Математические заметки

Том 82 выпуск 3 сентябрь 2007

УДК 517.982

О сильном CE-свойстве выпуклых множеств

М. Е. Широков

Рассматривается класс выпуклых ограниченных подмножеств сепарабельного банахового пространства, включающий в себя все выпуклые компакты, а также некоторые важные для приложений некомпактные множества. Для множеств этого класса получен простой критерий сильного CE-свойства, состоящего в том, что выпуклое замыкание любой непрерывной ограниченной функции является непрерывной ограниченной функцией. Получены некоторые результаты о расширении функций, заданных на множестве крайних точек выпуклого множества рассматриваемого класса, до выпуклых или вогнутых функций, определенных на всем этом множестве, с сохранением свойств замкнутости и непрерывности. Рассмотрены некоторые приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Понятие выпуклого замыкания функции [1], [2],[1] определенной на выпуклом подмножестве линейного топологического пространства, широко используется в современном выпуклом анализе и его приложениях. Выпуклое замыкание функции можно определить как наибольшую замкнутую выпуклую функцию, не превосходящую данную функцию. Естественно возникают вопросы о явном аналитическом представлении для выпуклого замыкания, о его совпадении с выпуклой оболочкой – наибольшей выпуклой функцией, не превосходящей данную функцию, и о связи свойств непрерывности исходной функции и ее выпуклого замыкания. Последний вопрос имеет принципиальное значение для приложений в квантовой теории информации [4], где выпуклое замыкание некоторой функции используется как характеристика физической системы (см. раздел 6).

Для любой непрерывной функции, заданной на выпуклом компакте, ее выпуклое замыкание совпадает с ее выпуклой оболочкой [3], однако уже в $\mathbb{R}^3$ существуют выпуклые компакты и заданные на них непрерывные функции, в частности, вогнутые непрерывные функции, выпуклое замыкание которых разрывно. Выпуклый компакт обладает CE-свойством, если *любая вогнутая* непрерывная функция на этом компакте имеет непрерывное выпуклое замыкание [5], [6]. В данной статье для широкого класса выпуклых множеств, названных μ-компактными, рассматривается усиленная версия CE-свойства, состоящая в том, что для *любой* непрерывной

Работа выполнена при поддержке научной программы отделения математики РАН “Современные проблемы теоретической математики” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00164-a).

[1] Также используется термин нижняя обертывающая (“lower envelope”) [3].

ограниченной функции на выпуклом μ-компакте ее выпуклое замыкание непрерывно и ограничено. Это свойство естественно назвать сильным CE-свойством. Класс μ-компактных множеств состоит из подмножеств сепарабельного банахового пространства, характеризуемых определенным свойством барицентрического отображения, которое заменяет свойство компактности при доказательстве многих результатов, в частности, некоторых результатов теории Шоке [7]. Этот класс включает в себя все выпуклые компакты, а также некоторые важные для приложений некомпакные множества, такие, как симплекс всех распределений вероятностей со счетным числом исходов и его некоммутативный аналог – множество операторов плотности на сепарабельном гильбертовом пространстве.

В статье получен простой критерий, который позволил установить сильное CE-свойство как для широкого класса выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, так и для указанных выше некомпактных множеств. Рассмотрены некоторые следствия сильного CE-свойства, связанные с проблемой расширения непрерывных и замкнутых функций, определенных на множестве крайних точек выпуклого μ-компактного множества, до выпуклых или вогнутых функций на всем этом множестве, обладающих определенными свойствами непрерывности.

В разделе 2 дано определение μ-компактного множества, приведены достаточное условие и критерий μ-компактности. Получены некоторые вспомогательные результаты о свойствах μ-компактных множеств, в частности, обобщение теоремы Шоке о барицентрическом разложении.

В разделе 3 рассматривается вопрос о представлении выпуклого замыкания произвольной замкнутой ограниченной снизу функции на μ-компактном выпуклом множестве. Установлено совпадение выпуклой оболочки и выпуклого замыкания любой непрерывной ограниченной функции – обобщение следствия I.3.6 из [3].

В разделе 4 доказана теорема о равносильности сильного CE-свойства и двух других свойств μ-компактного выпуклого множества. С помощью этой теоремы установлено сильное CE-свойство для всех P-множеств в $\mathbb{R}^n$ – множеств с определенными свойствами непрерывности границы [8], а также для симплекса всех распределений вероятностей со счетным числом исходов и множества операторов плотности на сепарабельном гильбертовом пространстве.

