УДК 519.248.3

М.Е. Широков

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Московский физико-технический институт (государственный университет)

О свойствах вероятностных мер на множестве квантовых состояний*

Рассмотрены два свойства множества вероятностных мер на пространстве квантовых состояний, снабженного топологией слабой сходимости, а также их следствия, которые связаны с некоторыми функциональными конструкциями, используемыми в выпуклом анализе и его приложениях.

Ключевые слова: квантовое состояние, вероятностная мера, барицентрическое отображение, выпуклая оболочка и выпуклое замыкание функции.

I. Введение

Понятие ансамбля — набора квантовых состояний с соответствующим распределением вероятностей — широко используется в квантовой теории информации. В частности, такие важные характеристики, как пропускная способность Холево квантового канала (the Holevo capacity) и сцепленность формирования (the Entanglement of Formation) состояния составной квантовой системы, определяются как экстремальные значения функционалов, зависящих от ансамбля квантовых состояний [3, 10].

Ансамбль квантовых состояний можно рассматривать как атомическую вероятностную меру на множестве всех квантовых состояний, атомы которой соответствуют состояниям ансамбля. Поэтому естественно представлять произвольную борелевскую вероятностную меру на множестве всех квантовых состояний как обобщенный ансамбль. Эта точка зрения особенно удобна при изучении бесконечномерных квантовых каналов и систем, поскольку в этом случае необходимо рассматривать непрерывные ансамбли квантовых состояний, т. е. семейства состояний индексируемые вещественным параметром (или вектором) [19]. Одно из преимуществ такого подхода состоит в возможности применения общих результатов теории вероятностных мер на полных сепарабельных метрических пространствах [4, 12, 15].

В данной статье рассмотрены следующие общие свойства множества вероятностных мер на пространстве квантовых состояний:

- слабая компактность подмножеств вероятностных мер, барицентры которых образуют компактные подмножества состояний;
- открытость барицентрического отображения и некоторых его сужений в топологии слабой сходимости.

Эти свойства, подробно описанные в разделах III и IV, отражают определенные соотношения между топологией и выпуклой структурой множества квантовых состояний. Первое из них можно рассматривать как «разновидность» слабой компактности, поскольку оно позволяет доказывать для некомпактного множества квантовых состояний и его замкнутых выпуклых подмножеств хорошо известные для выпуклых компактов результаты. Второе свойство показывает, грубо говоря, что любое малое возмущение среднего состояния квантового ансамбля можно реализовать посредством соответствующих малых возмущений состояний этого ансамбля, оно дает возможность, в частности, доказать сохранение полунепрерывности сверху при операциях выпуклого замыкания функции и выпуклой надстройки (the convex roof) функции (стандартные операции выпуклого анализа).

Некоторые применения этих свойств и их следствий рассмотрены в разделе V, расширенный обзор приложений в квантовой теории информации дан в [14].

II. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ — банаховы пространства всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ с операторной нормой $\|\cdot\|$ и всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$ со следовой нормой $\|\cdot\|_1 = \mathrm{Tr}|\cdot|$ соответственно, а $\mathfrak{B}_+(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ — конусы положительных операторов в этих пространствах [10]. Замкнутое выпуклое подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 1\}$ конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой. Следуя традиции, операторы из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ будем обозначать греческими буквами ρ, σ, ω и называть *состояниями*, поскольку каждый такой оператор ρ задает

*Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Математическая теория управления» РАН, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/11133, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракт П938, и грантов РФФИ 09-01-00424а и 10-01-00139а.

линейный нормальный функционал $A \mapsto \mathrm{Tr}\, A\rho$ с единичной нормой на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, называемый в теории операторных алгебр состоянием [6].

Пусть $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$ — подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, состоящее из состояний ранга $\leqslant k$. В частности, $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ — множество чистых состояний — одномерных проекторов.

Обозначим $\mathrm{co}(\mathcal{A})$ и $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ выпуклую оболочку и выпуклое замыкание подмножества $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{A}$ обозначим $\mathrm{extr}\,\mathcal{A}$.

Пусть $C(\mathcal{A})$ — множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathcal{A}$.

Для произвольной функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ ее выпуклую оболочку (максимальную выпуклую функцию, не превосходящую функцию f) и ее выпуклое замыкание (максимальную выпуклую полунепрерывную снизу функцию, не превосходящую функцию f) обозначим $\mathrm{co}\, f$ и $\overline{\mathrm{co}} f$ соответственно [16, 17].

Для произвольного замкнутого подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ пусть $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — множество борелевских вероятностных мер на $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [4, 12]. Поскольку $\mathcal{A}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, множество $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ также можно считать полным сепарабельным метрическим пространством [12]. Пусть $\mathcal{P}^a(\mathcal{A})$ и $\mathcal{P}^f(\mathcal{A})$ — подмножества множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящие из атомических мер со счетным и конечным числом атомов соответственно.

Меру из $\mathcal{P}^a(\mathcal{A})$, состоящую из атомов $\{\rho_i\} \subset \mathcal{A}$ с соответствующими весами $\{\pi_i\}$, обозначим $\{\pi_i, \rho_i\}$. С физической точки зрения такая мера может рассматриваться как дискретный ансамбль квантовых состояний, тогда как произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — как непрерывный ансамбль [19].

Барицентр меры $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ — это состояние из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$, определяемое интегралом Бохнера:

$$\mathbf{b}(\mu) = \int\limits_{\mathcal{A}} \sigma \mu(d\sigma).$$

Если $\mu = \{\pi_i, \rho_i\}$, то $\mathbf{b}(\mu) = \sum_i \pi_i \rho_i$ — среднее состояние ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$.

Для произвольного подмножества $\mathcal{B}$ множества $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ пусть $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из мер с барицентром, лежащим в $\mathcal{B}$.

III. Критерий компактности и его следствия

Множество $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно только тогда, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$ (поскольку множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ компактно только тогда, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$). В случае $\dim \mathcal{H} = +\infty$ имеет место следующий критерий компактности подмножеств множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, который доказывается с помощью теоремы Прохорова [19, предложение 2].

Теорема 3.1. Множество $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ компактно. □

Свойство, представленное в теореме 3.1, не является чисто топологическим, оно отражает определенное соотношение между топологией и выпуклой структурой множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (которая «задействована» в определении барицентра вероятностной меры). Это свойство (в контексте замкнутых полных метризуемых ограниченных подмножеств произвольного локально-выпуклого пространства) изучено в [18], где оно названо свойством μ-компактности. Показано, что μ-компактные выпуклые множества (в частности множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$) обладают многими известными свойствами выпуклых компактов, в частности, для них имеют место теорема Шоке о барицентрическом разложении, теорема Вестерстрема–О'Брайена (см. [7]), утверждение о полунепрерывности снизу выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции и т. д.

