Математические заметки

том 70 выпуск 5 ноябрь 2001

УДК 517

РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ ФАКТОРОВ НЕЙМАНА

Г. Г. Амосов, А. В. Булинский, М. Е. Широков

Изучается класс E_0-полугрупп эндоморфизмов фактора фон Неймана $\mathscr{M}$, с каждой из которых могут быть ассоциированы e_0-полугруппа эндоморфизмов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ – пространство стандартного представления $\mathscr{M}$, и система-произведение гильбертовых пространств.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Теория полугрупп эндоморфизмов фактора $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, возникшая в середине 80-х годов как обобщение теории изометрических полугрупп и симметрических операторов в гильбертовом пространстве, получила значительное развитие в последнее десятилетие благодаря работам Р. Пауэрса, У. Арвесона, Дж. Прайса, Р. Бхата, многих других исследователей (см., например, [1], [2] и цитированную там литературу). Представляет интерес развитие подобной теории для общих алгебр фон Неймана $\mathscr{R}$, в первую очередь, для факторов (алгебр с тривиальным центром: $\mathscr{R}\cap\mathscr{R}' = \mathbb{C}I$). Возможность распространения элементов этой теории для определенных полугрупп на гиперфинитных факторах рассматривалась нами в [3]. Подход был основан на естественном продолжении исходной "квазисвободной" полугруппы эндоморфизмов с подфактора на соответствующую алгебру $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. В данной работе мы расширяем рамки такого подхода, отправляясь от произвольного фактора фон Неймана $\mathscr{M}$ в стандартной форме в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (см. [4], [5]) и от произвольной E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ эндоморфизмов $\mathscr{M}$. Напомним, что E_0-*полугруппой* алгебры фон Неймана $\mathscr{R}$ называется семейство $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ ее нормальных $*$-эндоморфизмов со свойствами:

1. $\alpha_0 = Id, \alpha_t\circ\alpha_s = \alpha_{t+s}\ \forall t,s\geqslant 0$;
2. функция $t\mapsto \omega(\alpha_t(A))$ непрерывна на $[0,+\infty)$ $\forall\omega\in\mathscr{R}_*$, $\forall A\in\mathscr{R}$ (σ-слабая непрерывность);
3. $\alpha_t(I) = I\ \forall t\geqslant 0$ (унитальность, или консервативность).

При отказе от свойства 3 говорят о e_0-*полугруппе* алгебры $\mathscr{R}$ (см. [2]).

Модулярная инволюция J определяет антилинейный изоморфизм $j(\cdot) = J(\cdot)J$ из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{M}'$, который "отражает" E_0-полугруппу $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ в E_0-полугруппу

$$\{\beta_t = j\circ\alpha_t\circ j^{-1}\}_{t\geqslant 0}$$

на коммутанте $\mathscr{M}'$. В [3] было введено понятие регулярного расширения полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ как такой E_0-полугруппы $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ эндоморфизмов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, что

$$\theta_t(A) = \alpha_t(A),\quad \theta_t(B) = \beta_t(B)\qquad \forall A\in M,\quad \forall B\in M',\quad \forall t\geqslant 0.$$

В силу слабой плотности в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ $*$-алгебры, порожденной факторами $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$, регулярное расширение однозначно определяется полугруппой $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$, а для существования такого расширения $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $t>0$ (а значит и при всех $t\geqslant 0$) алгебра фон Неймана, порожденная факторами $\alpha_t(\mathscr{M})$ и $\beta_t(\mathscr{M}')$, являлась фактором. Вопрос о том, будет ли фактором пересечение или "объединение" двух факторов, восходит еще к фон Нейману, который показал, что это заведомо имеет место для факторов типа I. Таким образом, регулярное расширение всегда существует, если $\mathscr{M}$ – фактор типа I. Однако регулярное расширение может существовать и для полугрупп эндоморфизмов на факторах типа II и III. В работе [3] явно построено регулярное расширение для квазисвободных E_0-полугрупп на гиперфинитных факторах типа II_1 и III_λ, $0<\lambda<1$, порожденных представлениями C^*-алгебры канонических антикоммутационных соотношений (КАС).

Ниже рассматривается замкнутый относительно коциклических возмущений класс полугрупп на факторе $\mathscr{M}$ произвольного типа, названных *регулярными*, для которых существует "обобщенное решение" задачи о регулярном расширении. Именно, в разделе 3 показано, что с каждой регулярной полугруппой $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ может быть связана определенная e_0-полугруппа эндоморфизмов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, которая совпадает с регулярным расширением, если такое расширение существует. Возникающая e_0-полугруппа $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ названа *регулярным квазирасширением* на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ исходной E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Предварительно в разделе 2 изучается случай отдельного эндоморфизма и для него вводится понятие *регулярности* и *регулярного квазирасширения* на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Исследование существования регулярного расширения на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ тесно связано с изучением семейства $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ гильбертовых пространств, где при каждом $t\geqslant 0$

$$\mathscr{E}_\alpha(t)=\{X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})\colon XA=\alpha_t(A)X\ \ \forall A\in\mathscr{M},\qquad XB=\beta_t(B)X\ \ \forall B\in\mathscr{M}'\},\tag{1}$$

а скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathscr{E}_\alpha(t)}$ определяется равенством $X^*Y=\langle X,Y\rangle_{\mathscr{E}_\alpha(t)}I$ $\forall X,Y\in\mathscr{E}_\alpha(t)$.

Необходимым условием существования регулярного расширения $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ является наличие у семейства $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ свойства системы-произведения (СП) гильбертовых пространств с операторным умножением в качестве тензорного произведения "слоев". Тогда данная СП является ассоциированной по Арвесону с E_0-полугруппой эндоморфизмов $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ [6]. Подробный анализ СП гильбертовых пространств в связи с теорией индекса E_0-полугрупп $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ проведен в фундаментальной работе [6]. Наиболее полные результаты относятся к случаю полугрупп, вполне пространственных по терминологии Пауэрса. Некоторые обобщения можно найти в работе Бхата [7]. Мы вынуждены опустить соответствующие точные определения, адресуя читателя к литературе. Отметим только, что СП $\{\mathscr{E}(t)\}_{t\geqslant 0}$ (введенная как непрерывный аналог фоковского пространства) состоит из гильбертовых пространств – "слоев" $\mathscr{E}(t)$, при тензорном умножении которых выполняется соотношение $\mathscr{E}(t)\otimes\mathscr{E}(s)\cong\mathscr{E}(t+s)$ $\forall t,s\geqslant 0$.

В нашей работе установлено необходимое и достаточное условие, при котором семейство $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ является СП гильбертовых пространств. В разделе 3 также показано, что при каждом $t\geqslant 0$ в пространстве $\mathscr{E}_\alpha(t)$ существует наибольшее нетривиальное подпространство $\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)$ такое, что семейство $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ является СП. В разделе 4 показана устойчивость рассматриваемых объектов по отношению к коциклическим возмущениям полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Ситуация проиллюстрирована в разделе 5 на более общем, чем в [3], примере квазисвободных эндоморфизмов алгебры КАС.

Используются следующие обозначения, в основном соответствующие [5]: I – единичный оператор в $\mathscr{H}$, $\mathrm{End}(\mathscr{R})$ – множество всех нормальных $*$-эндоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathscr{R}$, т.е. $\sigma(\mathscr{R},\mathscr{R}_*)$-непрерывных $*$-морфизмов из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_*$ – преддвойственное пространство нормальных линейных функционалов на $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_+$ – положительный конус в $\mathscr{R}$. Если $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ алгебры фон Неймана в $\mathscr{H}$, то $\mathscr{R}_1 \wedge \mathscr{R}_2 \equiv \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$. Под $\mathscr{R}_1 \vee \mathscr{R}_2$ будем понимать не алгебру фон Неймана, а $*$-алгебру, ими порожденную, и ее слабое замыкание будем обозначать $[\mathscr{R}_1 \vee \mathscr{R}_2]^-$. Символ $\mathscr{R}_1 \overline{\otimes} \mathscr{R}_2$ обозначает алгебру фон Неймана, порожденную (алгебраическим) тензорным произведением $\mathscr{R}_1 \otimes \mathscr{R}_2$. Символ $(\,\cdot\,)|_{\mathscr{K}}$ будет, как обычно, обозначать сужение оператора или алгебры на подпространство $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$. Для ортогональных проекторов P и Q в $\mathscr{H}$ верхнюю и нижнюю грань обозначаем $P \vee Q$ и $P \wedge Q$ соответственно. Аналогичные символы используются и для соответствующих подпространств в $\mathscr{H}$: $(P \vee Q)\mathscr{H} = P\mathscr{H} \vee Q\mathscr{H}$, $(P \wedge Q)\mathscr{H} = P\mathscr{H} \wedge Q\mathscr{H}$.