В разделе 5 получены некоторые результаты о расширении замкнутых ограниченных снизу функций, заданных на множестве крайних точек μ-компактного выпуклого множества, обладающего сильным CE-свойством, до выпуклых или вогнутых функций, определенных на всем этом множестве, с сохранением свойства замкнутости. В частности, доказано существование у любой непрерывной ограниченной функции, определенной на множестве крайних точек, непрерывного ограниченного выпуклого расширения, обладающего определенными свойствами максимальности. Получен критерий непрерывности выпуклого замыкания вогнутых функций.

В разделе 6 рассмотрены некоторые приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

В разделе 7 обсуждаются возможности обобщения основных результатов статьи на более широкий класс выпуклых множеств.

2. Об одном классе выпуклых множеств. В разделах 2–6 будем предполагать, что $\mathscr{A}$ – замкнутое ограниченное подмножество сепарабельного банахова пространства. Будем использовать следующие обозначения:

$\mathrm{co}(\mathscr{A})$, $\sigma\text{-}\mathrm{co}(\mathscr{A})$ и $\overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$ – соответственно выпуклая оболочка, σ-выпуклая оболочка[2] и выпуклое замыкание множества $\mathscr{A}$;

$\operatorname{extr}\mathscr{A}$ – множество крайних точек выпуклого множества $\mathscr{A}$;

$C(\mathscr{A})$ – множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathscr{A}$;

$P(\mathscr{A})$ и $\widehat{P}(\mathscr{A})$ – соответственно множество выпуклых непрерывных ограниченных функций на выпуклом множестве $\mathscr{A}$ и множество функций, представимых в виде поточечных пределов монотонных последовательностей функций из $P(\mathscr{A})$;

$\mathrm{co}\, f$ и $\overline{\mathrm{co}}\, f$ – соответственно выпуклая оболочка и выпуклое замыкание функции f, определенной на выпуклом множестве $\mathscr{A}$ [1], [2];

$\mathfrak{P}_n = \{\{\pi_i\}_{i=1}^n \mid \pi_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \pi_i = 1\}$ – симплекс всех распределений вероятностей с $n \leqslant +\infty$ исходами.

Выпуклое множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\mathscr{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [9], обозначим через $M_1^+(\mathscr{A})$. Меру из $M_1^+(\mathscr{A})$, сосредоточенную в точке $x \in \mathscr{A}$, обозначим через $\delta(x)$. Рассмотрим барицентрическое отображение

$$M_1^+(\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) = \int_{\mathscr{A}} x\, \mu(dx) \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathscr{A}, \tag{1}$$

где интеграл определяется как интеграл Бохнера. Выпуклое замкнутое подмножество множества $M_1^+(\mathscr{A})$, состоящее из таких мер μ, что $b(\mu) = x \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$, обозначим через $M_x(\mathscr{A})$.

Отображение (1) непрерывно (см., например, [10; раздел 2]); следовательно, образ любого компактного подмножества множества $M_1^+(\mathscr{A})$ при отображении (1) является компактным подмножеством множества $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$. Выделим класс выпуклых множеств, для которых имеет место обратное утверждение.

Определение 1. Множество $\mathscr{A}$ назовем *μ-компактным*, если прообраз любого компактного подмножества множества $\overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$ при отображении (1) является компактным подмножеством множества $M_1^+(\mathscr{A})$.

Заметим, что всякое компактное множество $\mathscr{A}$ является μ-компактным, поскольку из компактности $\mathscr{A}$ следует компактность $M_1^+(\mathscr{A})$ [9].

Предложение 1. *Выпуклое множество $\mathscr{A}$ является μ-компактным тогда и только тогда, когда для любого компактного подмножества $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество $\mathscr{K}_\varepsilon \subseteq \mathscr{A}$ такое, что для любого $x \in \mathscr{K}$ из разложения $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, где $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{A}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{P}_n$, следует $\sum_{i:x_i\in\mathscr{A}\setminus\mathscr{K}_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon$.*

Выпуклое множество $\mathscr{A}$ является μ-компактным, если существует семейство $F(\mathscr{A})$ вогнутых неотрицательных функций на $\mathscr{A}$, обладающее следующими свойствами:

- *множество $\{x \in \mathscr{A} : f(x) \leqslant c\}$ относительно компактно для любой функции $f \in F(\mathscr{A})$ и любого $c > 0$;*
- *для любого компактного подмножества $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{A}$ найдется функция $f \in F(\mathscr{A})$ такая, что $\sup_{x\in\mathscr{K}} f(x) < +\infty$.*

[2]Множество всех счетных выпуклых комбинаций элементов множества $\mathscr{A}$.