Прямым следствием теоремы 3.1 является следующее утверждение о барицентрическом разложении [13, лемма 1].

Следствие 3.1. Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда любое состояние из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ является барицентром некоторой борелевской вероятностной меры с носителем, лежащим в $\mathcal{A}$. □

Для произвольного состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ множество $\mathcal{P}^f_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ плотно в $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ [19, лемма 1]. С помощью теоремы 3.1 этот простой результат можно усилить следующим образом [13, лемма 5].

Следствие 3.2. Для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и натурального k множество $\mathcal{P}^a_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ является плотным подмножеством множества $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$. □

Это утверждение означает, что любую вероятностную меру с носителем во множестве состояний ранга $\leqslant k$ можно аппроксимировать последовательностью атомических мер — счетных ансамблей состояний ранга $\leqslant k$ с тем же самым барицентром.

Важным следствием критерия компактности в теореме 3.1 является следующее утверждение [13, лемма 2А], в котором корректность определения функции $\check{f}_{\mathcal{A}}$ гарантируется следствием 3.1.

Следствие 3.3. Пусть f — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на замкнутом подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Выпуклая функция

$$\check{f}_{\mathcal{A}}(\rho) \doteq \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \int\limits_{\mathcal{A}} f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

полунепрерывна снизу на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$. Для любого состояния ρ из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ инфимум в определении величины $\check{f}_{\mathcal{A}}(\rho)$ достигается на некоторой мере из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$. $\square$

Известно, что для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ непрерывных функций на выпуклом компактном множестве $\mathcal{A}$, поточечно сходящейся к непрерывной функции f_0, соответствующая последовательность $\{\overline{\mathrm{co}}f_n\}$ сходится к функции $\overline{\mathrm{co}}f_0$.[1] Критерий компактности из теоремы 3.1 позволяет доказать аналогичное утверждение для некомпактного множества $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [20, предложение 6].

Следствие 3.4. Для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любой сходящейся последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет место неравенство

$$\liminf_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}f_n(\rho_n) \geqslant \overline{\mathrm{co}}f_0(\rho_0),$$

где $f_0 = \sup_n f_n$ и $\rho_0 = \lim_{n\to+\infty} \rho_n$.

В частности,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}f_n(\rho) = \overline{\mathrm{co}}f_0(\rho) \quad \forall\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}). \qquad \square$$

Замечание 3.1. Критерий компактности из теоремы 3.1 равносилен выполнимости последнего утверждения следствия 3.4 для любой последовательности $\{f_n\} \subset C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, сходящейся к функции $f_0 \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ [20].

IV. Открытость барицентрического отображения

Барицентрическое отображение

$$\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{4.1}$$

является непрерывной сюрьекцией [19]. В силу спектральной теоремы сюрьективными являются сужения этого отображения на множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ и $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Важное свойство барицентрического отображения представлено в следующей теореме (см. раздел 3 в [13]).

Теорема 4.2.

A) Барицентрическое отображение (4.1) и его сужение на множество $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ являются открытыми.

B) Сужения барицентрического отображения (4.1) на множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ и $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ являются открытыми при каждом $k \in \mathbb{N}$. $\square$

С физической точки зрения открытость отображения $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (соответственно отображения $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$) означает, что любое малое возмущение среднего состояния заданного непрерывного (соответственно дискретного) ансамбля квантовых состояний может быть осуществлено малыми возмущениями состояний этого ансамбля. В силу μ-компактной версии теоремы Вестерстрема–О'Брайена ([18, теорема 1]) это свойство равносильно выполнимости следующих утверждений:

- отображение $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \ni (\rho,\sigma) \mapsto \frac{1}{2}(\rho + \sigma) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ открыто;
- отображение $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ открыто;
- $\mathrm{co}\, f = \overline{\mathrm{co}}f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ для произвольной вогнутой функции $f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$;
- $\mathrm{co}\, f = \overline{\mathrm{co}}f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ для произвольной функции $f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

В соответствии с принятой в выпуклом анализе терминологией (см. [8, 11]) выполнимость первого из указанных выше утверждений называется свойством *устойчивости* множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Существенно, что первое утверждение теоремы 4.2 выводится из устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ без использования μ-компактности этого множества.

Второе утверждение теоремы 4.2 показывает, что любое малое возмущение среднего состояния заданного (дискретного или непрерывного) ансамбля может быть осуществлено соответствующими малыми возмущениями состояний этого ансамбля, *не увеличивающими максимальный ранг этих состояний*. Это свойство названо в [13] свойством *сильной устойчивости* множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Используя лемму 2B из [13], из теоремы 4.2 получаем следующие утверждения.

Следствие 4.5. Пусть $\mathcal{A}$ — это либо $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, либо $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть f — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве $\mathcal{A}$. Тогда вогнутая функция

$$\hat{f}_{\mathcal{A}}(\rho) \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \int\limits_{\mathcal{A}} f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Супремум в определении величины $\hat{f}_{\mathcal{A}}(\rho)$ можно брать по множеству $\mathcal{P}^f_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, и по множеству $\mathcal{P}^a_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} = \mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$. $\square$

Последнее утверждение следствия вытекает из полунепрерывности снизу функционала $\mu \mapsto \int_{\mathcal{A}} f(\sigma)\mu(d\sigma)$ с учетом леммы 1 из [19] в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и следствия 3.2 в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$. Это утверждение показывает, что

$$\hat{f}_{\mathcal{A}}(\rho) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\} \in \mathcal{P}^*_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \sum_i \pi_i f(\rho_i),$$

где $* = f$ в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $* = a$ в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$.

[1] Это следует из леммы Дини. Существенность условия компактности показывает последовательность функций $f_n(x) = \exp(-x^2/n)$ на $\mathbb{R}$, сходящаяся к функции $f_0(x) \equiv 1$, такая что $\overline{\mathrm{co}}f_n(x) \equiv 0$ для всех n.

V. Некоторые приложения

V.1. Об аппроксимации вогнутых и выпуклых полунепрерывных снизу функций

Хорошо известно, что любую полунепрерывную снизу ограниченную снизу функцию на метрическом пространстве $\mathcal{A}$ можно представить в виде поточечного предела возрастающей последовательности непрерывных ограниченных функций [2]. Теоремы 3.1 и 4.2 позволяют усилить это утверждение для случая $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ следующим образом.