2. Случай одного эндоморфизма. Пусть α – эндоморфизм фактора $\mathscr{M}$, стандартно реализованного в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, Ω – некоторый бициклический для $\mathscr{M}$ вектор и $J = J_\Omega$ – ассоциированная с Ω модулярная инволюция. Полагая $j(\,\cdot\,) = J(\,\cdot\,)J$, обозначим $\beta = j \circ \alpha \circ j^{-1} \in \mathrm{End}(\mathscr{M}')$ и рассмотрим множество

$$\mathscr{E}_\alpha^\Omega = \{X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\colon XA = \alpha(A)X \quad \forall A \in \mathscr{M}, \qquad XB = \beta(B)X \quad \forall B \in \mathscr{M}'\}. \tag{2}$$

В силу $(\mathscr{M} \vee \mathscr{M}')' = \mathbb{C}I$ множество $\mathscr{E}_\alpha^\Omega$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathscr{E}_\alpha^\Omega}$, определяемым равенством $X^*Y = \langle X, Y\rangle_{\mathscr{E}_\alpha^\Omega} I$. Доказательство этого утверждения аналогично данному в [6] для множества операторов, сплетающих эндоморфизм $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Если выбрать вместо Ω другой бициклический вектор Ω', то в случае $J_{\Omega'} \ne J_\Omega$ изменится эндоморфизм β, а значит, вообще говоря, $\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'} \ne \mathscr{E}_\alpha^\Omega$. “Независимость” от Ω показывает следующая

Лемма 1. *Если Ω' отличный от Ω бициклический вектор для $\mathscr{M}$, то гильбертовы пространства $\mathscr{E}_\alpha^\Omega$ и $\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'}$ изоморфны. Роль унитарного преобразования из $\mathscr{E}_\alpha^\Omega$ на $\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'}$ играет отображение $Ad_{W^*} = W^*(\,\cdot\,)W$, где W – унитарный оператор, принадлежащий $\mathscr{M}'$.*

Доказательство. Если Ω' лежит в ассоциированном с Ω положительном конусе $\mathscr{P}_\Omega$, то в силу предложения 2.5.30 из [4] $J_{\Omega'} = J_\Omega$, а значит, $\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'} = \mathscr{E}_\alpha^\Omega$ и утверждение леммы получается при $W = I$. Если Ω' не лежит в $\mathscr{P}_\Omega$, то по основному свойству конуса $\mathscr{P}_\Omega$ в нем найдется бициклический вектор Ω'' такой, что $(\Omega', A\Omega') = (\Omega'', A\Omega'')$ $\forall A \in \mathscr{M}$. Следовательно, соответствие $A\Omega' \mapsto A\Omega''$ определяет унитарный оператор $W \in \mathscr{M}'$. Если, как обычно, S_Ω – антилинейный оператор, задаваемый условием $S_\Omega A\Omega = A^*\Omega$ $\forall A \in \mathscr{M}$, то для операторов $S_{\Omega'}$ и $S_{\Omega''}$ имеем

$$S_{\Omega''}WA\Omega' = S_{\Omega''}A\Omega'' = A^*\Omega'' = WA^*\Omega' = WS_{\Omega'}A\Omega'.$$

Поэтому $S_{\Omega'} = W^*S_{\Omega''}W$. Единственность полярного разложения дает $J_{\Omega'} = W^*J_{\Omega''}W$. Но $J_{\Omega''} = J_\Omega = J$ в силу $\Omega'' \in \mathscr{P}_\Omega$ и предложения 2.5.30 из [4]. Используя то, что $J' = J_{\Omega'} = W^*J_\Omega W = W^*JW$ и $W \in \mathscr{M}'$, получаем $\forall B \in \mathscr{M}'$

$$\begin{aligned} \beta'(B) &:= J'\alpha(J'BJ')J' = W^*JW\alpha(W^*JWBW^*JW)W^*JW \\ &= W^*J\alpha(JWBW^*J)JW = W^*\beta(WBW^*)W. \end{aligned} \tag{3}$$

Непосредственная проверка с учетом (3) показывает, что $W^*(\,\cdot\,)W$ отображает множество $\mathscr{E}_\alpha^\Omega$ на множество $\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'}$ (которое определяется (2) с заменой β на β').

Далее, для любых X и Y из $\mathscr{E}_\alpha^\Omega$ имеем

$$\begin{aligned}\langle W^*XW, W^*YW\rangle_{\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'}} I &= W^*X^*WW^*YW = W^*X^*YW \\ &= W^*\langle X,Y\rangle_{\mathscr{E}_\alpha^\Omega} IW = \langle X,Y\rangle_{\mathscr{E}_\alpha^\Omega} I.\end{aligned}$$

Таким образом, $W^*(\,\cdot\,)W$ – унитарное преобразование из $\mathscr{E}_\alpha^\Omega$ на $\mathscr{E}_\alpha^{\Omega'}$.

В силу леммы 1 можно опустить индекс Ω в обозначении гильбертова пространства: $\mathscr{E}_\alpha^\Omega = \mathscr{E}_\alpha$.

Обозначим через $\mathscr{R}$ алгебру фон Неймана, порожденную факторами $\alpha(\mathscr{M})$ и $\beta(\mathscr{M}')$, т.е. $\mathscr{R} = [\alpha(\mathscr{M}) \vee \beta(\mathscr{M}')]^-$. Тогда $\mathscr{R}' = \alpha(\mathscr{M})' \wedge \beta(\mathscr{M}')'$.

Лемма 2. *Пусть изометрия T принадлежит $\mathscr{E}_\alpha$. Тогда проектор TT^* является минимальным в алгебре $\mathscr{R}'$.*

Доказательство. Заметим, что $E = TT^* \in \mathscr{R}'$, поскольку $TT^*\alpha(A) = TAT^* = \alpha(A)TT^*$ $\forall A \in \mathscr{M}$ и $TT^*\beta(B) = TBT^* = \beta(B)TT^*$ $\forall B \in \mathscr{M}'$ в силу $T \in \mathscr{E}_\alpha$. Алгебра $(E\mathscr{R}'E)|_{E\mathscr{H}}$ является по предложению 5.5.6 из [5] коммутантом в $\mathscr{B}(E\mathscr{H})$ алгебры $(E\mathscr{R})|_{E\mathscr{H}} = (T\mathscr{B}(\mathscr{H})T^*)|_{E\mathscr{H}} = \mathscr{B}(E\mathscr{H})$. Поэтому $E\mathscr{R}'E = \mathbb{C}E$ и E минимален в $\mathscr{R}'$.

Лемма 1 позволяет ввести следующее

Определение 1. Эндоморфизм $\alpha \in \mathrm{End}(\mathscr{M})$ называется *регулярным*, если

$$\dim \mathscr{E}_\alpha > 0.$$

Назовем *регулярным подрасширением* эндоморфизма α фактора $\mathscr{M}$ такой эндоморфизм φ фактора $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, что $0 \neq \varphi(I) \in \mathscr{R}'$ и

$$\varphi(A) = \varphi(I)\alpha(A) \ \ \forall A \in \mathscr{M}, \qquad \varphi(B) = \varphi(I)\beta(B) \ \ \forall B \in \mathscr{M}'.$$

Множество $\Phi(\alpha) \subset \mathrm{End}(\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ всех регулярных подрасширений эндоморфизма α непусто тогда и только тогда, когда α – регулярный эндоморфизм. Действительно, любая изометрия T из $\mathscr{E}_\alpha$ дает регулярное подрасширение $T(\,\cdot\,)T^*$, поскольку $TT^* \in \mathscr{R}'$ и

$$TAT^* = TT^*\alpha(A) \ \ \forall A \in \mathscr{M}, \qquad TBT^* = TT^*\beta(B) \ \ \forall B \in \mathscr{M}'.$$

Наоборот, пусть φ – регулярное подрасширение эндоморфизма α. Согласно [6] для всякого $\varphi \in \mathrm{End}(\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ найдется хотя бы одна (сплетающая) изометрия T такая, что $TX = \varphi(X)T$. Легко видеть, что оператор $T \in \mathscr{E}_\alpha$.

Лемма 3. *Сужение любого $\varphi \in \Phi(\alpha)$ на $*$-алгебру $\mathscr{M} \vee \mathscr{M}'$ совпадает с отображением*

$$\sum_k A_k B_k \mapsto \varphi(I)\Bigl[\sum_k \alpha(A_k)\beta(B_k)\Bigr],$$

где $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ – конечные наборы элементов из $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяется непосредственно с учетом определения эндоморфизма φ.

Во множестве $\mathrm{End}(\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ существует естественное отношение частичного порядка: $\gamma_1 \succ \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1(X) \geqslant \gamma_2(X)\ \ \forall X \in (\mathscr{B}(\mathscr{H}))_+$.

ЛЕММА 4. *Если* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\alpha)$, *то* $\varphi_1 \succ \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1(I) \geqslant \varphi_2(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из сильной плотности $*$-алгебры $\mathscr{M} \vee \mathscr{M}'$ в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и леммы 3.

ТЕОРЕМА 1. *Множество* $\Phi(\alpha)$ *всех регулярных подрасширений регулярного эндоморфизма* α *содержит наибольший элемент* θ. *Эндоморфизм* θ *имеет вид*

$$\theta(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{n} T_i(\,\cdot\,)T_i^*,$$

где $\{T_i\}_{i=1}^n$ – *произвольный ортонормированный базис* (ОНБ) *в* $\mathscr{E}_\alpha$, $n = \dim \mathscr{E}_\alpha \leqslant \infty$. *Проектор* $C = \theta(I)$ *является минимальным в* $\mathscr{R} \wedge \mathscr{R}'$. *Множество* $\mathscr{E}_\alpha$ *есть гильбертово пространство операторов, сплетающих эндоморфизм* θ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{T_i\}_{i=1}^n$ – произвольный ОНБ в $\mathscr{E}_\alpha$, т.е. семейство изометрий со взаимно ортогональными образами, дающими в объединении подпространство $\bigvee_{X\in\mathscr{E}_\alpha} \operatorname{Ran} X$. Эндоморфизм $\theta(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^n T_i(\,\cdot\,)T_i^*$ является регулярным подрасширением α, поскольку

$$\theta(A) = \sum_{i=1}^{n} T_i A T_i^* = \alpha(A) \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* = \alpha(A)\theta(I) \quad \forall A \in \mathscr{M},$$

$$\theta(B) = \sum_{i=1}^{n} T_i B T_i^* = \beta(B) \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* = \beta(B)\theta(I) \quad \forall B \in \mathscr{M}'.$$

Пусть φ – произвольное подрасширение α. Для $\varphi \in \mathrm{End}(\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ имеем

$$\varphi(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{m} U_i(\,\cdot\,)U_i^*,$$

где $\{U_i\}_{i=1}^m$ – некоторое семейство изометрий со взаимно ортогональными образами, сплетающих φ (см. [6]). Так как φ является подрасширением α, то при каждом $k \leqslant m$

$$U_k A = \varphi(A)U_k = \alpha(A)\varphi(I)U_k = \alpha(A)\biggl(\sum_{i=1}^{m} U_i U_i^*\biggr)U_k = \alpha(A)U_k \quad \forall A \in \mathscr{M},$$

$$U_k B = \varphi(B)U_k = \beta(B)\varphi(I)U_k = \beta(B)\biggl(\sum_{i=1}^{m} U_i U_i^*\biggr)U_k = \beta(B)U_k \quad \forall B \in \mathscr{M}'.$$

Следовательно, $U_k \in \mathscr{E}_\alpha$ и $\varphi(I) = \sum_{i=1}^m U_i U_i^* \leqslant C = \theta(I)$. Лемма 4 дает $\varphi \prec \theta$. Таким образом, максимальность θ доказана.