Доказательство. Первое утверждение предложения 1 следует из теоремы Прохорова [9], поскольку указанное в нем свойство означает плотность множества всех мер из $M_1^+(\mathscr{A})$ с конечным носителем и барицентром в $\mathscr{K}$, которая в силу приведенной ниже леммы 1 и теоремы 6.1 из [9] равносильна плотности множества всех мер из $M_1^+(\mathscr{A})$ с барицентром в $\mathscr{K}$.

Доказательство второго утверждения является обобщением рассуждений в доказательстве предложения 2 в [11]. Пусть $\mathscr{K}$ – компактное подмножество $\mathscr{A}$ и f – функция из $F(\mathscr{A})$ такая, что $\sup_{x\in\mathscr{K}} f(x) = c < +\infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ пусть $\mathscr{K}_\varepsilon = \{x \in \mathscr{A} : f(x) \leqslant c/\varepsilon\}$ – относительно компактное подмножество множества $\mathscr{A}$. В силу вогнутости и неотрицательности функции f для произвольного x из $\mathscr{K}$ и его разложения $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ имеем

$$c \geqslant f(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geqslant \sum_{i:x_i\in\mathscr{A}\setminus\mathscr{K}_\varepsilon} \lambda_i f(x_i) > \frac{c}{\varepsilon} \sum_{i:x_i\in\mathscr{A}\setminus\mathscr{K}_\varepsilon} \lambda_i,$$

откуда следует $\sum_{i:x_i\in\mathscr{A}\setminus\overline{\mathscr{K}}_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое множество. Тогда каждая мера μ_0 из $M_1^+(\mathscr{A})$ является пределом последовательности $\{\mu_n\}$ мер из $M_1^+(\mathscr{A})$ с конечным носителем таких, что $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ для всех n.*

Доказательство этой леммы является естественным обобщением доказательства леммы 1 из [11].

С помощью приведенного в предложении 1 достаточного условия можно показать μ-компактность некомпактного множества $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов. Для этого в качестве $F(\mathfrak{P}_{+\infty})$ можно взять семейство функций вида $\{p_i\}_{i=1}^{+\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} p_i h_i$, где $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$.

Многие результаты теории Шоке, развитой для компактных выпуклых множеств, легко обобщаются на случай μ-компактных выпуклых множеств. Дальнейшее изложение существенно опирается на следующее обобщение теоремы Шоке [7].

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{A}$ – μ-компактное множество. Любой элемент из $\overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$ является барицентром некоторой меры из $M_1^+(\mathscr{A})$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$. По определению выпуклого замыкания существует последовательность $\{x_n\} \subseteq \mathrm{co}(\mathscr{A})$, сходящаяся к x_0. При каждом n элемент x_n является барицентром некоторой меры μ_n из $M_1^+(\mathscr{A})$ с конечным носителем. В силу μ-компактности множества $\mathscr{A}$ последовательность $\{\mu_n\}$ относительно компактна и, следовательно, имеет частичный предел $\mu_0 \in M_1^+(\mathscr{A})$. Из непрерывности отображения (1) следует, что x_0 является барицентром меры μ_0.

Если $\mathscr{A}$ – выпуклое множество, то на множестве $M_1^+(\mathscr{A})$ можно ввести следующее отношение частичного порядка, часто называемое порядком Шоке [7], [12]. Будем считать, что $\mu \succ \nu$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy) \geqslant \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\nu(dy) \qquad \forall\, f \in P(\mathscr{A}).$$

Мера $\mu \in M_1^+(\mathscr{A})$ называется *максимальной*, если из $\nu \succ \mu$ следует $\nu = \mu$ для любой меры $\nu \in M_1^+(\mathscr{A})$.

Нам потребуются следующие свойства частичного порядка Шоке.

Лемма 2. *Пусть* $\mathscr{A}$ – *выпуклое* μ-*компактное*[3] *множество.*

А) *Если* μ *и* ν – *меры из* $M_1^+(\mathscr{A})$ *такие, что* $\mu \succ \nu$, *то*

$$b(\mu) = b(\nu) \qquad \text{и} \qquad \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy) \geqslant \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\nu(dy) \quad \forall\, f \in \widehat{P}(\mathscr{A}).$$

Б) *Пусть* $\{\mu_n\}$ *и* $\{\nu_n\}$ – *последовательности мер из* $M_1^+(\mathscr{A})$, *сходящиеся соответственно к мерам* μ *и* ν *из* $M_1^+(\mathscr{A})$, *такие, что* $\mu_n \succ \nu_n$ *для всех* n. *Тогда* $\mu \succ \nu$.