Предложение 5.1. Любая вогнутая (соответственно выпуклая) полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является поточечным пределом неубывающей последовательности вогнутых (соответственно выпуклых) функций из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. $\square$

Доказательство. Пусть f — вогнутая полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $\{g_n\}$ — неубывающая последовательность функций из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, такая, что $f = \sup\limits_n g_n$. Пусть f_n — вогнутая оболочка функции g_n (т. е. $f_n = -\operatorname{co}(-g_n)$). В силу теорем 3.1 и 4.2 из обобщенной теоремы Вестерстрема–О'Брайена [18, теорема 1] следует, что последовательность $\{f_n\}$ лежит в $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Поскольку $g_n \leqslant f_n$, имеем $f = \sup\limits_n f_n$.

Пусть f — выпуклая полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $\{g_n\}$ — неубывающая последовательность функций из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, такая, что $f = \sup\limits_n g_n$. Пусть f_n — выпуклая оболочка функции g_n. В силу теорем 3.1 и 4.2 из обобщенной теоремы Вестерстрема–О'Брайена из [18, теорема 1] следует, что последовательность $\{f_n\}$ лежит в $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. В силу следствия 3.4 имеем $f = \sup\limits_n f_n$. $\blacksquare$

V.2. О некоторых результатах, связанных с порядком Шоке

На множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ рассмотрим частичный порядок Шоке, при котором $\mu \succ \nu$ означает, что

$$\int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\mu(d\sigma) \geqslant \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\nu(d\sigma) \qquad (5.2)$$

для любой выпуклой функции f из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Это отношение совпадает с некоторыми другими частичными порядками на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, в частности, с т. н. дилатационным порядком (the dilation ordering) [5, 9].

Прежде всего отметим очевидное следствие предложения 5.1 и теоремы о монотонной сходимости.

Лемма 5.1. Пусть μ и ν — такие меры из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, что $\mu \succ \nu$. Тогда неравенство (5.2) имеет место для любой выпуклой функция f на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, которая либо полунепрерывна снизу[2], либо полунепрерывна сверху и ограничена сверху. $\square$

Легко видеть (рассматривая аффинные непрерывные функции на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$), что из $\mu \succ \nu$ следует $\mathbf{b}(\mu) = \mathbf{b}(\nu)$.

Образно говоря, отношение $\mu \succ \nu$ означает, что «основной вес меры μ удален дальше от общего барицентра мер μ и ν, ближе подходя к множеству крайних точек» [1]. Заметим, что крайними точками множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ являются чистые состояния (состояния ранга 1) и что для произвольного подпространства $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ является *гранью* множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [16, 17]. Поэтому приведенная выше характеристика частичного порядка «$\succ$» подтверждается следующими утверждениями.

Предложение 5.2. Пусть μ и ν — меры из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, такие, что $\mu \succ \nu$. Тогда

- $\mu(\mathcal{A}) \geqslant \nu(\mathcal{A})$ для любого борелевского подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) = \operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$;
- $\mu(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)) \geqslant \nu(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0))$ для любого подпространства $\mathcal{H}_0$ пространства $\mathcal{H}$;
- $\mu(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})) \geqslant \nu(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ при каждом натуральном k.

$\square$

Доказательство. Первое утверждение предложения для замкнутого подмножества $\mathcal{A}$ следует из леммы 5.1, поскольку индикаторная функция этого подмножества выпукла и полунепрерывна сверху. Для завершения доказательства этого утверждения достаточно заметить, что любая мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ является мерой Радона [15].

Второе и третье утверждения также следуют из леммы 5.1, поскольку индикаторные функции подмножеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ и $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$ выпуклы и полунепрерывны сверху. $\blacksquare$

Мера μ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ называется *максимальной*, если из $\nu \succ \mu$ следует $\nu = \mu$ для любой меры ν из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Следствие 5.6. Множество максимальных мер в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ совпадает с $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$.

Для любой меры μ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ существует мера $\hat{\mu}$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$, такая, что $\hat{\mu} \succ \mu$. $\square$

Доказательство. Утверждения этого следствия можно вывести из общих результатов теории меры на выпуклых множествах [5, 9]. Однако мы покажем, что рассмотренные выше свойства множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ дают простой и *конструктивный* способ доказательства этих утверждений.

Пусть μ — произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$. В силу предложения 5.2 из отношения $\nu \succ \mu$ для некоторой меры ν из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ следует неравенство

[2]Любая выпуклая полунепрерывная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ либо ограничена снизу, либо не принимает конечных значений (см. лемму 2 в [20]).

$\nu(\mathcal{A}) \geqslant \mu(\mathcal{A})$ для произвольного борелевского множества $\mathcal{A}$ чистых состояний. Поскольку μ и ν — *вероятностные* меры и носитель μ принадлежит множеству всех чистых состояний, в приведенном выше неравенстве имеет место равенство, которое показывает, что $\mu = \nu$. Поэтому μ — максимальная мера в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Если μ — максимальная мера в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, то, в силу приведенной ниже конструкции, существует мера $\hat{\mu}$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$, такая, что $\hat{\mu} \succ \mu$ и, следовательно, $\mu = \hat{\mu}$.

Пусть μ — произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. В силу леммы 1 из [19] существует последовательность $\{\mu_n\}$ мер из $\mathcal{P}^f_{\{\mathbf{b}(\mu)\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, сходящаяся к мере μ. Раскладывая каждый атом меры μ_n в выпуклую комбинацию чистых состояний (это можно сделать в силу спектральной теоремы), получим меру $\hat{\mu}_n$ с тем же самым барицентром и носителем, лежащем во множестве чистых состояний. Ясно, что $\hat{\mu}_n \succ \mu_n$. В силу теоремы 3.1 последовательность $\{\hat{\mu}_n\}_{n>0}$ относительно компактна и, следовательно, содержит подпоследовательность $\{\hat{\mu}_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой мере $\hat{\mu}$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$. Поскольку $\hat{\mu}_{n_k} \succ \mu_{n_k}$ для всех k, из определения слабой сходимости следует, что $\hat{\mu} \succ \mu$. ■

V.3. О выпуклом замыкании и вогнутой оболочке полунепрерывной снизу функции

В этом разделе рассмотрены следствия теорем 3.1 и 4.2, связанные с понятиями выпуклой (вогнутой) оболочки и выпуклого замыкания функции, определенной на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Предложение 5.3. Пусть f — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

A) Функции

$$\check{f}(\rho) \doteq \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

$$\text{и}\quad \hat{f}(\rho) \doteq \sup_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

полунепрерывны снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

B) Для произвольного состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ инфимум в определении величины $\check{f}(\rho)$ достигается на некоторой мере μ^f_ρ из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Если f — вогнутая функция, то мера μ^f_ρ может быть выбрана в $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$.