Покажем, что $C = \theta(I) \in \mathscr{R} \wedge \mathscr{R}'$. Ясно, что $C = \theta(I) \in \mathscr{R}'$. Поскольку $(C\mathscr{R}'C)|_{C\mathscr{H}}$ есть коммутант в $\mathscr{B}(C\mathscr{H})$ фактора $(C\mathscr{R})|_{C\mathscr{H}} = (\theta(\mathscr{B}(\mathscr{H})))|_{C\mathscr{H}}$ типа I, то $C\mathscr{R}'C$ –

фактор типа I. Пусть T – произвольная изометрия из $\mathscr{E}_\alpha$. Тогда по лемме 2 проектор $E = TT^*$ является минимальным в алгебре $\mathscr{R}'$ и $E \leqslant C$. Поскольку $C\mathscr{R}'C$ – фактор, то $C \leqslant C_E$, где C_E – центральный носитель проектора E в алгебре $\mathscr{R}'$. Предположим, что $C < C_E$. Тогда в факторе $C_E\mathscr{R}'$ типа I найдется частичная изометрия V такая, что $V^*V = E$ и $VV^* \leqslant C_E - C$. Для изометрии VT имеем $VTA = V\alpha(A)T = \alpha(A)VT$ $\forall A \in \mathscr{M}$ и $VTB = V\beta(B)T = \beta(B)VT$ $\forall B \in \mathscr{M}'$, т.е. $VT \in \mathscr{E}_\alpha$. Следовательно, $VT(VT)^* = VV^* \leqslant C$. Полученное противоречие показывает, что $C = C_E \in \mathscr{R} \wedge \mathscr{R}'$. Минимальность $C = C_E$ в $\mathscr{R} \wedge \mathscr{R}'$ следует из минимальности E в $\mathscr{R}'$ и предложения 6.4.3 из [5].

Замечание 1. Из (алгебраической) изоморфности алгебр $\mathscr{M} \vee \mathscr{M}'$ и $\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}'$ (теорема 5.5.4 в [5]) следует, что сопоставление конечных сумм

$$\sum_k A_k B_k \mapsto \sum_k \alpha(A_k)\beta(B_k)$$

корректно определяет инъективный $*$-гомоморфизм алгебры $\mathscr{M} \vee \mathscr{M}'$ в себя, расширяющий α и β. Для его расширения до эндоморфизма $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ необходима и достаточна ограниченность и σ-слабая непрерывность этого гомоморфизма (лемма 10.11 из [5]). Теорема 1 и лемма 3 показывают, что в $\mathscr{H}$ существует наибольшее подпространство $C\mathscr{H}$, приводящее факторы $\alpha(\mathscr{M})$ и $\beta(\mathscr{M}')$, такое, что отображение

$$\sum_k A_k B_k \mapsto \left[\sum_k \alpha(A_k)\beta(B_k)\right]\Bigg|_{C\mathscr{H}}$$

ограничено и σ-слабо непрерывно.

В случае $C = \theta(I) = I$, т.е. когда $\bigvee_{X \in \mathscr{E}_\alpha} \operatorname{Ran} X = \mathscr{H}$, эндоморфизм θ является *регулярным расширением* эндоморфизма α (см. [3]), т.е.

$$\theta(A) = \alpha(A), \quad \theta(B) = \beta(B) \qquad \forall A \in \mathscr{M}, \quad \forall B \in \mathscr{M}.$$

Наоборот, если регулярное расширение существует, то оно, очевидно, совпадает с θ. Поэтому в общем случае $C = \theta(I) \leqslant I$ эндоморфизм θ будем называть *регулярным квазирасширением* эндоморфизма α.

Подчеркнем, что если $\mathscr{M}$ – фактор типа I, то любой эндоморфизм α является регулярным и его регулярное квазирасширение унитально: $C = \theta(I) = I$. Действительно, согласно [6] в этом случае $\alpha(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^n V_i(\,\cdot\,)V_i^*$, где $\{V_i\}_{i=1}^n$ – семейство изометрий из $\mathscr{M}$. Нетрудно проверить, что семейство $\{V_{i,j} = V_iJV_jJ\}_{i,j=1}^n$ есть ОНБ в $\mathscr{E}_\alpha$ и $\theta(I) = \sum_{i,j=1}^n V_{i,j}V_{i,j}^* = I$. Если $\mathscr{M}$ – фактор типа II или III, то регулярные эндоморфизмы существуют и их регулярные квазирасширения также могут быть унитальными, как показано в [3] и в примерах раздела 5.

Отметим, что рассуждения раздела 2 можно провести в терминах дискретной полугруппы $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где α – регулярный эндоморфизм $\mathscr{M}$, и соответствующего регулярного квазирасширения – полугруппы $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

3. Расширение E_0-полугруппы эндоморфизмов. Пусть E_0-полугруппа

$$\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$$

состоит из регулярных эндоморфизмов фактора $\mathscr{M}$, а $\{\beta_t = j \circ \alpha_t \circ j^{-1}\}_{t\geqslant 0}$ – соответствующая полугруппа на $\mathscr{M}'$. Результаты предыдущего раздела позволяют при каждом $t \geqslant 0$ ввести гильбертово пространство $\mathscr{E}_\alpha(t) := \mathscr{E}_{\alpha_t}$, определяемое (1), и регулярное квазирасширение θ_t. Естественный вопрос о наличии у семейства $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ свойства E_0-полугруппы $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ равносилен вопросу о том, образует ли семейство $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ СП гильбертовых пространств по Арвесону (см. [6]) с операторным умножением в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ в качестве тензорного произведения слоев $\mathscr{E}_\alpha(t)$. Легко проверить, что $X_tX_s \in \mathscr{E}_\alpha(t+s)$ $\forall X_t \in \mathscr{E}_\alpha(t), \forall X_s \in \mathscr{E}_\alpha(s)$, т.е. что $\mathscr{E}_\alpha(t)\mathscr{E}_\alpha(s) \subseteq \mathscr{E}_\alpha(t+s)$, однако априори не очевидно, будет ли линейная оболочка множества $\mathscr{E}_\alpha(t)\mathscr{E}_\alpha(s)$ плотна в $\mathscr{E}_\alpha(t+s)$. Как показано ниже, данный вопрос тесно связан с поведением семейства проекторов $\{C_t = \theta_t(I)\}_{t\geqslant 0}$.

Лемма 5. *Семейство проекторов* $\{C_t = \theta_t(I)\}_{t\geqslant 0}$ *коммутативно и*

$$\theta_t(C_s) = C_tC_{t+s}.$$

Доказательство. Коммутативность семейства $\{C_t\}_{t\geqslant 0}$ легко выводится из доказанной в теореме 1 принадлежности при каждом $t > 0$ проектора C_t алгебре $\mathscr{R}_t \wedge \mathscr{R}'_t$ и очевидных включений $\mathscr{R}_t \supseteq \mathscr{R}_{t+s}, \mathscr{R}'_t \subseteq \mathscr{R}'_{t+s}$ $\forall t, s > 0$. Поскольку $\theta_t(\alpha_s(A)\beta_s(B)) = C_t\alpha_{t+s}(A)\beta_{t+s}(B)$ $\forall A \in \mathscr{M}, \forall B \in \mathscr{M}'$ в силу леммы 3, то

$$\theta_t(\mathscr{R}_s) = C_t\mathscr{R}_{t+s}. \tag{4}$$

Из (4) с учетом $\theta_t(\mathscr{B}(\mathscr{H})) = C_t\theta_t(\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ получаем

$$\theta_t(\mathscr{R}'_s) \subseteq C_t\mathscr{R}'_{t+s}C_t. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\theta_t(\mathscr{R}_s \wedge \mathscr{R}'_s) \subseteq C_t(\mathscr{R}'_{t+s} \wedge \mathscr{R}'_{t+s})$. Поскольку $C_s \in \mathscr{R}_s \wedge \mathscr{R}'_s$ по теореме 1, то $\theta_t(C_s)$ – проектор в $C_t(\mathscr{R}'_{t+s} \wedge \mathscr{R}'_{t+s})$.