В) *Если* $\operatorname{extr}\mathscr{A} = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$, *то множество максимальных мер в* $M_1^+(\mathscr{A})$ *совпадает с* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. *Если дополнительно* $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, *то для любой меры* μ *из* $M_1^+(\mathscr{A})$ *существует максимальная в* $M_1^+(\mathscr{A})$ *мера* $\widehat{\mu}$ *такая, что* $\widehat{\mu} \succ \mu$.

Доказательство. Утверждения А и Б легко выводятся из определений и теоремы о монотонной сходимости для интеграла Лебега.

Первую часть утверждения В можно доказать, используя теорему 5.2 из [10], теорему 6.3.9 из [12] и рассуждение в доказательстве теоремы 1.1 из [13]. Конструктивное доказательство второй части утверждения В можно получить, используя лемму 1 и приведенную ниже лемму 3.

Лемма 3. *Пусть* $\mathscr{A}$ – μ-*компактное выпуклое множество такое, что* $\operatorname{extr}\mathscr{A} = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$ *и* $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. *Для любой последовательности* $\{\mu_n\}$ *мер из* $M_1^+(\mathscr{A})$ *с конечным носителем, сходящейся к некоторой мере* μ_0 *из* $M_1^+(\mathscr{A})$, *существуют подпоследовательность* $\{\mu_{n_k}\}$ *и последовательность* $\{\widehat{\mu}_k\}$ *мер из* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, *сходящаяся к некоторой мере* $\widehat{\mu}_0$ *из* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, *такие, что*

$$b(\widehat{\mu}_k) = b(\mu_{n_k}) \quad \forall\, k \qquad \text{и} \qquad \widehat{\mu}_0 \succ \mu_0.$$

Если $\mathscr{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, *то в качестве* $\{\widehat{\mu}_k\}$ *можно выбрать последовательность, состоящую из атомических мер.*

Доказательство. В силу предложения 2 при каждом n каждый атом x_i^n меры $\mu_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \pi_i^n \delta(x_i^n)$ является барицентром некоторой меры μ_i^n из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. Нетрудно видеть, что $\widehat{\mu}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \pi_i^n \mu_i^n$ – мера из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ такая, что $b(\widehat{\mu}_n) = b(\mu_n)$ и $\widehat{\mu}_n \succ \mu_n$. Из непрерывности отображения (1) следует компактность множества $\{b(\mu_n)\}_{n\geqslant 0}$, которое совпадает с замыканием множества $b(\{\widehat{\mu}_n\}_{n>0})$. В силу μ-компактности множества $\mathscr{A}$ последовательность $\{\widehat{\mu}_n\}_{n>0}$ относительно компактна в $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, а значит, содержит подпоследовательность $\{\widehat{\mu}_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой мере $\{\widehat{\mu}_0\}$ из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. Поскольку $\widehat{\mu}_{n_k} \succ \mu_{n_k}$ для всех k, из утверждения Б леммы 2 следует, что $\widehat{\mu}_0 \succ \mu_0$. Обозначив $\widehat{\mu}_k = \widehat{\mu}_{n_k}$, получаем основное утверждение леммы.

Если $\mathscr{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, то меры μ_i^n в приведенном выше рассуждении можно выбрать атомическими.

Из леммы 3 следует наблюдение о плотности атомических мер в множестве всех максимальных мер с данным барицентром.

[3] Условие μ-компактности используется только в доказательстве второго утверждения пункта В – оно позволяет показать существование меры $\widehat{\mu}$ без использования леммы Цорна.

Лемма 4. *Пусть* $\mathscr{A}$ – *μ-компактное выпуклое множество такое, что* $\operatorname{extr}\mathscr{A} = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$ *и* $\mathscr{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. *Любая мера* μ_0 *из* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ *является пределом последовательности* $\{\mu_n\}$ *атомических мер из* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ *таких, что* $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ *для всех* n.

Доказательство. В силу леммы 1 любая мера μ_0 из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ является пределом последовательности $\{\mu_n\}$ мер из $M_1^+(\mathscr{A})$ с конечным носителем такой, что $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ для всех n. Применяя лемму 3 и учитывая максимальность в $M_1^+(\mathscr{A})$ меры μ_0, которая следует из утверждения B леммы 2, получаем последовательность мер $\{\widehat{\mu}_n\}$ с требуемыми свойствами.