C) Функция $\check{f}$ совпадает с выпуклым замыканием $\overline{\mathrm{co}}f$ функции f, а функция $\hat{f}$ — с вогнутой оболочкой[3] функции f, т. е.

$$\hat{f}(\rho) = \sup_{\{\pi_i\rho_i\}\in\mathcal{P}^f_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \sum_i \pi_i f(\rho_i),\ \forall\,\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).\quad\square$$

Доказательство. Утверждение A, первая часть утверждения B и вторая часть утверждения C непосредственно вытекают из следствий 3.3 и 4.5.

Если f — вогнутая функция, то из оптимальности меры μ^f_ρ следует, в силу леммы 5.1, оптимальность любой меры $\nu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$ такой, что $\nu \succ \mu^f_\rho$ (существование такой меры ν гарантируется следствием 5.6).

Поскольку выпуклая функция $\check{f}$ полунепрерывна снизу, из определения выпуклого замыкания следует, что $\check{f}(\rho) \leqslant \overline{\mathrm{co}}f(\rho)$ для всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Поскольку $\overline{\mathrm{co}}f$ — выпуклая полунепрерывная снизу функция, не превосходящая функцию f, из неравенства Йенсена следует, что

$$\overline{\mathrm{co}}f(\rho) \leqslant \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int \overline{\mathrm{co}}f(\sigma)\mu(d\sigma) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int f(\sigma)\mu(d\sigma) = \check{f}(\rho)$$

для всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Следовательно, $\check{f} = \overline{\mathrm{co}}f$. ■

Замечание 5.2. Аналоги утверждений B и второй части C предложения 5.3 не имеют места для функций $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно. Пример, показывающий, что супремум в определении величины $\hat{f}(\rho)$ может не достигаться даже для ограниченной полунепрерывной снизу функции, представлен в [14, замечание 1]. В качестве примера полунепрерывной снизу неотрицательной функции f, для которой $\mathrm{co}\,f \neq \overline{\mathrm{co}}f$ можно рассмотреть энтропию фон Неймана $H(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho$, поскольку $\overline{\mathrm{co}}H = \check{H} \equiv 0$ в силу спектральной теоремы, в то время как $\mathrm{co}\,H(\rho) = +\infty$ для любого состояния ρ, такого, что $H(\rho) = +\infty$, в силу выпуклости множества состояний с конечной энтропией [10].

Другие применения представленных в данной статье свойств множества вероятностных мер на пространстве квантовых состояний рассмотрены во второй части [14].

Литература

1. *Alfsen E.* Compact convex sets and boundary integrals. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag, 1971.

2. *Aliprantis C.D., Border K.C.* Infinite dimensional analysis. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag, 2006.

3. *Bennett C.H., DiVincenzo D.P., Smolin J.A., Wootters W.K.* Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction // Phys. Rev. A – 1996. – V. 54. – P. 3824–3851.

4. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. – New York-London-Sydney-Toronto: John Willey and Sons. Inc., 1968.

5. *Bourgin R.D.* Partial orderings for integral representations on convex sets with the Radon-Nikodiym property // Pacific J. Math. – 1979. – V. 81, N 1. – P. 29–44.

6. *Bratteli O., Robinson D.W.* Operators algebras and quantum statistical mechanics. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag, 1979, V. 1.

[3] минимальной вогнутой функцией, мажорирующей функцию f.

7. *O'Brien R.* On the openness of the barycentre map // Math. Ann. – 1976. – V. 223, N 3. – P. 207–212.

8. *Grzaslewicz R.* Extreme continuous function property // Acta. Math. Hungar. – 1997. – V. 74. – P. 93–99.

9. *Edgar G.A.* On the Radon-Nikodim property and martingale convergence // Lecture Notes in Mathematics. – 1978. – V. 645. – P. 62–76.

10. *Holevo A.S.* Statistical structure of quantum theory. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 2001.

11. *Papadopoulou S.* On the geometry of stable compact convex sets // Math. Ann. – 1977. – V. 229. – P. 193–200.

12. *Parthasarathy K.* Probability measures on metric spaces. – New York-London: Academic Press, 1967.

13. *Shirokov M.E.* Continuity of the von Neumann entropy // Commun. Math. Phys. – 2010. – V. 296, N 3. – P. 625–654.

14. *Shirokov M.E.* Properties of probability measures on the set of quantum states and their applications // arXiv:math-ph/0607019. – V. 3. – 2011.

15. *Богачев В.И.* Основы теории меры. – Москва-Ижевск: РХД, 2003.

16. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

17. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004.

18. *Протасов В.Ю., Широков М.Е.* Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения // Матем. сб. – 2009. – Т. 200, № 5. – С. 71–98.

19. *Холево А.С., Широков М.Е.* Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – Т. 50, № 1. – С. 98–114.

20. *Широков М.Е.* Свойства пространства квантовых состояний и монотонные характеристики сцепленности // Известия РАН. Серия математическая. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 189–224.

Поступила в редакцию 19.01.2011

Summaries of all articles

G.G. Amosov and A.I. Dnestryan

On the spectrum of a set of integral operators determining the symplectic quantum tomogram

In this paper, we find eigenfunctions and eigenvalues of a set of integral operators determining the symplectic quantum tomogram. It is shown that given certain parameters, the studied operators define the fractional Fourier transform. The variances for canonical observables associated with spectrum states are calculated.

Keywords: symplectic quantum tomogram, fractional Fourier transform, spectrum of an integral operator.

M.V. Balashov

On moduli of convexity of a set and function

We consider a relationship between uniformly convex sets and functions in a Banach space. We prove that the level sets of a uniformly convex function are uniformly convex sets. We prove that the boundary of a uniformly convex set is the graph of a uniformly convex function. The estimates for the moduli of convexity are obtained.

Keywords: modulus of convexity, uniformly convex function, uniformly convex set.