Далее, $\theta_t(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{n_t} T_t^i(\,\cdot\,)(T_t^i)^*$, где $\{T_t^i\}_{i=1}^{n_t}$ – произвольный ОНБ в $\mathscr{E}_\alpha(t)$, а

$$C_s = \sum_{j=1}^{n_s} T_s^j(T_s^j)^*,$$

где $\{T_s^j\}_{j=1}^{n_s}$ – произвольный ОНБ в $\mathscr{E}_\alpha(s)$. Поэтому с учетом $\mathscr{E}_\alpha(t)\mathscr{E}_\alpha(s) \subseteq \mathscr{E}_\alpha(t+s)$ имеем

$$\theta(C_s) = \sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_s} T_t^iT_s^j(T_s^j)^*(T_t^i)^* \leqslant C_{t+s}. \tag{6}$$

Проектор C_{t+s} минимален в алгебре $\mathscr{R}_{t+s} \wedge \mathscr{R}'_{t+s}$ по теореме 1. Следовательно, проектор C_tC_{t+s} минимален в алгебре $C_t(\mathscr{R}_{t+s} \wedge \mathscr{R}'_{t+s})$ (предложение 5.5.5 из [5]). Эта минимальность вместе с (6) дает $\theta_t(C_s) = C_tC_{t+s}$.

Следующая лемма показывает наличие ослабленной версии полугруппового свойства у семейства эндоморфизмов $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$.

Лемма 6. *Эндоморфизмы семейства* $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ *связаны соотношением*

$$\theta_t(\theta_s(\,\cdot\,)) = \theta_t(I)\theta_{t+s}(\,\cdot\,).$$

Доказательство. Для любых $A \in \mathscr{M}$ и $B \in \mathscr{M}'$ в силу лемм 3 и 5 имеем

$$\begin{aligned}\theta_t(\theta_s(AB)) &= \theta_t(C_s\alpha_s(A)\beta_s(B)) = \theta_t(C_s)\theta_t(\alpha_s(A)\beta_s(B)) = C_tC_{t+s}\alpha_{t+s}(A)\beta_{t+s}(B)\\ &= \theta_t(I)\theta_{t+s}(AB).\end{aligned}$$

Утверждение леммы следует из слабой плотности в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ алгебры $\mathscr{M} \vee \mathscr{M}'$ и нормальности эндоморфизмов семейства $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$.

Определение 2. E_0-полугруппа эндоморфизмов $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ фактора $\mathscr{M}$, стандартно реализованного в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, называется *регулярной*, если

1. существует сильно непрерывное семейство изометрий $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ такое, что $T_t \in \mathscr{E}_\alpha(t)$ $\forall t \geqslant 0$;
2. $\exists t_0 > 0$: $\bigwedge_{s\leqslant t_0} C_s > 0$.

Замечание 2. Второе условие в определении 2 носит технический характер. Это условие заведомо выполнено в "унитальном" случае $C_t = I$ $\forall t \geqslant 0$, а также когда семейство $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ является коммутативным, поскольку, как показывает следующая лемма, в этом случае $\operatorname{Ran} T_t \subseteq \operatorname{Ran} T_s \subseteq C_s\mathscr{H}$ $\forall t > 0, \forall s \in [0, t]$.

Лемма 7. *Любое сильно непрерывное коммутативное семейство изометрий $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ такое, что $T_t \in \mathscr{E}_\alpha(t)$ $\forall t \geqslant 0$, можно превратить в сильно непрерывную полугруппу $\{\mu(t)T_t\}_{t\geqslant 0}$ умножением на комплекснозначную непрерывную функцию $\mu(t)$ такую, что $|\mu(t)| = 1$ $\forall t \geqslant 0$.*

Доказательство. Поскольку $T_{t+s}, T_tT_s \in \mathscr{E}_\alpha(t+s)$ $\forall t, s \geqslant 0$, то по лемме 2 коммутирующие проекторы $T_{t+s}T_{t+s}^*$ и $T_tT_s(T_tT_s)^*$ являются минимальными в $\mathscr{R}'_{t+s}$. Следовательно, $\operatorname{Ran} T_{t+s}$ и $\operatorname{Ran} T_tT_s$ либо ортогональны, либо совпадают. Поэтому

$$F_s^t = T_{t+s}^*T_tT_s = \langle T_{t+s}, T_tT_s\rangle_{\mathscr{E}_\alpha(t+s)}I = \lambda(t,s)I, \tag{7}$$

где комплексное число $\lambda(t, s)$ либо равно нулю, либо $|\lambda(t, s)| = 1$. При каждом фиксированном $t \geqslant 0$ семейство $\{F_s^t\}_{s\geqslant 0}$ сильно непрерывно в силу сильной непрерывности семейства $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ и непрерывности в сильной операторной топологии операции умножения по совокупности сомножителей на единичном шаре $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Используя топологическую связность $[0; +\infty)$, легко показать, что либо $\lambda(t, s) = 0$ $\forall s \geqslant 0$, либо $|\lambda(t, s)| = 1$ $\forall s \geqslant 0$. Но $\lambda(t, 0) = 1$, так как $F_0^t = T_t^*T_t = I$. Поэтому имеет место второй случай, а значит, $\operatorname{Ran} T_{t+s} = \operatorname{Ran} T_tT_s$. С учетом (7) получаем

$$T_{t+s} = \lambda(t,s)T_tT_s, \tag{8}$$

где $\lambda(t, s) \in \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Доопределим значения функции $\lambda(t, s)$ для отрицательных значений t, s по формуле $\lambda(-t, -s) = \overline{\lambda(t, s)}$, $\lambda(-s, t) = \lambda(t, -s) = \lambda(t, s - t) = 1$, $s \geqslant t$, $\lambda(-s, t) = \lambda(t, -s) = \overline{\lambda(s, t - s)}$, $t \geqslant s$, $t, s \geqslant 0$ (здесь черта обозначает комплексное сопряжение). Получившаяся функция будет удовлетворять условию 2-коцикла для всех значений аргументов: $\lambda(t + s, r)\lambda(t, s) = \lambda(t, s + r)\lambda(s, r)$, $\lambda(0, t) = \lambda(t, 0) = 1$, где $s, t, r \in \mathbb{R}$. В ходе доказательства теоремы 3.2.73 из [4] на с. 302 вводится 2-коцикл $z(t, s)$ со значениями в множестве унитарных операторов, принадлежащих центру произвольной алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$. Далее устанавливается существование в центре $\mathscr{M}$ семейства $\mu(t)$ со свойством $z(t, s) = \mu(t)\mu(s)\mu(t + s)^{-1}$, $s, t \in \mathbb{R}$, такого, что для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых $\|z(t, s) - I\| \leqslant \varepsilon$ при $|t| + |s| \leqslant \delta$, выполняется $\|\mu(t) - I\| \leqslant 3\varepsilon$ при $|t| + |s| \leqslant \delta$. Таким образом, в [4] доказано даже более сильное утверждение, чем нам требуется, и 2-коцикл $\lambda(t,s)$ тривиальный, т.е. $\lambda(t,s) = \mu(t)\mu(s)\mu(t+s)^{-1}$ для некоторой непрерывной в нуле функции $\mu(t)$. Полагая $S_t = \mu(t)T_t$, из (8) получаем, что полугруппа изометрий $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ сильно непрерывна в нуле, а значит, и при всех $t \geqslant 0$, т.е. принадлежит классу C_0-полугрупп.

Назовем *регулярным подрасширением* E_0-полугруппы эндоморфизмов $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ фактора $\mathscr{M}$ такую e_0-полугруппу эндоморфизмов $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ фактора $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, что при каждом $t > 0$ эндоморфизм φ_t является регулярным подрасширением эндоморфизма α_t.

В отличие от случая одного регулярного эндоморфизма, существование у регулярной полугруппы хотя бы одного регулярного подрасширения априори не очевидно. Достаточным условием существования регулярного подрасширения у регулярной полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ является наличие в $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ сильно непрерывного коммутативного семейства изометрий $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$. Действительно, в силу леммы 7 семейство эндоморфизмов $\{T_t(\,\cdot\,)T_t^*\}_{t\geqslant 0}$ образует E_0-полугруппу $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, причем при каждом $t > 0$ эндоморфизм $T_t(\,\cdot\,)T_t^*$ является в силу $T_t \in \mathscr{E}_\alpha(t)$ регулярным подрасширением эндоморфизма α_t. Следующая теорема 2 (вместе с замечанием 3) устанавливает, в частности, что необходимым и достаточным условием существования регулярного подрасширения у полугруппы эндоморфизмов является ее регулярность.

Во множестве всех полугрупп эндоморфизмов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ существует естественное отношение частичного порядка: $\{\gamma'_t\}_{t\geqslant 0} \succ \{\gamma''_t\}_{t\geqslant 0} \Leftrightarrow \gamma'_t(X) \geqslant \gamma''_t(X)\ \forall X \in (\mathscr{B}(\mathscr{H}))_+$ $\forall t > 0$.