3. О выпуклом замыкании. Для любой замкнутой ограниченной снизу функции f на замкнутом множестве $\mathscr{A}$ функционал

$$\mu \mapsto \int_{\mathscr{A}} f(x)\,\mu(dx) \tag{2}$$

корректно определен и полунепрерывен снизу на множестве $M_1^+(\mathscr{A})$.

Предложение 3. *Выпуклое замыкание любой ограниченной снизу замкнутой функции* f *на* μ*-компактном выпуклом множестве* $\mathscr{A}$ *определяется выражением*

$$\overline{\operatorname{co}}\, f(x) = \inf_{\mu\in M_x(\mathscr{A})} \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy) \qquad \forall\, x \in \mathscr{A}. \tag{3}$$

Для любого $x \in \mathscr{A}$ *существует мера* μ_x^f *в* $M_x(\mathscr{A})$ *такая, что*

$$\overline{\operatorname{co}}\, f(x) = \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_x^f(dy).$$

Если $\operatorname{extr}\mathscr{A} = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$ *и* $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, *а* f – *вогнутая ограниченная снизу замкнутая функция такая, что* $-f \in \widehat{P}(\mathscr{A})$, *то в качестве* μ_x^f *можно выбрать меру с носителем в* $\operatorname{extr}\mathscr{A}$.

Замечание 1. В выражении (3) точную нижнюю грань по всем мерам из $M_x(\mathscr{A})$ в общем случае нельзя заменить на точную нижнюю грань по всем атомическим мерам из $M_x(\mathscr{A})$ (т.е. интеграл нельзя заменить на конечную или счетную сумму). Существуют функции f, для которых эти точные нижние грани различны (см. примеры в замечаниях 1 и 2 в [14]).

Доказательство. В силу утверждения A приведенной ниже леммы 5 функция $\check{f}_{\mathscr{A}} = \inf_{\mu\in M_x(\mathscr{A})}\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy)$ выпукла и замкнута на множестве $\mathscr{A}$. Поэтому $\check{f}_{\mathscr{A}}(x) \leqslant \overline{\operatorname{co}}\, f(x)$ для всех x из $\mathscr{A}$. Поскольку $\overline{\operatorname{co}}\, f$ – выпуклая замкнутая функция, мажорируемая функцией f, из неравенства Йенсена следует, что

$$\overline{\operatorname{co}}\, f(x) \leqslant \inf_{\mu\in M_x(\mathscr{A})} \int_{\mathscr{A}} \overline{\operatorname{co}}\, f(y)\,\mu(dy) \leqslant \inf_{\mu\in M_x(\mathscr{A})} \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy) = \check{f}_{\mathscr{A}}(x)$$

для всех x из $\mathscr{A}$. Поэтому $\check{f}_{\mathscr{A}} = \overline{\operatorname{co}}\, f$.

Существование меры μ_x^f следует из утверждения A леммы 5.

Пусть f – вогнутая ограниченная снизу замкнутая функция такая, что $-f \in \widehat{P}(\mathscr{A})$, а μ_x^f – мера, существование которой для любого $x \in \mathscr{A}$ установлено выше.

В силу утверждения В леммы 2 существует максимальная в $M_1^+(\mathscr{A})$ мера $\widehat{\mu}_x^f$, принадлежащая $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, такая, что $\widehat{\mu}_x^f \succ \mu_x^f$. В силу утверждения А леммы 2 $b(\widehat{\mu}_x^f)=x$ и точная нижняя грань в выражении для $\overline{\operatorname{co}}\, f(x)$ достигается на мере $\widehat{\mu}_x^f$.

Лемма 5. *Пусть f – замкнутая ограниченная снизу функция на множестве $\mathscr{A}$.*

А) *Если $\mathscr{A}$ μ-компактно, то функция*

$$\check{f}_{\mathscr{A}}(x)=\inf_{\mu\in M_x(\mathscr{A})}\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy)$$

выпукла и замкнута на множестве $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$, причем для любого $x\in\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$ точная нижняя грань в определении величины $\check{f}_{\mathscr{A}}(x)$ достигается на некоторой мере из $M_x(\mathscr{A})$.

Б) *Если отображение $M_1^+(\mathscr{A})\ni\mu\mapsto b(\mu)\in\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$ открыто и сюръективно, то функция*

$$\widehat{f}_{\mathscr{A}}(x)=\sup_{\mu\in M_x(\mathscr{A})}\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy)$$

вогнута и замкнута на множестве $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$.