A.A. Belolipetskiy and A.A. Ter-Krikorov

Solution of a singular perturbed boundary initial problem for a linear parabolic equation

A singular perturbed boundary initial problem for a linear parabolic equation is investigated. Approximations are constructed for small parameter values. We prove the existence and uniqueness theorem for solutions for which approximations are asymptotic. Such problems are of importance for laser targets technology in the thermonuclear synthesis problem.

Keywords: parabolic equation, singular perturbation, boundary layer solution, laser target.

O.V. Besov

Sobolev's embedding theorem for anisotropically irregular domains

We prove a Sobolev-type embedding theorem, viz. an embedding of the Sobolev space $W_p^s(G)$ in the Lebesgue space $L_q(G)$, for anisotropically irregular domains $G \subset \mathbb{R}^n$ of various classes.

Keywords: Sobolev space, embedding theorem, irregular domain, anisotropy.

A.I. Besportochnyy

Asymptotic regimes of the hydrodynamic contact of rigid cylinders having thin elastic coating

A one-dimensional lubricating fluid flow in a thin layer separating a cylinder with an elastic coating and rigid half-space is considered. The fluid viscosity depends on pressure. The lubricant film thickness and pressure distribution within the contact aria are investigated. Different asymptotic lubrication regimes are examined. The ranges of applicability of a number of formulas for calculating the film thickness are suggested.

Keywords: lubrication, hydrodynamic contact, elastic coating, qualitative analysis, asymptotic regimes.

S.B. Gashkov and A.A. Burtsev

On hardware and software implementation of arithmetic in finite fields of characteristic 7 for pairing calculation

We study scheme (hardware) and program (software) methods for multiplying polynomials over fields of characteristic 7 in order to apply them to cryptographic protocols on elliptic curves based on parings. We consider hardware and software implementations of arithmetic in $GF(7)$, $GF(7^2)$, $GF(7^n)$, $GF(7^{7n})$, and $GF(7^{14n})$ and estimate the complexity of corresponding schemes and programs.

Keywords: schemes for arithmetic in finite fields, cryptographic reports.

A.K. Volosova

On the theory of nonlinear diffusion and heat conductivity

It is shown that a wide class of equations in partial derivatives is equivalent to a system of functional linear algebraic equations. It permits us to construct exact and approximate solutions and determine the solution character of evolution with respect to "limit attracting solution" according to the eigenvalues of a matrix corresponding to the equation under study. We propose an alternative classification for PDE solutions on eigenvalues.

Keywords: transformation of variables, eigenvalues, classification for PDE solutions.

B.I. Golubov and S.S. Volosivets

Generalized weighted integrability of the multiplicative Fourier transform

The multiplicative Fourier transform introduced by N.Ya. Vilenkin is defined by the sequence of natural numbers $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $p_n \geqslant 2$. In the case $p_n \equiv 2$, it coincides with the known Walsh transform having numerous applications in numerical analysis and coding theory. The sufficient conditions on functions providing the weighted integrability of their multiplicative Fourier transforms on $\mathbb{R}_+$ are obtained for a bounded sequence $\mathbf{P}$. Some of them are sharp. Multiplicative counterparts of Hardy–Littlewood, Zygmund, Moricz, Onneweer, M. Izumi–S. Izumi and Aljancic–Tomic theorems are proved.

Keywords: multiplicative Fourier transform, multiplicative convolution, weighted integrability, function of bounded s-fluctuation, Lipschitz classes, monotone function.

N.A. Gusev

Asymptotic properties of linearized equations of low compressible fluid motion

The initial boundary value problem for linearized equations of a viscous barotropic low compressible fluid in a bounded domain is considered. Convergence of solutions to this problem to the corresponding incompressible limit is studied. The sufficient conditions for the convergence to be weak and strong are given.

Keywords: linearized equations of compressible fluid, compressibility factor, low compressible fluid.

P.E. Dvurechensky and G.E. Ivanov

Optimal strategy algorithm in a nonlinear differential game using convolution

We develop a method for computing quasioptimal strategies in a nonlinear differential game on a fixed time interval with a goal set. In the two-dimensional case, the play-attainable sets are calculated by an algorithm similar to that for convolution of Minkowski's sum of two polygons. We give in detail the error estimates of the algorithm.

Keywords: differential game, optimal strategy algorithm.

N.O. Ermilov

Tetrahedrons with the same suite of length ribbings and volume inscribed into the same sphere

The recovering of a tetrahedron on the specified length ribbings depends on the allocation of the length ribbings. In the capacity of the tetrahedron length ribbings, other characteristics such as volume and the radius of a circumscribed sphere can define the tetrahedron. But there is an example of the tetrahedron defined ambiguously by these eight parameters.

Keywords: tetrahedron, suite of the length ribbings, volume, radios of a circumscribed sphere.

G.E. Ivanov and G.M. Ivanov

Relationship between supporting conditions in Banach spaces

We consider two classes of weakly convex sets in a Banach space. The classes are characterized by N-supporting and P-supporting conditions, respectively. We prove that the two classes coincide provided that the Banach space is uniformly convex. The proof is based on the theorem of the smooth equivalent renorm of a uniformly convex Banach space.

Keywords: supporting condition, weak convexity.

V.M. Ipatova

Attractors of finite difference schemes for the Lorenz system with time dependent coefficients

The explicit and implicit finite difference schemes for the Lorenz system with time dependent coefficients are considered. For each of these schemes the existence of its uniform attractor is established. It is shown that with the decrease of a time step the attractors of schemes become closer to the genuine attractor of the system.

Keywords: attractor, nonautonomous system, finite difference scheme.

V.V. Maksimenko and L.Yu. Kupriyanov and V.A. Zagaynov and A.A. Hasanov

Self-organization elements in gas diffusion inside a system of nanogeterogeneities

The ideal gas diffusion in a system of small spherical heterogeneities is considered. It can be a collective of particles or a system of small spherical cavities in some homogeneous medium. The effective diffusion coefficient is calculated using the methods of multiple scattering theory. Contribution to the diffusion of multiple passing closed loops on a molecule trajectory is considered. Interest in such loops is associated with the constructive interference of amplitudes of two alternative ways of the loop passing (clockwise and counterclockwise). This interference always exists irrespective of medium disorder. It is shown that interference corrections to classical diffusion reduce to the appearance of low frequency macroscopic oscillations of gas concentration and the total diffusion stopping. The latter resembles the Anderson localization of an electron in the system of impurities inside an ideal lattice.

Keywords: diffusion, nanogeterogeneities, oscillations, localization.