Теорема 2. *Множество $\Phi(\{\alpha_t\})$ всех регулярных подрасширений регулярной E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ фактора $\mathscr{M}$ непусто и содержит наибольший элемент $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$, причем $\overline{\theta}_t(\cdot) = \overline{C}_t\theta_t(\,\cdot\,)\ \forall t \geqslant 0$, где $\overline{C}_t = \bigwedge_{r\in[0,t]} C_r$ – проектор из $\mathscr{R}'_t$.*

При каждом $t \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{E}_\alpha(t)$ существует наибольшее нетривиальное подпространство $\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)$ такое, что семейство $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ является СП с операторным умножением в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ в качестве тензорного произведения слоев, причем

$$\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t) = \{X \in \mathscr{E}_\alpha(t)\colon\ \operatorname{Ran} X \subseteq \overline{C}_t\mathscr{H}\}.$$

СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ ассоциирована по Арвесону с e_0-полугруппой $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\overline{C}_t = \bigwedge_{r\in[0,t]} C_r$ – ненулевой проектор из $\mathscr{R}'_t$ при каждом $t > 0$ в силу регулярности полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ и включений $C_r \in \mathscr{R}'_r \subseteq \mathscr{R}'_t\ \ \forall r \in [0,t]$. Следовательно, $\{\overline{\theta}_t(\,\cdot\,) = \overline{C}_t\theta_t(\,\cdot\,)\}_{t\geqslant 0}$ – семейство эндоморфизмов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, причем при каждом $t > 0$ эндоморфизм $\overline{\theta}_t$ есть регулярное подрасширение эндоморфизма α_t. Покажем, что

$$\overline{\theta}_t(\overline{C}_s) = \overline{C}_{t+s} \quad \forall t, s > 0. \tag{9}$$

Пусть $\mathscr{F}_s$ – множество всех конечных подмножеств отрезка $[0,s]$, частично упорядоченное по включению, а $C_s(\lambda) = \bigwedge_{r\in\lambda} C_r$ при каждом $\lambda \in \mathscr{F}_s$. Ясно, что $\{C_s(\lambda)\}_{\lambda\in\mathscr{F}_s}$ – убывающая направленность в $\mathscr{B}(\mathscr{H})_+$. В силу леммы 2.4.19 из [4] существует предел в сильной операторной топологии

$$s - \lim_\lambda C_s(\lambda) = \inf_\lambda C_s(\lambda) = \overline{C}_s.$$

Используя лемму 5, получаем

$$\overline{\theta}_t(C_s(\lambda)) = \overline{\theta}_t\bigg(\bigwedge_{r\in\lambda} C_r\bigg) = \overline{\theta}_t\bigg(\prod_{r\in\lambda} C_r\bigg) = \prod_{r\in\lambda}\overline{\theta}_t(C_r) = \prod_{r\in\lambda}\overline{C}_t\theta_t(C_r) = \prod_{r\in\lambda}\overline{C}_tC_{t+r}.$$

Переход к пределу по λ с учетом нормальности эндоморфизма $\overline{\theta}_t$ дает

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_t(\overline{C}_s) &= \overline{\theta}_t(C_s(\lambda)) = s-\lim_{\lambda}\overline{\theta}_t(C_s(\lambda)) = s-\lim_{\lambda}\prod_{r\in\lambda}\overline{C}_tC_{t+r}\\ &= \inf_{\lambda}\prod_{r\in\lambda}\overline{C}_tC_{t+r} = \overline{C}_{t+s}.\end{aligned}$$

Таким образом, (9) доказано.

Полугрупповое свойство семейства $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ легко выводится из (9) и леммы 6:

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_t(\overline{\theta}_s(\,\cdot\,)) &= \overline{\theta}_t(\overline{C}_s\theta_s(\,\cdot\,)) = \overline{\theta}_t(\overline{C}_s)\overline{\theta}_t(\theta_s(\,\cdot\,)) = \overline{C}_{t+s}\overline{C}_t\theta_t(\theta_s(\,\cdot\,))\\ &= \overline{C}_{t+s}\theta_{t+s}(\,\cdot\,) = \overline{\theta}_{t+s}(\,\cdot\,).\end{aligned}$$

Покажем σ-слабую непрерывность полугруппы $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$. Для этого достаточно установить непрерывность в сильной операторной топологии любой ее траектории

$$\{\overline{\theta}_t(X)\}_{t\geqslant 0}, \qquad X\in\mathscr{B}(\mathscr{H}),$$

справа при $t=0$. Действительно, сильная непрерывность траектории повлечет ее непрерывность в σ-слабой операторной топологии справа при $t=0$, поскольку любая траектория полугруппы эндоморфизмов лежит в некотором шаре $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Далее, нормальность эндоморфизмов $\overline{\theta}_t$ означает существование предсопряженных операторов ${}_*\overline{\theta}_t$ в $\mathscr{B}(\mathscr{H})_*$, образующих полугруппу сжатий банахова пространства $\mathscr{B}(\mathscr{H})_*$. Из σ-слабой непрерывности справа при $t=0$ полугруппы $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ следует $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H})_*, \mathscr{B}(\mathscr{H}))$-непрерывность траекторий полугруппы $\{{}_*\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ справа при $t=0$. Как известно (см., например, [8, глава 1]), это повлечет непрерывность любой траектории $\{{}_*\overline{\theta}_t(\omega)\}_{t\geqslant 0}, \omega\in\mathscr{B}(\mathscr{H})_*$, по норме $\mathscr{B}(\mathscr{H})_*$ при всех $t\geqslant 0$. Иначе говоря, $\{{}_*\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ будет полугруппой класса C_0 в $\mathscr{B}(\mathscr{H})_*$, а сопряженная полугруппа $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ будет C_0^*-полугруппой в банаховом пространстве $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, т.е. σ-слабо непрерывной полугруппой эндоморфизмов.

Покажем, что $\exists s-\lim_{t\to+0}\overline{\theta}_t(X) = X\ \ \forall X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Пусть $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ сильно непрерывное семейство изометрий, фигурирующее в определении 2 регулярности полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Заметим, что в силу справедливого $\forall\xi\in\mathscr{H}$ соотношения

$$\|T_t^*\xi-\xi\| = \|T_t^*\xi - T_t^*T_t\xi\| \leqslant \|T_t^*\|\|\xi - T_t\xi\| = \|\xi - T_t\xi\|$$

существует $s-\lim_{t\to 0}T_t^* = I$, а значит, и $s-\lim_{t\to 0}E_t = I$, где $E_t = T_tT_t^*$. Из этого замечания и оценки, верной $\forall\xi\in\mathscr{H}$, $\forall X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\forall t>0$,

$$\begin{aligned}\|\overline{\theta}_t(X)\xi - X\xi\| &= \|\overline{\theta}_t(X)\xi - \overline{\theta}_t(X)E_t\xi + \overline{\theta}_t(X)E_t\xi - X\xi\|\\ &\leqslant \|\overline{\theta}_t(X)\xi - \overline{\theta}_t(X)E_t\xi\| + \|\overline{\theta}_t(X)E_t\xi - X\xi\|\\ &\leqslant \|\overline{\theta}_t(X)\|\|\xi - E_t\xi\| + \|T_tXT_t^*\xi - X\xi\|\\ &= \|X\|\|\xi - E_t\xi\| + \|T_tXT_t^*\xi - X\xi\|\end{aligned}$$

получаем существование указанного выше предела и, следовательно, σ-слабую непрерывность полугруппы $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$.

Пусть $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ – регулярное подрасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Тогда при каждом $r>0$ эндоморфизм φ_r есть регулярное подрасширение эндоморфизма α_r и в силу максимальности θ_r в $\Phi(\alpha_r)$ (теорема 1) имеем $\varphi_r(I)\leqslant\theta_r(I)=C_r$. Поэтому при каждом $t>0$ имеем $\varphi_t(I)\leqslant\varphi_r(I)\leqslant C_r$ $\forall r\in[0,t]$. Следовательно,

$$\varphi_t(I)\leqslant\bigwedge_{r\in[0,t]}C_r=\overline{C}_t=\overline{\theta}_t(I).$$

Из леммы 4 получаем, что $\varphi_t\prec\overline{\theta}_t$ $\forall t\geqslant 0$. Таким образом, $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ – наибольшее регулярное подрасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$; будем называть его *регулярным квазирасширением* исходной полугруппы.

При каждом $t>0$ множество $\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)=\{X\in\mathscr{E}_\alpha(t)\colon \operatorname{Ran}X\subseteq\overline{C}_t\mathscr{H}\}$ есть гильбертово пространство операторов, сплетающих эндоморфизм $\overline{\theta}_t$. Как показано в [6], $\dim\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)$ для всех $t>0$ либо 1, либо ∞. Если $\dim\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)=\infty$ $\forall t>0$, то в соответствии с [6] семейство $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ образует СП гильбертовых пространств. Если $\dim\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)=1$ $\forall t>0$, то $\overline{\theta}_t(\,\cdot\,)=T_t(\,\cdot\,)T_t^*$ и $\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)=\{\mathbb{C}T_t\}$ при каждом $t\geqslant 0$. Лемма 7 показывает, что семейство $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ в этом случае можно рассматривать как вырожденный случай СП.

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 допускает следующее обращение. Если у E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ существует хотя бы одно регулярное подрасширение, то такая полугруппа регулярна в смысле определения 2. Действительно, если $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ – такое подрасширение, то с помощью леммы 2.3 в [6] (и рассуждений после нее) нетрудно получить сильно непрерывное семейство изометрий, сплетающее $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$, а значит, удовлетворяющее пункту 1 определения 2. Из $\varphi_t(I)\leqslant\varphi_s(I)\leqslant C_s$ $\forall t>0$, $\forall s\in[0,t]$ следует $\bigwedge_{s\leqslant t}C_s\geqslant\varphi_t(I)>0$ $\forall t>0$, т.е. выполнение пункта 2 определения 2.

Следствие 1. *Семейство $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ образует СП гильбертовых пространств с операторным умножением в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ в качестве тензорного произведения слоев тогда и только тогда, когда семейство подпространств*

$$\Bigl\{C_t\mathscr{H}=\bigvee_{X\in\mathscr{E}_\alpha(t)}\operatorname{Ran}X\Bigr\}_{t\geqslant 0}$$

является монотонно убывающим.

Доказательство. Если $\{C_t\}_{t\geqslant 0}$ – монотонно убывающее семейство проекторов, то $\overline{C}_t=C_t$, а значит, $\overline{\theta}_t=\theta_t$ и $\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)=\mathscr{E}_\alpha(t)$ при каждом $t\geqslant 0$. Обратное утверждение очевидно.