Доказательство. А) Функция $\check{f}_{\mathscr{A}}$ корректно определена на $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$, поскольку в силу предложения 2 множество $M_x(\mathscr{A})$ непусто для любого x из $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$. Выпуклость этой функции прямо следует из ее определения и выпуклости множества $M_1^+(\mathscr{A})$. В силу полунепрерывности снизу функционала (2) и компактности множества $M_x(\mathscr{A})$, которая следует из μ-компактности множества $\mathscr{A}$, для каждого x из $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$ точная нижняя грань в определении величины $\check{f}_{\mathscr{A}}(x)$ достигается на некоторой мере из $M_x(\mathscr{A})$.

Предположим, что функция $\check{f}_{\mathscr{A}}$ не является замкнутой. Тогда существует последовательность $\{x_n\}\subset\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$, сходящаяся к $x_0\in\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$, такая, что

$$\lim_{n\to+\infty}\check{f}(x_n)<\check{f}(x_0). \tag{4}$$

В силу предыдущего наблюдения для каждого $n=1,2,\dots$ в $M_{x_n}(\mathscr{A})$ существует мера μ_n такая, что

$$\check{f}_{\mathscr{A}}(x_n)=\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_n(dy).$$

Из μ-компактности множества $\mathscr{A}$ и компактности последовательности $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ следует относительная компактность последовательности мер $\{\mu_n\}_{n>0}$. Следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой мере μ_0. Из непрерывности отображения (1) следует, что μ_0 – мера из $M_{x_0}(\mathscr{A})$. В силу полунепрерывности снизу функционала (2) имеем

$$\check{f}_{\mathscr{A}}(x_0)\leqslant\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_0(dy)\leqslant\liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_{n_k}(dy)=\lim_{k\to+\infty}\check{f}_{\mathscr{A}}(x_{n_k}),$$

что противоречит (4).

Б) Функция $\widehat{f}_{\mathscr{A}}$ корректно определена на $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$, поскольку в силу сюръективности барицентрического отображения множество $M_x(\mathscr{A})$ непусто для любого x из $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$. Вогнутость этой функции прямо следует из ее определения и выпуклости множества $M_1^+(\mathscr{A})$. Предположим, что функция $\widehat{f}_{\mathscr{A}}$ не является замкнутой. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset \overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$, сходящаяся к $x_0 \in \overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$, такая, что

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{f}_{\mathscr{A}}(x_n) < \widehat{f}_{\mathscr{A}}(x_0). \tag{5}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ пусть μ_0^ε – такая мера из $M_{x_0}(\mathscr{A})$, что

$$\widehat{f}_{\mathscr{A}}(x_0) < \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_0^\varepsilon(dy) + \varepsilon.$$

В силу открытости барицентрического отображения существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и последовательность $\{\mu_k\}$ мер из $M_1^+(\mathscr{A})$, сходящаяся к мере μ_0^ε, такие, что $b(\mu_k) = x_{n_k}$ при каждом k. В силу полунепрерывности снизу функционала (2) имеем

$$\widehat{f}_{\mathscr{A}}(x_0) \leqslant \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_0^\varepsilon(dy) + \varepsilon \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu_k(dy) + \varepsilon \leqslant \lim_{k\to+\infty} \widehat{f}_{\mathscr{A}}(x_{n_k}) + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε противоречит (5).

Из предложения 3 и леммы 1 вытекает следующее утверждение, которое является обобщением следствия I.3.6 из [3] на случай μ-компактных выпуклых множеств.

Следствие 1. *Если $\mathscr{A}$ – μ-компактное выпуклое множество, то выпуклое замыкание любой функции $f \in C(\mathscr{A})$ определяется выражением*

$$\overline{\mathrm{co}}\, f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pi_i f(x_i) \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i = x,\ \{x_i\} \subset \mathscr{A},\ \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_n \right\} \qquad \forall\, x \in \mathscr{A}.$$

Это выражение означает, что $\overline{\mathrm{co}}\, f = \mathrm{co}\, f$ для любой функции $f \in C(\mathscr{A})$.

4. Сильное CE-свойство для выпуклых μ-компактных множеств. CE-свойство для выпуклого компакта $\mathscr{A}$ состоит в том, что выпуклое замыкание любой вогнутой функции из $C(\mathscr{A})$ является функцией из $C(\mathscr{A})$ [5], [6]. Следуя этой терминологии, введем следующее определение.

Определение 2. Выпуклое топологическое пространство $\mathscr{A}$ обладает сильным CE-свойством, если выпуклое замыкание любой функции из $C(\mathscr{A})$ является функцией из $C(\mathscr{A})$.