N.A. Markitantova and A.P. Chernyaev

Nonlinear filtration to a horizontal well in the case of special nonlinearity

The model of stationary incompressible fluid filtration for the special nonlinear flow to a horizontal nonsymmetrical well is considered. The hodograph plane map is used. The equation in hodograph plane variables may be reduced to Laplace's equation.

Keywords: stationary filtration, nonlinear filtration flow, incompressible liquid, nonsymmetric well.

G.I. Marchuk and V.I. Agoshkov and V.M. Ipatova

Theory of solvability of initial-boundary value problems and data assimilation problems for the primitive equations of the ocean

This paper is a review of progress in the solvability analysis of initial boundary value problems and data assimilation problems for the primitive equations of the ocean. The historical sketch and the description of the earliest results are given. The existence of weak solutions and the solvability of data assimilation problems for the primitive equations with a free surface condition on the upper boundary are studied. The existence and uniqueness theorems for a strong solution to the simplified system of primitive equations are considered.

Keywords: partial differential equations, ocean dynamics models, solvability, inverse and variational problems, data assimilation problems.

M.N. Matveev

Invisible facets and face polytopes

The notion of a polytopally complete fan is well-known, viz. any cone of a fan is the conical hull of a polytope facet. The paper generalizes this notion to incomplete fans. The key feature of this generalization is that the definition of a polytopally incomplete fan uses the notion of a polytoplly invisible facet. A criterion for an unnecessarily complete fan to be polytopal is proved. An application of the criterion is shown.

Keywords: polytopes, cones, fans, polytope facets, systems of linear equations and inequalities.

Yu.N. Orlov

Asymptotic diagonalization of polynomial quantum Hamiltonians

The method of asymptotic diagonalization of polynomial quantum Hamiltonians for large numbers in terms of the second quantization approach is described. The asymptotic spectrum distribution function and the corresponding system of special polynomials as Hamiltonian eigenfunctions are constructed.

Keywords: quantum Hamiltonian, conservation laws, spectrum asymptotic, special polynomials.

O.K. Podlipsky

On methods of expert knowledge bases for development of applied consulting and training systems

Methods for constructing expert knowledge bases for development of applied consulting and training systems proposed by a group of experts are studied. The formal model of the expert in malignant glomerulonephritis is constructed.

Keywords: decision-making theory, expert knowledge base.

E.S. Polovinkin

Riemannian integrability of set-valued maps

In this paper, we obtain new results for the Riemannian integration on a segment of set-valued maps with nonconvex compact values belonging to uniformly smooth Banach spaces. We prove the convexity of these Riemann integrals and obtain the common properties of Riemann integrals. We find the necessary and sufficient condition for Riemannian integrability of a nonconvex set-valued map belonging to a separable uniformly smooth Banach space. This condition is the almost everywhere continuity of a convex hull of map values.

Keywords: Minkowski sum of sets, Hausdorff metric, Riemann integral of set-valued map, uniformly smooth Banach space, necessary and sufficient condition of Riemannian integrability.

O.A. Pyrkova and A.A. Onufriev and A.T. Onufriev

Initial time behavior of the velocity in a homogeneous and isotropic turbulent flow

In this paper, the initial time behavior of the velocity in a homogeneous and isotropic turbulent flow is considered, with account taken of an intermitting flow phenomenon. The flow is considered as a mixture of turbulent and viscous regimes. For both regimes there are Loitsansky invariants and Kolmogorov (turbulent regime) and Millionschikov's (viscous regime) similarities. Velocity decays coincide with experimental data at initial time.

Keywords: homogeneous and isotropic turbulent flow, homogeneous and isotropic turbulent flow, velocity decays.

V.Zh. Sakbaev

On the regularization of a degenerate Schrödinger operator and the minimizaton of a seminorms set

The Cauchy problem for the Shrödinger equation with degenerate Hamiltonian is studied. The Hamiltonian is a second- order linear differential operator of nonnegative characteristic form. We obtain the necessary and sufficient conditions for well-posedness of the Cauchy problem. In the case of ill-posedness, we use the elliptic regularization method and the quazisolution method for studying the Cauchy problem. We establish the following correspondence between these methods: any sequence of regularized solutions and any minimizing sequence of the set of deviation seminorms have a unique limit.

Keywords: operator of nonnegative characteristic form, elliptic regularization, quazisolution.

V.B. Trushin

Existence of solutions of some variational inequalities

The paper deals with the solvability conditions for noncoercive variational inequalities.

Keywords: monotonicity, pseudomonotonicity, variational inequality, coercivity.

A.I. Tyulenev

Description of the traces of weight Sobolev spaces

In this paper, we derive the generalization of the weight Sobolev space Gagliardo's theorem on the description of the traces of Sobolev spaces $W_p^1(Q)$. Here Q is a square (cube) and the trace is considered on the fixed side (face) of this square (cube). If the domain studied is a square, we consider the weight function monotonically dependent on the distance to the fixed side of the square. If the domain is a cube, we consider the weight function monotonically decreasing on some variables, with others fixed, and monotonically increasing on the remainder variables, with others fixed.

Keywords: Sobolev space, weight function.

E.A. Umnov and A.E. Umnov

Parametric linearization method using penalty functions with everywhere invertable derivation

An approach to parametric primal-dual linear programming problems is considered. The approach is based on the smooth penalty function method. A be-level optimization scheme is given. The suggested method is demonstrated for a set of test problems.

Keywords: mathematical programming, be-level optimization, penalty function method, primal-dual linear programming problems.

A.A. Fonarev

Functional minimization on the convex set of a normed space

The functional minimization on the convex set of a real normed space in the absence of the reexivity of space and the coercivity of the functional is investigated. A relaxational sequence is constructed using the iterative process. This sequence minimizes the functional in the presence of the convexity of the functional.

Keywords: functional, minimization, iterative process.

A.P. Chernyaev

Nonlinear filtration for the special and degree laws of the resistance medium

The general kind of incompressible liquid filtration fluids are considered. The hodograph plane equations obtained from the physical plane fluids are linearized. They are reduced to Laplace's equation according to the special filtration law and to the known equations according to the degree filtration law. An example of fluid to a horizontal well shows the solvability of the initial problem in the comfortable conditions for numerical and quality investigations.

Keywords: filtration, filtration fluids, incompressible liquid, physical plane, hodograph, horizontal well, resistance medium.

M.E. Shirokov

On properties of probability measures on the set of quantum states

Two properties of the set of probability measures on the space of quantum states endowed with weak convergence topology are considered. Their corollaries related to the particular functional constructions used in the convex analysis and their applications are discussed.