Регулярность некоторых классов полугрупп и конкретные примеры регулярных квазисвободных полугрупп на алгебре КАС рассмотрены в разделе 5.

4. Коциклические возмущения регулярных полугрупп. Теперь мы исследуем поведение введенных в разделе 3 объектов $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$, $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ $\{\mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ при коциклических возмущениях регулярной полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$.

Рассмотрим E_0-полугруппу $\{\alpha_t^u(\cdot)=U_t\alpha_t(\,\cdot\,)U_t^*\}_{t\geqslant 0}$, где $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ – коцикл в $\mathscr{M}$, т.е. сильно непрерывное семейство унитарных операторов из $\mathscr{M}$ со свойством $U_{t+s}=$

$U_t\alpha_t(U_s)$ $\forall t,s\geqslant 0$. Полугруппа $\{\beta_t^u = j\circ\alpha_t^u\circ j^{-1}\}_{t\geqslant 0}$ сопряжена с полугруппой $\{\beta_t = j\circ\alpha_t\circ j^{-1}\}_{t\geqslant 0}$ посредством коцикла $\{U_t' = JU_tJ\}_{t\geqslant 0}$:

$$\beta_t^u(\,\cdot\,) = J\alpha_t^u(J(\,\cdot\,)J)J = JU_t\alpha_t(J(\,\cdot\,)J)U_t^*J = U_t'J\alpha_t(J(\,\cdot\,)J)JU_t'^* = U_t'\beta_t(\,\cdot\,)U_t'^*.$$

Введем сильно непрерывное семейство $\{\widetilde{U}_t = U_tU_t'\}_{t\geqslant 0}$ унитарных операторов в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и соответствующее семейство $\{L_{\widetilde{U}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ преобразований на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ операторного умножения слева: $L_{\widetilde{U}}(t)\colon X\mapsto \widetilde{U}_tX$ $\forall X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\forall t\geqslant 0$.

При каждом $t\geqslant 0$ для любого T из $\mathscr{E}_\alpha(t)$ имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_tTA &= U_tU_t'\alpha_t(A)T = U_t\alpha_t(A)U_t^*U_tU_t'T = \alpha_t^u(A)\widetilde{U}_tT \quad \forall A\in\mathscr{M},\\ \widetilde{U}_tTB &= U_tU_t'\beta_t(B)T = U_t\beta_t(B)U_t^*U_tU_t'T = \beta_t^u(B)\widetilde{U}_tT \quad \forall B\in\mathscr{M}',\end{aligned}$$

т.е. $\widetilde{U}_t\mathscr{E}_\alpha(t)\subseteq\mathscr{E}_\alpha^u(t)$. Аналогично показывается, что $\widetilde{U}_t^*\mathscr{E}_\alpha^u(t)\subseteq\mathscr{E}_\alpha(t)$. Следовательно, $\widetilde{U}_t\mathscr{E}_\alpha(t)=\mathscr{E}_\alpha^u(t)$. Далее,

$$\langle\widetilde{U}_tT_1,\widetilde{U}_tT_2\rangle_{\mathscr{E}_\alpha^u(t)}I = (\widetilde{U}_tT_1)^*\widetilde{U}_tT_2 = (T_1)^*T_2 = \langle T_1,T_2\rangle_{\mathscr{E}_\alpha(t)}I \quad \forall T_1,T_2\in\mathscr{E}_\alpha(t).$$

Таким образом, $L_{\widetilde{U}}(t)$ есть унитарное преобразование из $\mathscr{E}_\alpha(t)$ на $\mathscr{E}_\alpha^u(t)$ при каждом $t\geqslant 0$.

Пусть $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ – какое-либо регулярное подрасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Рассмотрим семейство эндоморфизмов $\{\varphi_t^u(\,\cdot\,) = \widetilde{U}_t\varphi_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^*\}_{t\geqslant 0}$. При каждом $t>0$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_t^u(A) &= \widetilde{U}_t\varphi_t(A)\widetilde{U}_t^* = \widetilde{U}_t\varphi_t(I)\alpha_t(A)\widetilde{U}_t^*\\ &= \widetilde{U}_t\varphi_t(I)\widetilde{U}_t^*\widetilde{U}_t\alpha_t(A)\widetilde{U}_t^* = \varphi_t^u(I)\alpha_t^u(A) \qquad \forall A\in\mathscr{M},\\ \varphi_t^u(B) &= \widetilde{U}_t\varphi_t(B)\widetilde{U}_t^* = \widetilde{U}_t\varphi_t(I)\alpha_t(B)\widetilde{U}_t^*\\ &= \widetilde{U}_t\varphi_t(I)\widetilde{U}_t^*\widetilde{U}_t\beta_t(B)\widetilde{U}_t^* = \varphi_t^u(I)\beta_t^u(B) \qquad \forall B\in\mathscr{M}',\end{aligned} \tag{10}$$

т.е. φ_t^u – регулярное подрасширение эндоморфизма φ_t. Далее заметим, что для всех $t,s>0$ в силу леммы 3

$$\widetilde{U}_t\varphi_t(\widetilde{U}_s) = U_tU_t'\varphi_t(I)\alpha_t(U_t)\beta_t(U_t') = U_{t+s}U_{t+s}'\varphi_t(I)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi_t^u(\varphi_s^u(\,\cdot\,)) &= \widetilde{U}_t\varphi_t(\widetilde{U}_s\varphi_s(\,\cdot\,)\widetilde{U}_s^*)\widetilde{U}_t^* = \widetilde{U}_t\varphi_t(\widetilde{U}_s)\varphi_t(\varphi_s(\,\cdot\,))\varphi_t(\widetilde{U}_s^*)\widetilde{U}_t^*\\ &= \widetilde{U}_{t+s}\varphi_{t+s}(\,\cdot\,)\widetilde{U}_{t+s}^* = \varphi_{t+s}^u(\,\cdot\,),\end{aligned}$$

т.е. сильно непрерывное семейство эндоморфизмов $\{\varphi_t^u(\,\cdot\,)\}_{t\geqslant 0}$ образует e_0-полугруппу. Учитывая (10), заключаем, что $\{\varphi_t^u(\,\cdot\,)\}_{t\geqslant 0}$ – регулярное подрасширение E_0-полугруппы $\{\alpha_t^u\}_{t\geqslant 0}$. В силу замечания 3 полугруппа $\{\alpha_t^u\}_{t\geqslant 0}$ является регулярной. Следовательно, для этой полугруппы можно ввести семейство эндоморфизмов $\{\theta_t^u\}_{t\geqslant 0}$, E_0-полугруппу $\{\overline{\theta}_t^u\}_{t\geqslant 0}$ и СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Если $\{T_t^i\}_{i=1}^{i=n}$ – ОНБ в $\mathscr{E}_\alpha(t)$, то по доказанному выше $\{\widetilde{U}_tT_t^i\}_{i=1}^{i=n}$ является ОНБ в $\mathscr{E}_\alpha^u(t)$. Поэтому в силу теоремы 1 при всех $t\geqslant 0$

$$\theta_t^u(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^n \widetilde{U}_tT_i(\,\cdot\,)(\widetilde{U}_tT_i)^* = \widetilde{U}_t\biggl(\sum_{i=1}^n T_i(\,\cdot\,)T_i^*\biggr)\widetilde{U}_t^* = \widetilde{U}_t\theta_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^*. \tag{11}$$

В частности,
$$C_t^u = \widetilde{U}_t C_t \widetilde{U}_t^*. \tag{12}$$

Аналог соотношения (11) для эндоморфизмов полугруппы $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ будет установлен, если доказать для семейства $\{\overline{C}_t\}_{t\geqslant 0}$ аналогичное (12) равенство
$$\overline{C}_t^u = \widetilde{U}_t \overline{C}_t \widetilde{U}_t^*. \tag{13}$$

При каждом $t > 0$ для всех $r \in [0, t]$ в силу $C_r \in \mathscr{R}_r \wedge \mathscr{R}_r'$ и (12) имеем
$$\begin{aligned}\widetilde{U}_t C_r \widetilde{U}_t^* &= U_r \alpha_r(U_{t-r}) U_r' \beta_r(U_{t-r}') C_r (U_r \alpha_r(U_{t-r}) U_r' \beta_r(U_{t-r}'))^* \\ &= U_r U_r' C_r U_r'^* U_r^* = \widetilde{U}_r C_r \widetilde{U}_r^* = C_r^u.\end{aligned}$$

Пусть $\mathscr{F}_t$ – множество всех конечных подмножеств отрезка $[0, t]$, частично упорядоченное по включению, а $C_t(\lambda)$ и $C_t^u(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathscr{F}_t$ есть точные нижние грани наборов проекторов $\{C_r\}_{r\in\lambda}$ и $\{C_r^u\}_{r\in\lambda}$ соответственно. Тогда из коммутативности этих наборов и последнего равенства следует, что
$$\widetilde{U}_t C_t(\lambda) \widetilde{U}_t^* = \widetilde{U}_t \biggl(\prod_{r\in\lambda} C_r\biggr) \widetilde{U}_t^* = \biggl(\prod_{r\in\lambda} C_r^u\biggr) = C_t^u(\lambda).$$

Поскольку проекторы $\overline{C}_t$ и $\overline{C}_t^u$ есть σ-слабые пределы направленностей $\{C_t(\lambda)\}_{\lambda\in\mathscr{F}_t}$ и $\{C_t^u(\lambda)\}_{\lambda\in\mathscr{F}_t}$ соответственно, то (13) следует из нормальности отображения $\widetilde{U}_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^*$.

