовательности $\{\rho_n\}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящейся к состоянию ρ_0, имеет место неравенство*

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathcal{X}} f(\sigma(x|\rho_n))\mu_{\rho_n}(dx)\geqslant\int_{\mathcal{X}} f(\sigma(x|\rho_0))\mu_{\rho_0}(dx).$$

Доказательство. Достаточно показать, что предположение

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathcal{X}} f(\sigma(x|\rho_n))\mu_{\rho_n}(dx) \leqslant \int_{\mathcal{X}} f(\sigma(x|\rho_0))\mu_{\rho_0}(dx) - \Delta, \qquad \Delta > 0, \tag{29}$$

приводит к противоречию.

Пусть $\nu_0 = \mu_{\rho_0} \circ \sigma^{-1}(\,\cdot\,|\rho_0)$ – образ меры μ_{ρ_0} при отображении $x \mapsto \sigma(x|\rho_0)$. Ясно, что $\nu_0 \in \mathcal{P}$ (см. замечание 5) и что

$$\int_{\mathcal{X}} f(\sigma(x|\rho_0))\mu_{\rho_0}(dx) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\nu_0(d\rho).$$

В силу сепарабельности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ для заданного m существует такое семейство $\{\mathcal{B}_i^m\}_i$ борелевских подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, что $\nu_0(\mathcal{B}_i^m) > 0$ для всех i и последовательность мер

$$\nu_m = \left\{\nu_0(\mathcal{B}_i^m), \frac{1}{\nu_0(\mathcal{B}_i^m)} \int_{\mathcal{B}_i^m} \rho\nu_0(d\rho)\right\}_i$$

слабо сходится к мере ν_0 (см. [4, доказательство леммы 1]). В силу полунепрерывности снизу функционала $\mu \mapsto \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\mu(d\rho)$ существует такое m_0, что

$$\begin{aligned}\sum_i \nu_0(\mathcal{B}_i^{m_0}) f\biggl(\frac{1}{\nu_0(\mathcal{B}_i^{m_0})} \int_{\mathcal{B}_i^{m_0}} \rho\nu_0(d\rho)\biggr)\\ = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\nu_{m_0}(d\rho) \geqslant \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\nu_0(d\rho) - \frac{1}{3}\Delta.\end{aligned} \tag{30}$$

Используя конечное семейство $\{\mathcal{X}_i\}$, $\mathcal{X}_i = \sigma^{-1}(\mathcal{B}_i^{m_0}|\rho_0)$, μ_{ρ_0}-измеримых подмножеств множества $\mathcal{X}$, можно построить семейство $\{\mathcal{X}_i'\}$, состоящее из такого же числа борелевских подмножеств множества $\mathcal{X}$ и такое, что $\mu_{\rho_0}((\mathcal{X}_i' \setminus \mathcal{X}_i) \cup (\mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}_i')) = 0$ и $\bigcup_i \mathcal{X}_i' = \mathcal{X}$. Для каждого i состояние

$$\sigma_0^i = \frac{1}{\nu_0(\mathcal{B}_i^{m_0})} \int_{\mathcal{B}_i^{m_0}} \rho\nu_0(d\rho) = \frac{1}{\mu_{\rho_0}(\mathcal{X}_i')} \int_{\mathcal{X}_i'} \sigma(x|\rho_0)\mu_{\rho_0}(dx) = \frac{\mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_0)}{\operatorname{Tr}\mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_0)}$$

является апостериорным состоянием, соответствующим подмножеству значений $\mathcal{X}_i'$ и априорному состоянию ρ_0.

Для каждого i пусть $\sigma_n^i = \frac{\mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_n)}{\operatorname{Tr}\mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_n)}$ – апостериорное состояние[14], соответствующее подмножеству значений $\mathcal{X}_i'$ и априорному состоянию ρ_n. Поскольку $\lim_{n\to+\infty}\mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_n) = \mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_0)$, в силу полунепрерывности снизу функции f имеем

$$\sum_i \mu_{\rho_n}(\mathcal{X}_i') f(\sigma_n^i) \geqslant \sum_i \mu_{\rho_0}(\mathcal{X}_i') f(\sigma_0^i) - \frac{1}{3}\Delta \tag{31}$$

для всех достаточно больших n.

В силу неравенства Йенсена (предложение A-2) из выпуклости и полунепрерывности снизу функции f следует, что

$$\mu_{\rho_n}(\mathcal{X}_i') f(\sigma_n^i) \leqslant \int_{\mathcal{X}_i'} f(\sigma(x|\rho_n))\mu_{\rho_n}(dx) \qquad \forall\, i, n. \tag{32}$$

[14] Поскольку $\operatorname{Tr}\mathfrak{M}(\mathcal{X}_i')(\rho_0) = \mu_{\rho_0}(\mathcal{X}_i') > 0$, состояние σ_n^i корректно определено для всех достаточно больших n.

Используя (30)–(32), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} f(\sigma(x|\rho_n))\mu_{\rho_n}(dx) &= \sum_i \int_{\mathcal{X}'_i} f(\sigma(x|\rho_n))\mu_{\rho_n}(dx) \geqslant \sum_i \mu_{\rho_n}(\mathcal{X}'_i) f(\sigma_n^i) \\ &\geqslant \sum_i \mu_{\rho_0}(\mathcal{X}'_i) f(\sigma_0^i) - \frac{1}{3}\Delta \geqslant \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\rho)\nu_0(d\rho) - \frac{2}{3}\Delta\end{aligned}$$

для всех достаточно больших n, что противоречит (29).