Keywords: quantum state, probability measure, barycenter map, convex hull and convex closure of a function.

Сведения об авторах статей

(на момент подачи статьи)

О спектре семейства интегральных операторов, определяющих симплектическую квантовую томограмму
Амосов Григорий Геннадьевич (д.ф.-м.н., доц., вед.н.с.) gramos@mi.ras.ru
Днестрян Андрей Игоревич (студ.) dnestor@inbox.ru

О модулях выпуклости функции и множества
Балашов Максим Викторович (к.ф.-м.н., доц.) balashov73@mail.ru

О решении одной сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения
Белолипецкий Александр Алексеевич (д.ф.-м.н., проф.) belol@ccas.ru
Тер-Крикоров Александр Мартынович (д.ф.-м.н., проф.) ter-krikorov@mail.ru

Теорема вложения Соболева для анизотропно нерегулярных областей
Бесов Олег Владимирович (чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф.) besov@mi.ras.ru

Асимптотические режимы гидродинамического контакта цилиндров, покрытых тонкими упругими слоями
Беспорточный Александр Иванович (ст. преп.) Aleksandr787@yandex.ru

О схемной реализации арифметики в конечных полях характеристики 7 для вычисления спариваний
Гашков Сергей Борисович (д.ф.-м.н., проф.)
Бурцев Алексей Анатольевич (к.ф.-м.н., асс.) a-burtsev@yandex.ru

К теории нелинейной диффузии и теплопроводности
Волосова Александра Константиновна (асп.) volosovaak@yandex.ru

Обобщенная весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье
Голубов Борис Иванович (д.ф.-м.н., проф.) golubov@mail.mipt.ru
Волосивец Сергей Сергеевич (к.ф.-м.н., доц.) volosivetsss@mail.ru

Асимптотические свойства решений линеаризованных уравнений движения слабо сжимаемой среды
Гусев Николай Анатольевич (асп., асс.) n.a.gusev@gmail.com

Алгоритм построения оптимальной стратегии в нелинейной дифференциальной игре с использованием конволюты
Двуреченский Павел Евгеньевич (асп., н.с.) pavel.dvurechensky@gmail.com
Иванов Григорий Евгеньевич (д.ф.-м.н., проф.) givanov@mail.mipt.ru

Тетраэдры с одинаковым набором длин рёбер и объёмом, вписанные в одну сферу
Ермилов Николай Олегович (асп.) nermilov@mail.ru

Взаимосвязь опорных условий слабой выпуклости для множеств в банаховых пространствах
Иванов Григорий Евгеньевич (д.ф.-м.н., проф.) givanov@mail.mipt.ru
Иванов Григорий Михайлович (студ. 5 к., инж. 1 кат.) grimivanov@gmail.com

Аттракторы конечно-разностных схем для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами
Ипатова Валентина Михайловна (к.ф.-м.н., доц.) ipatval@mail.ru

Элементы самоорганизации при диффузии газа в системе нанонеоднородностей
Максименко Владимир Викторович (к.ф.-м.н., доц.) wmaksim@mail.ru
Куприянов Леонид Юрьевич (к.ф.-м.н., доц.) lkupr@nifhi.ru
Загайнов Валерий Анатольевич (к.ф.-м.н., зав. лаб.) vzagaynov@yandex.ru
Хасанов Адам Агзамович (к.ф.-м.н., доц.) hasadam1@rambler.ru

Нелинейная фильтрация к горизонтальной скважине в произвольной точке пласта в случае специальной нелинейности
Маркитантова Наталья Александровна (асп.) markitantova_n@mail.ru
Черняев Александр Петрович (д.ф.-м.н., проф.) chernyaev49@yandex.ru

Теория разрешимости начально-краевых задач и задач ассимиляции данных для основных уравнений океана
Марчук Гурий Иванович (акад. РАН, д.ф.-м.н., проф., г.н.с.) guri@inm.ras.ru
Агошков Валерий Иванович (д.ф.-м.н., проф., г.н.с.) agoskov@inm.ras.ru
Ипатова Валентина Михайловна (к.ф.-м.н., доц.) ipatval@mail.ru

Невидимые гиперграни и порождающие многогранники
Матвеев Михаил Николаевич (к.ф.-м.н., доц.) miklem@mail.mipt.ru

Асимптотическая диагонализация полиномиальных квантовых гамильтонианов
Орлов Юрий Николаевич (д.ф.-м.н., доц.) ov3159f@yandex.ru

О методах выявления экспертного знания для создания прикладных консультационных и обучающих систем
Подлипский Олег Константинович (к.ф.-м.н., доц.) ok_podlipsky@yahoo.com

Интегрирование по Риману многозначных отображений
Половинкин Евгений Сергеевич (д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой) polovinkin@mail.mipt.ru

Поведение скорости в однородном изотропном турбулентном потоке на начальном этапе
Пыркова Ольга Анатольевна (к.ф.-м.н., доц., с.н.с.) opyr@mail.ru
Онуфриев Александр Анатольевич (кафедра информатики, ст. преп.) onfr@mail.ru
Онуфриев Анатолий Тимофеевич (д.ф.-м.н., проф., вед.н.с.)

Регуляризация вырожденного оператора Шредингера и минимизация семейства полунорм
Сакбаев Всеволод Жанович (д.ф.-м.н., доц.) fumi2003@mail.ru

Существование решений некоторых вариационных неравенств
Трушин Виктор Борисович (к.ф.-м.н., доц.) trushinvb@mail.ru

Характеризация следов весовых пространств Соболева
Тюленев Александр Иванович (студ. 6 к.) Tyulenev-math@yandex.ru

Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач
Умнов Егор Александрович (к.ф.-м.н., асс.) mail@umnov.ru
Умнов Александр Евгеньевич (д.т.н., проф.) mail@umnov.ru

О минимизации функционала на выпуклом множестве нормированного пространства
Фонарёв Анатолий Афанасьевич (к.ф.-м.н., доц.) fonanat@mail.nkosino.ru

Нелинейная фильтрация для специального и степенного законов сопротивления среды
Черняев Александр Петрович (д.ф.-м.н., проф.) chernyaev49@yandex.ru

О свойствах вероятностных мер на множестве квантовых состояний
Широков Максим Евгеньевич (д.ф.-м.н., доц.) msh@mi.ras.ru

Ссылки на опубликованные статьи

(в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008)

Амосов Г.Г., Днестрян А.И. О спектре семейства интегральных операторов, определяющих симплектическую квантовую томограмму // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 5–9.