Из (11) и (13) следует, что
$$\overline{\theta}_t^u(\,\cdot\,) = C_t^u \theta_t^u(\,\cdot\,) = \widetilde{U}_t C_t(\,\cdot\,)\theta_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^* = \widetilde{U}_t \overline{\theta}_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^*. \tag{14}$$

Покажем изоморфность СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$. Заметим, что если полугруппа $\{\overline{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ унитальна, то семейство $\{\widetilde{U}_t\}_{t\geqslant 0}$ есть коцикл в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и (11) означает коциклическую сопряженность полугрупп $\{\overline{\theta}_t = \theta_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\overline{\theta}_t^u = \theta_t^u\}_{t\geqslant 0}$, а значит, и изоморфность СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t) = \mathscr{E}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t) = \mathscr{E}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$ в силу теоремы 3.8.1 из [6].

В случае неунитальности $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ семейство $\{\widetilde{U}_t\}_{t\geqslant 0}$ не является коциклом. Тем не менее, можно непосредственно показать изоморфность СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$, обобщая доказательство теоремы 3.8.1 из [6]. В силу (13) и (14) все необходимые изменения в указанном доказательстве касаются проверки мультипликативного свойства отображения
$$\Psi\colon (t, T) \mapsto (t, \widetilde{U}_t T) \quad \forall\, T \in \overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)$$
из $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ на $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Пусть $T \in \overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)$ и $S \in \overline{\mathscr{E}}_\alpha(s)$. Тогда, учитывая лемму 3, теорему 1 и равенство $T = TI = \theta_t(I)T = C_t T$, имеем
$$\begin{aligned}\widetilde{U}_t T \widetilde{U}_s S &= \widetilde{U}_t \theta_t(\widetilde{U}_s) TS = U_t U_t' \theta_t(U_s U_s') TS = U_t U_t' \alpha_t(U_s) \beta_t(U_s') C_t TS \\ &= U_{t+s} U_{t+s}' TS = \widetilde{U}_{t+s} TS.\end{aligned}$$

Следовательно, отображение Ψ сохраняет "послойное" умножение. Это завершает обобщение доказательства теоремы 3.8.1 из [6] на случай СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$. Таким образом, установлена следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ – *регулярная полугруппа и* $\{\alpha_t^u(\,\cdot\,) = U_t\alpha_t(\,\cdot\,)U_t^*\}_{t\geqslant 0}$, *где* $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ – *коцикл в* $\mathscr{M}$. *Тогда возмущенная полугруппа* $\{\alpha_t^u\}_{t\geqslant 0}$ *также регулярна. Сильно непрерывное семейство* $\{\widetilde{U}_t = U_tU_t' = U_tJU_tJ\}_{t\geqslant 0}$ *унитарных операторов порождает семейство* $\{L_{\widetilde{U}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ *унитарных преобразований из* $\mathscr{E}_\alpha(t)$ *на* $\mathscr{E}_\alpha^u(t)$ *и связывает регулярные квазирасширения*:

$$\theta_t^u(\,\cdot\,) = \widetilde{U}_t\theta_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^*, \qquad \overline{\theta}_t^u(\,\cdot\,) = \widetilde{U}_t\overline{\theta}_t(\,\cdot\,)\widetilde{U}_t^*.$$

СП гильбертовых пространств $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ *и* $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha^u(t)\}_{t\geqslant 0}$ *изоморфны.*

Последнее утверждение теоремы 3 показывает, что СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ обладает свойством устойчивости по отношению к коциклическим возмущениям полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Это обосновывает следующее

Определение 3. СП $\{\overline{\mathscr{E}}_\alpha(t)\}_{t\geqslant 0}$ будем называть *системой-произведением, ассоциированной с* E_0*-полугруппой* $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$.

Такое определение согласуется с данным в [3] для квазисвободной E_0-полугруппы.

Замечание 4. Пусть $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ – регулярное квазирасширение полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Рассмотрим α-коцикл $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ в $\mathscr{M}$ и β-коцикл $\{U_t' = JU_tJ\}_{t\geqslant 0}$ в $\mathscr{M}'$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше в данном разделе, показывают, что формула

$$\theta_t^u(\,\cdot\,) = U_t'\theta_t(\,\cdot\,)U_t'^*, \qquad t \geqslant 0,$$

корректно задает некоторое (нерегулярное) квазирасширение $\{\theta_t^u\}_{t\geqslant 0}$ полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. В следующем разделе показано, что в случае квазисвободных полугрупп на факторах, полученных из представлений алгебры КАС, это утверждение допускает обращение: две E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ на факторах $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ соответственно имеют общее расширение на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ только тогда, когда полугруппа $\{j^{-1}\circ\gamma_t\circ j\}_{t\geqslant 0}$ коциклически сопряжена с полугруппой $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$. Это обстоятельство оправдывает выделение регулярных расширений среди других возможных расширений E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ до полугруппы на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

5. Примеры регулярных полугрупп. Прежде всего отметим, что любая E_0-полугруппа $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ на факторе $\mathscr{M}$ типа I является регулярной, поскольку у такой полугруппы всегда есть регулярное расширение $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ (замечание 3). Действительно, в этом случае существует изоморфизм между $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\mathscr{M}\bar{\otimes}\mathscr{M}'$ [5], и регулярное расширение θ_t соответствует E_0-полугруппе $\alpha_t\otimes\beta_t$ при этом изоморфизме.

Покажем регулярность важного класса полугрупп на факторах любого типа. В соответствии с [9] полугруппа $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ на факторе $\mathscr{M}$ называется *вполне совместимой* с точным нормальным состоянием $\omega(\,\cdot\,) = (\Omega, (\,\cdot\,)\Omega)$, если $\omega\circ\alpha_t = \omega$ и $\alpha_t\circ\sigma_s^\omega = \sigma_s^\omega\circ\alpha_t$ $\forall t, s \geqslant 0$, где σ_s^ω – модулярная группа, ассоциированная с состоянием ω. Свойство совместимости $\omega\circ\alpha_t = \omega$ означает, что соответствие $T_t\colon A\Omega \mapsto \alpha_t(A)\Omega$ $\forall A\in\mathscr{M}, \forall t\geqslant 0$ корректно определяет сильно непрерывную полугруппу изометрий $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ на $\mathscr{H}$ такую, что $T_tA = \alpha_t(A)T_t$ $\forall A\in\mathscr{M}$.

Свойство $\alpha_t\circ\sigma_s^\omega = \sigma_s^\omega\circ\alpha_t$ $\forall t, s\geqslant 0$ показывает (см. [10]), что полугруппа $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ коммутирует с модулярной инволюцией J, ассоциированной с вектором Ω. Следовательно, при каждом $t\geqslant 0$

$$T_tB = T_tJJBJJ = JT_tJBJJ = J\alpha_t(JBJ)T_tJ = J\alpha_t(JBJ)JT_t = \beta_t(B)T_t \quad \forall B\in\mathscr{M}'.$$

Таким образом, $T_t \in \mathscr{E}_\alpha(t)\ \ \forall t \geqslant 0$ и полугруппа $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ регулярна в силу замечания 2 к определению 2.

Рассмотрим C^*-алгебру канонических антикоммутационных соотношений $\mathscr{A}(\mathscr{K})$ над сепарабельным гильбертовым пространством $\mathscr{K}$. Образующими $\mathscr{A}(\mathscr{K})$ являются операторы рождения и уничтожения $a^*(f)$ и $a(g)$, где $f, g \in \mathscr{K}$, в антисимметричном пространстве Фока $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ с вакуумным вектором Ω (см. [11]). Фиксируем в $\mathscr{K}$ положительный оператор R, $0 < R < I$, $\ker R = \ker(I - R) = 0$, антиунитарный оператор $\mathscr{J}$ и построим представления π алгебры $\mathscr{A}(\mathscr{K} \oplus \mathscr{K})$ и π_R алгебры $\mathscr{A}(\mathscr{K})$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = \mathscr{F}(\mathscr{K}) \otimes \mathscr{F}(\mathscr{K})$ по формуле

$$\pi(a(f\oplus 0)) = \pi_R(a(f)) = a((1-R)^{1/2}f)\otimes\Gamma + 1\otimes a(R^{1/2}\mathscr{J}f),$$
$$\pi(a(0\oplus f)) = a(R^{1/2}f)\otimes\Gamma - 1\otimes a((1-R)^{1/2}\mathscr{J}f),$$

$f \in \mathscr{K}$. Здесь Γ – унитарный оператор, полностью определенный формулой $\Gamma a(f) = -a(f)\Gamma$, $\Gamma\Omega = \Omega$, $f \in \mathscr{K}$. Определим гиперфинитные факторы $\mathscr{M}_R = \pi_R(\mathscr{A}(\mathscr{K}))''$ и $\mathscr{M}_P = \pi(\mathscr{A}(\mathscr{K} \oplus \mathscr{K}))'' = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и рассмотрим два векторных состояния на них:

$$\omega_R(x) = \langle \Omega\otimes\Omega, \pi_R(x)\Omega\otimes\Omega\rangle, \quad x \in \mathscr{A}(\mathscr{K}\oplus 0),$$
$$\omega_P(x) = \langle \Omega\otimes\Omega, \pi(x)\Omega\otimes\Omega\rangle, \quad x \in \mathscr{A}(\mathscr{K}\oplus\mathscr{K}).$$

Заметим, что

$$\omega_R(\pi(a^*(f)a(g))) = (f, Rg), \quad f, g \in \mathscr{K},$$
$$\omega_P(\pi(a^*(f)a(g))) = (f, Pg), \quad f, g \in \mathscr{K}\oplus\mathscr{K},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} R & R^{1/2}(I-R)^{1/2} \\ R^{1/2}(I-R)^{1/2} & I-R \end{pmatrix}$$