В [5] показано, что для выпуклого компакта $\mathscr{A}$ из CE-свойства следует замкнутость множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$ и что CE-свойство равносильно открытости отображения $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathscr{A}$ (которое является сюръективным в силу теоремы Шоке).

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое μ-компактное множество. Следующие свойства равносильны:*

(i) *отображение $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \times [0,1] \ni (x,y,\lambda) \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathscr{A}$ открыто;*

(ii) *барицентрическое отображение $M_1^+(\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathscr{A}$ открыто;*

(iii) *множество $\mathscr{A}$ обладает сильным* CE-*свойством.*

Из свойств (i)–(iii) *следует замкнутость множества* $\operatorname{extr}\mathscr{A}$, *а при условии* $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ *и открытость отображения* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathscr{A}$.[4]

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Покажем, что из свойства (i) следует открытость отображения

$$\Psi_n \colon \mathscr{A}^{\times n} \times \mathfrak{P}_n \ni \bigl(\{x_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n\bigr) \mapsto \sum_{i=1}^n \pi_i x_i \in \mathscr{A},$$

где

$$\mathscr{A}^{\times n} = \underbrace{\mathscr{A} \times \cdots \times \mathscr{A}}_{n}$$

при любом n. Свойство (i) означает открытость отображения Ψ_2. Предположим, что отображение Ψ_{n-1} открыто. В силу симметрии достаточно показать открытость отображения Ψ_n на открытом множестве

$$\mathfrak{M}_0 = \mathscr{A}^{\times n} \times \bigl(\mathfrak{P}_n \setminus \{(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1)\}\bigr).$$

Нетрудно видеть, что открытым является отображение Π_n:

$$\mathfrak{P}_n \setminus \{(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1)\} \ni \{\pi_i\}_{i=1}^n \mapsto \left(\left\{\frac{\pi_i}{1-\pi_n}\right\}_{i=1}^{n-1}, \{1-\pi_n, \pi_n\}\right) \in \mathfrak{P}_{n-1} \times \mathfrak{P}_2.$$

Открытость отображения Ψ_n на множестве $\mathfrak{M}_0$ следует из его представления в виде произведения открытого на множестве $\mathfrak{M}_0$ отображения $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}^{\times n}} \times \Pi_n$, отображения

$$\bigl(\{x_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^{n-1}, \{\upsilon, 1-\upsilon\}\bigr) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i x_i, x_n, \{\upsilon, 1-\upsilon\}\right)$$

из $\mathscr{A}^{\times n} \times \mathfrak{P}_{n-1} \times \mathfrak{P}_2$ в $\mathscr{A}^{\times 2} \times \mathfrak{P}_2$, которое открыто по предположению индукции, и открытого в силу свойства (i) отображения Ψ_2.

Пусть U – произвольное открытое подмножество $M_1^+(\mathscr{A})$. Предположим, что множество $b(U)$ не является открытым. Тогда для некоторого $x_0 \in b(U)$ существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathscr{A} \setminus b(U)$, сходящаяся к x_0.

Пусть μ_0 – мера из U такая, что $b(\mu_0) = x_0$. В силу леммы 1 можно считать, что μ_0 – мера с конечным носителем, т.е. $\mu_0 = \sum_{i=1}^m \pi_i^0 \delta(x_i^0)$ при некоторых $\{x_i^0\}_{i=1}^m \in \mathscr{A}^m$, $\{\pi_i^0\}_{i=1}^m \in \mathfrak{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$. В силу установленной открытости отображения Ψ_m существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и последовательность мер $\{\mu_k = \sum_{i=1}^m \pi_i^k \delta(x_i^k)\}$, сходящаяся к мере μ_0, такие, что $b(\mu_k) = \sum_{i=1}^m \pi_i^k x_i^k = x_{n_k}$ для всех k. Из открытости U следует, что μ_k лежит в U для всех достаточно больших k, что противоречит определению последовательности $\{x_n\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) В силу предложения 3 полунепрервыность сверху функции $\overline{\operatorname{co}}\, f$ при выполнении свойства (ii) следует из утверждения Б леммы 5, примененной к функции $-f$.