Amosov G.G., Dnestryan A.I. On the spectrum of a set of integral operators determining the symplectic quantum tomogram // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 5–9.

Балашов М.В. О модулях выпуклости функции и множества // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 10–13.

Balashov M.V. On moduli of convexity of a set and function // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 10–13.

Белолипецкий А.А., Тер-Крикоров А.М. О решении одной сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 14–17.

Belolipetskiy A.A., Ter-Krikorov A.A. Solution of a singular perturbed boundary initial problem for a linear parabolic equation // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 14–17.

Бесов О.В. Теорема вложения Соболева для анизотропно нерегулярных областей // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 18–27.

Besov O.V. Sobolev's embedding theorem for anisotropically irregular domains // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 18–27.

Беспорточный А.И. Асимптотические режимы гидродинамического контакта цилиндров, покрытых тонкими упругими слоями // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 28–34.

Besportochnyy A.I. Asymptotic regimes of the hydrodynamic contact of rigid cylinders having thin elastic coating // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 28–34.

Бурцев А.А., Гашков С.Б. О схемной реализации арифметики в конечных полях характеристики 7 для вычисления спариваний // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 35–40.

Gashkov S.B., Burtsev A.A. On hardware and software implementation of arithmetic in finite fields of characteristic 7 for pairing calculation // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 35–40.

Волосова А.К. К теории нелинейной диффузии и теплопроводности // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 41–48.

Volosova A.K. On the theory of nonlinear diffusion and heat conductivity // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 41–48.

Голубов Б.И., Волосивец С.С. Обобщенная весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 49–56.

Golubov B.I., Volosivets S.S. Generalized weighted integrability of the multiplicative Fourier transform // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 49–56.

Гусев Н.А. Асимптотические свойства решений линеаризованных уравнений движения слабо сжимаемой среды // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 57–60.

Gusev N.A. Asymptotic properties of linearized equations of low compressible fluid motion // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 57–60.

Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е. Алгоритм построения оптимальной стратегии в нелинейной дифференциальной игре с использованием конволюты // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 61–67.

Dvurechensky P.E., Ivanov G.E. Optimal strategy algorithm in a nonlinear differential game using convolution // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 61–67.

Ермилов Н.О. Тетраэдры с одинаковым набором длин рёбер и объёмом, вписанные в одну сферу // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 68–69.

Ermilov N.O. Tetrahedrons with the same suite of length ribbings and volume inscribed into the same sphere // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 68–69.

Иванов Г.Е., Иванов Г.М. Взаимосвязь опорных условий слабой выпуклости для множеств в банаховых пространствах // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 70–73.

Ivanov G.E., Ivanov G.M. Relationship between supporting conditions in Banach spaces // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 70–73.

Ипатова В.М. Аттракторы конечно-разностных схем для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 74–80.

Ipatova V.M. Attractors of finite difference schemes for the Lorenz system with time dependent coefficients // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 74–80.

Максименко В.В., Куприянов Л.Ю., Загайнов В.А., Хасанов А.А. Элементы самоорганизации при диффузии газа в системе нанонеоднородностей // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 81–87.

Maksimenko V.V., Kupriyanov L.Yu., Zagaynov V.A., Hasanov A.A. Self-organization elements in gas diffusion inside a system of nanogeterogeneities // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 81–87.

Маркитантова Н.А., Черняев А.П. Нелинейная фильтрация к горизонтальной скважине в произвольной точке пласта в случае специальной нелинейности // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 88–92.

Markitantova N.A., Chernyaev A.P. Nonlinear filtration to a horizontal well in the case of special nonlinearity // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 88–92.

Марчук Г.И., Агошков В.И., Ипатова В.М. Теория разрешимости начально-краевых задач и задач ассимиляции данных для основных уравнений океана // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 93–101.

Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Ipatova V.M. Theory of solvability of initial-boundary value problems and data assimilation problems for the primitive equations of the ocean // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 93–101.

Матвеев М.Н. Невидимые гиперграни и порождающие многогранники // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 102–106.

Matveev M.N. Invisible facets and face polytopes // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 102–106.

Орлов Ю.Н. Асимптотическая диагонализация полиномиальных квантовых гамильтонианов // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 107–111.

Orlov Yu.N. Asymptotic diagonalization of polynomial quantum Hamiltonians // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 107–111.

Подлипский О.К. О методах выявления экспертного знания для создания прикладных консультационных и обучающих систем // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 112–116.

Podlipsky O.K. On methods of expert knowledge bases for development of applied consulting and training systems // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 112–116.

Половинкин Е.С. Интегрирование по Риману многозначных отображений // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 117–126.

Polovinkin E.S. Riemannian integrability of set-valued maps // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 117–126.

Пыркова О.А., Онуфриев А.А., Онуфриев А.Т. Поведение скорости в однородном изотропном турбулентном потоке на начальном этапе // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 127–131.

Pyrkova O.A., Onufriev A.A., Onufriev A.T. Initial time behavior of the velocity in a homogeneous and isotropic turbulent flow // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 127–131.

Сакбаев В.Ж. Регуляризация вырожденного оператора Шредингера и минимизация семейства полунорм // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 132–138.

Sakbaev V.Zh. On the regularization of a degenerate Schrödinger operator and the minimizaton of a seminorms set // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 132–138.

Трушин В.Б. Существование решений некоторых вариационных неравенств // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 139–140.

Trushin V.B. Existence of solutions of some variational inequalities // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 139–140.

Тюленев А.И. Характеризация следов весовых пространств Соболева // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 141–145.

Tyulenev A.I. Description of the traces of weight Sobolev spaces // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 141–145.

Умнов Е.А., Умнов А.Е. Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 146–152.

Umnov E.A., Umnov A.E. Parametric linearization method using penalty functions with everywhere invertable derivation // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 146–152.

Фонарёв А.А. О минимизации функционала на выпуклом множестве нормированного пространства // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 153–155.

Fonarev A.A. Functional minimization on the convex set of a normed space // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 153–155.

Черняев А.П. Нелинейная фильтрация для специального и степенного законов сопротивления среды // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 156–161.

Chernyaev A.P. Nonlinear filtration for the special and degree laws of the resistance medium // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 156–161.

Широков М.Е. О свойствах вероятностных мер на множестве квантовых состояний // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 162–167.

Shirokov M.E. On properties of probability measures on the set of quantum states // Proceedings of MIPT. – 2011. – V. 3, N. 1. – P. 162–167.

Содержание