– ортогональный проектор в гильбертовом пространстве $\mathscr{K} \oplus \mathscr{K}$. Состояние ω_R точное, а состояние ω_P чистое и получается в ходе процедуры “очищения” [12] из ω_R. Операторы

$$b(f) = \Gamma\otimes\Gamma\pi(a(0\oplus f)), \qquad b^*(f) = \pi(a^*(0\oplus f))\Gamma\otimes\Gamma, \quad f \in \mathscr{K},$$

порождают коммутант $\mathscr{M}'_R$, причем $b(f) = J\pi_R(a(f))J$, $f \in \mathscr{K}$, где J есть модулярная инволюция на $\mathscr{M}_R$, отвечающая точному нормальному состоянию ω_R. Пусть V и W – изометрические операторы в $\mathscr{K}$, коммутирующие с R. Рассмотрим квазисвободные эндоморфизмы α фактора $\mathscr{M}_R$ и γ коммутанта $\mathscr{M}'_R$, полученные подъемом V и W: $\alpha(\pi_R(a(f))) = \pi_R(a(Vf))$, $\gamma(b(f)) = b(Wf)$, $f \in \mathscr{K}$. Предположим, что у операторов V и W существуют минимальные унитарные дилатации V' и W', действующие на одном гильбертовом пространстве $\mathscr{K}'$, $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}'$, и найдется положительное сжатие R' в $\mathscr{K}'$ такое, что $V'R = R'V$, $W'R = R'W$ (о существовании такого R' см. в [13]). Зададим квазисвободный эндоморфизм θ C^*-алгебры, порожденной $\mathscr{M}_R$ и $\mathscr{M}'_R$, полагая $\theta\mid_{\mathscr{M}_R} = \alpha$, $\theta\mid_{\mathscr{M}'_R} = \gamma$. Для такого θ (заданного квазисвободным подъемом изометрических операторов V и W) верна

Теорема 4. *Эндоморфизм θ продолжается на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $R'^{1/2}(I-R')^{1/2}(V'-W') \in s_2$ (где s_2 – класс операторов Гильберта–Шмидта в $\mathscr{K}'$).*

Доказательство. Как доказано Араки в [14], любой квазисвободный $*$-автоморфизм θ', заданный на C^*-алгебре $\pi(A(\mathscr{K}'\oplus\mathscr{K}'))$ условием

$$\theta'(\pi(a(f\oplus g)))=\pi(a(V'f\oplus W'g)),\qquad f,g\in\mathscr{K}',$$

будет продолжаться на фактор $\mathscr{M}_{P'}$, отвечающий проектору

$$P'=\begin{pmatrix} R' & R'^{1/2}(I-R')^{1/2}\\ R'^{1/2}(I-R')^{1/2} & I-R'\end{pmatrix},$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} V' & 0\\ 0 & W'\end{pmatrix}P'-P'\begin{pmatrix} V' & 0\\ 0 & W'\end{pmatrix}\in s_2.$$

Унитарный оператор

$$\begin{pmatrix} V' & 0\\ 0 & W'\end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathscr{K}'\oplus\mathscr{K}'$ удовлетворяет этому условию и корректно определяет автоморфизм θ'. Автоморфизм θ' обладает свойством $\theta'(\Gamma\otimes\Gamma)=\Gamma\otimes\Gamma$, так что $\theta'(b(f))=b(W'f)$, $f\in\mathscr{K}'$. Фактор $\mathscr{M}_P=\mathscr{B}(\mathscr{H})\subset\mathscr{M}_{P'}$ является инвариантным относительно действия θ'. Рассматривая сужение, получаем $\theta'\mid_{\mathscr{M}_P}=\theta$. Отметим, что в случае $V=W$ эндоморфизм θ является регулярным расширением α.

Замечание 5. По поводу условия предыдущей теоремы см. также [15].

Пусть теперь $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ – C_0-полугруппа изометрических операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$. Тогда семейство $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ квазисвободных эндоморфизмов фактора $\mathscr{M}_R$, задаваемых при каждом $t\geqslant 0$ формулой $\alpha_t(\pi_R(a(f)))=\pi_R(a(V_tf))$, $f\in\mathscr{K}$, является E_0-полугруппой. Введем расширяющееся семейство гильбертовых пространств $\{\mathscr{H}_t\}_{t\geqslant 0}$, вложенных в пространство $\mathscr{F}(\mathscr{K})$, где при каждом $t\geqslant 0$ пространство $\mathscr{H}_t$ порождается всевозможными векторами $a^{\#}(f_1)a^{\#}(f_2)\cdots a^{\#}(f_n)\Omega$, $f_i\in\ker V_t^*$, $1\leqslant i\leqslant n$; здесь $a^{\#}=a^*$ или a. Семейство $\{\mathscr{H}_t\}_{t\geqslant 0}$ является СП гильбертовых пространств [3]. Введем СП $\{\mathscr{K}_t=\mathscr{H}_t\otimes\mathscr{J}\mathscr{H}_t\}_{t\geqslant 0}$. Пусть $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ есть регулярное расширение $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ (построенное в [3]), а P_Ω – одномерный проектор на вектор $\Omega\otimes\Omega$; тогда

$$\mathscr{K}_t=\theta_t(P_\Omega)\mathscr{H},\quad t\geqslant 0.$$

Таким образом, СП, ассоциированная с регулярным расширением, получается "удваиванием" СП, ассоциированной с исходной полугруппой. Нетрудно видеть (см. [3]), что семейство $\{\mathscr{K}_t\}_{t\geqslant 0}$ монотонно возрастает. В общем случае для e_0-полугруппы $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ эндоморфизмов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ семейство $\{\mathscr{K}_t=\gamma_t(P)\mathscr{H}\}_{t\geqslant 0}$, где P – одномерный проектор, задает СП [7]. Однако в общем случае семейство $\{\mathscr{K}_t\}_{t\geqslant 0}$ не обязано быть монотонно возрастающим. Монотонное возрастание имеет место в случае совместимости полугруппы $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ с векторным состоянием.

Замечание 6. В отличие от [3], рассмотрим две E_0-полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ на факторе $\mathscr{M}_R$, определенные соответственно квазисвободным подъемом C_0-полугрупп $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ в пространстве $\mathscr{K}$. Предположим, что у полугрупп $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ существуют минимальные унитарные дилатации $\{V_t'\}_{t\geqslant 0}$ и $\{W_t'\}_{t\geqslant 0}$, действующие на одном гильбертовом пространстве $\mathscr{K}'$, $\mathscr{K}\subset\mathscr{K}'$, и найдется положительное сжатие R' в $\mathscr{K}'$ такое, что $V_t'R=R'V_t$, $W_t'R=R'W_t$ $\forall t\geqslant 0$. Условие

$$R'^{1/2}(I-R')^{1/2}(V_t'-W_t')\in s_2,\qquad t>0,$$

достаточно для коциклической сопряженности $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ (см. [16]). Таким образом, класс всех расширений на коммутант, упомянутых в замечании 4, описывается в квазисвободном случае полугрупповым аналогом теоремы 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Powers R. T. Possible classification of continuous spatial semigroups of $*$-endomorfisms of $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ // Proceedings of Symposia in Pure Math. 1996. V. 59. P. 161–173.

[2] Powers R. T. Recent results concerning E_0-semigroup of $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ // Operator Algebras and Quantum Field Theory / ed. S. Doplicher et al. Proc. of Conf. Dedicated to D. Kastler. Cambridge (M.A.): Int. Press, 1997. P. 515–524.

[3] Амосов Г. Г., Булинский А. В. Индекс Пауэрса–Арвесона для квазисвободных динамических полугрупп // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №6. С. 933–936.

[4] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика I. М.: Мир, 1982.

[5] Kadison R., Ringrose J. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. I. London–New York: Acad. Press, 1983; II. London–New York: Acad. Press, 1986.

[6] Arveson W. Continuous analogues of Fock space // Mem. Amer. Math. Soc. 1989. V. 409. P. 1–66.

[7] Bhat B. V. R. An index theory for quantum dynamical semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. P. 561–583.

[8] Davies E. B. One-Parameter Semigroups. London–New York: Acad. Press, 1980.

[9] Булинский А. В. Алгебраические K-системы и полупотоки сдвигов Пауэрса // УМН. 1996. Т. 52. №5. С. 145–146.

[10] Accardi L., Cecchini C. Conditional expectation in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki // J. Funct. Anal. 1982. V. 45. P. 245–273.

[11] Bratteli O., Robinson D. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1981.

[12] Powers R. T., Stormer E. Free states of canonical anticommutation relations // Commun. Math. Phys. 1970. V. 16. P. 1–33.

[13] Evans D. Completely positive quasifree maps on the CAR algebra // Commun. Math. Phys. 1979. V. 70. P. 53–68.

[14] Araki H. On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms // Publ. RIMS (Kyoto Univ.). 1971. V. 6. P. 385–442.

[15] Amosov G. G. Cocycle perturbation of quasifree algebraic K-flow leads to the required asymptotic dynamics of the associated completely positive semigroup // Infinit. Dimen. Anal. Quant. Prob. Rel. Topics. 2000. V. 2. №3. P. 237–246.

[16] Murakami T., Yamagami S. On types of quasifree representations of Clifford algebra // Publ. RIMS (Kyoto Univ.). 1995. V. 31. P. 33–44.

Московский физико-технический институт
E-mail: bulinski@math.mipt.ru

Поступило
25.01.2001