Автор благодарен А. С. Холево за помощь и полезные обсуждения, а также рецензентам, замечания которых способствовали улучшению настоящей статьи.

Список литературы

1. A. Uhlmann, *Entropy and optimal decompositions of states relative to a maximal commutative subalgebra*, arXiv: `quant-ph/9704017`.
2. G. Vidal, “Entanglement monotones”, *J. Modern Opt.*, **47**:2–3 (2000), 355–376.
3. M. B. Plenio, S. Virmani, “An introduction to entanglement measures”, *Quantum Inf. Comput.*, **7**:1–2 (2007), 1–51, arXiv: `quant-ph/0504163`.
4. А. С. Холево, М. Е. Широков, “Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности”, *ТВП*, **50**:1 (2005), 98–114; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, “Continuous ensembles and the capacity of infinite-dimensional quantum channels”, *Theory Probab. Appl.*, **50**:1 (2006), 86–98.
5. M. E. Shirokov, *Properties of probability measures on the set of quantum states and their applications*, arXiv: `arXiv:math-ph/0607019`.
6. А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002.
7. Ch. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, “Mixed-state entanglement and quantum error correction”, *Phys. Rev. A* (3), **54**:3 (1996), 3824–3851.
8. J. Eisert, Ch. Simon, M. B. Plenio, “On the quantification of entanglement in infinite-dimensional quantum systems”, *J. Phys. A*, **35**:17 (2002), 3911–3923.
9. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, М.–Ижевск, 2003; англ. пер.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lect. Notes Phys. Monogr., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
10. Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
11. K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York–London, 1967.
12. A. Wehrl, “General properties of entropy”, *Rev. Modern Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.
13. М. Е. Широков, “О сильном CE-свойстве выпуклых множеств”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 441–458; англ. пер.: M. E. Shirokov, “On the strong CE-property of convex sets”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 395–409.
14. Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, “О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах”, *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154; англ. пер.: A. S. Kholevo, M. E. Shirokov, R. F. Werner, “On the notion of entanglement in Hilbert spaces”, *Russian Math. Surveys*, **60**:2 (2005), 359–360.
15. В. Ю. Протасов, М. Е. Широков, “Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 71–98; англ. пер.: V. Yu. Protasov, M. E. Shirokov, “Generalized compactness in linear spaces and its applications”, *Sb. Math.*, **200**:5 (2009), 697–722.

16. R. C. O'Brien, "On the openness of the barycentre map", *Math. Ann.*, **223**:3 (1976), 207–212.
17. S. Papadopoulou, "On the geometry of stable compact convex sets", *Math. Ann.*, **229**:3 (1977), 193–200.
18. R. Grząślewicz, "Extreme continuous function property", *Acta Math. Hungar.*, **74**:1–2 (1997), 93–99.
19. P. Ressel, "Some continuity and measurability results on spaces of measures", *Math. Scand.*, **40**:1 (1977), 69–78.
20. Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции*, Физматлит, М., 2006.
21. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
22. E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971.
23. М. Е. Широков, "О характеризации выпуклых μ-компактных множеств", *УМН*, **63**:5 (2008), 181–182; англ. пер.: M. E. Shirokov, "Characterization of convex μ-compact sets", *Russian Math. Surveys*, **63**:5 (2008), 981–982.
24. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977; пер. с англ.: P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York–London–Sydney, 1968.
25. М. Е. Широков, "О свойствах квантовых каналов, связанных с классической пропускной способностью", *ТВП*, **52**:2 (2007), 301–335; англ. пер.: M. E. Shirokov, "On properties of quantum channels related to their classical capacity", *Theory Probab. Appl.*, **52**:2 (2007), 250–276.
26. М. Е. Широков, "Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 193–222; англ. пер.: M. E. Shirokov, "Entropy characteristics of subsets of states. I", *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1265–1292.
27. J. Eisert, *Entanglement in quantum information theory*, arXiv: quant-ph/0610253.
28. M. Ozawa, "Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **21**:2 (1985), 279–295.
29. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, "Ковариационные операторы вероятностных мер в локально выпуклых пространствах", *ТВП*, **23**:1 (1978), 3–26; англ. пер.: N. N. Vakhaniya, V. I. Tarieladze, "Covariance operators of probability measures in locally convex spaces", *Theory Probab. Appl.*, **23**:1 (1978), 1–21.
30. T. J. Osborne, "Convex hulls of varieties and entanglement measures based on the roof construction", *Quantum Inf. Comput.*, **7**:3 (2007), 209–227.
31. P. Rungta, C. M. Caves, "Concurrence-based entanglement measures for isotropic states", *Phys. Rev. A*, **67**:1 (2003), 012307/1-9.
32. M. E. Shirokov, "Continuity of the von Neumann entropy", *Commun. Math. Phys.*, **296**:3 (2010), 625–654; arXiv: 0904.1963.
33. Ф. В. Гусейнов, "О неравенстве Иенсена", *Матем. заметки*, **41**:6 (1987), 798–806; англ. пер.: F. V. Gusejnov, "Jensen's inequality", *Math. Notes*, **41**:6 (1987), 452–458.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
16.06.2008
21.04.2009