[4] См. замечание после доказательства теоремы.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Пусть $U_r(x)$ – шаровая окрестность точки $x \in \mathscr{A}$ радиуса r. Нетрудно видеть, что свойство (i) равносильно следующему: для любых x и y из $\mathscr{A}$, любого λ из $[0,1]$ и любой последовательности $\{z_n\} \subset \mathscr{A}$, сходящейся к $\lambda x + (1-\lambda)y$, при каждом $m = 1,2,3\dots$ в $U_{1/m}(x)$ и в $U_{1/m}(y)$ существуют точки x_m и y_m такие, что

$$\lambda_m x_m + (1-\lambda_m)y_m \in \{z_n\}_{n>m}$$

при некотором $\lambda_m \in [0,1]$. Поэтому нарушение свойства (i) гарантирует существование таких x_0 и y_0 из $\mathscr{A}$, λ_0 из $[0,1]$, последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к $\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)y_0$, и числа m_0, что

$$\operatorname{co}\bigl(U_{1/m_0}(x_0) \cup U_{1/m_0}(y_0)\bigr) \cap \{z_n\}_{n>m_0} = \varnothing. \tag{6}$$

Пусть f – непрерывная функция на $\mathscr{A}$ с множеством значений $[0,1]$ такая, что

$$f(x_0) = f(y_0) = 0 \qquad \text{и} \qquad f(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathscr{A} \setminus \bigl(U_{1/2m_0}(x_0) \cup U_{1/2m_0}(y_0)\bigr).$$

Предположим, что функция $\overline{\operatorname{co}}\, f$, совпадающая в силу следствия 1 с функцией $\operatorname{co} f$, является непрерывной. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{co} f(z_n) = \operatorname{co} f(\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)y_0) = 0. \tag{7}$$

При каждом n любую меру из $M_{z_n}(\mathscr{A})$ с конечным носителем можно представить в виде

$$\sum_i \pi_i^n \delta(x_i^n) + \sum_j \upsilon_j^n \delta(y_j^n) + \sum_k \eta_k^n \delta(r_k^n), \tag{8}$$

где $\{x_i^n\} \subset U_{1/2m_0}(x_0)$, $\{y_j^n\} \subset U_{1/2m_0}(y_0)$, $\{r_k^n\} \subset \mathscr{A} \setminus (U_{1/2m_0}(x_0) \cup U_{1/2m_0}(y_0))$ и $\{\pi_i^n\}$, $\{\upsilon_j^n\}$, $\{\eta_k^n\}$ – наборы положительных чисел такие, что

$$\sum_i \pi_i^n + \sum_j \upsilon_j^n + \sum_k \eta_k^n = 1 \qquad \text{и} \qquad \sum_i \pi_i^n x_i^n + \sum_j \upsilon_j^n y_j^n + \sum_k \eta_k^n r_k^n = z_n.$$

Из (7) следует существование при каждом n меры вида (8) такой, что

$$\lim_{n\to+\infty}\biggl(\sum_i \pi_i^n f(x_i^n) + \sum_j \upsilon_j^n f(y_j^n) + \sum_k \eta_k^n f(r_k^n)\biggr) = 0.$$

По определению функции f это возможно, только если $\lim_{n\to+\infty} \bar{\eta}_n = 0$, где $\bar{\eta}_n = \sum_k \eta_k^n$. Пусть $\bar{\pi}_n = \sum_i \pi_i^n$, $\bar{\upsilon}_n = \sum_j \upsilon_j^n$ и $\bar{r}_n = \bar{\eta}_n^{-1} \sum_k \eta_k^n r_k^n$. Заметим, что

$$\bar{x}_n = \bar{\pi}_n^{-1} \sum_i \pi_i^n x_i^n \in U_{1/2m_0}(x_0) \qquad \text{и} \qquad \bar{y}_n = \bar{\upsilon}_n^{-1} \sum_j \upsilon_j^n y_j^n \in U_{1/2m_0}(y_0)$$

в силу выпуклости окрестностей $U_{1/2m_0}(x_0)$ и $U_{1/2m_0}(y_0)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\bar{\pi}_n \geqslant \bar{\upsilon}_n$ при каждом n. Положим $\bar{x}'_n = (\bar{\pi}_n + \bar{\eta}_n)^{-1}(\bar{\pi}_n \bar{x}_n + \bar{\eta}_n \bar{r}_n)$, $\bar{\pi}'_n = \bar{\pi}_n + \bar{\eta}_n$. Тогда

$$z_n = \bar{\pi}'_n \bar{x}'_n + \bar{\upsilon}_n \bar{y}_n \qquad \forall\, n. \tag{9}$$

Из стремления к нулю последовательности $\{\bar{\eta}_n\}$ и ограниченности множества $\mathscr{A}$ следует, что $\bar{x}'_n \in U_{1/m_0}(x_0)$ при всех достаточно больших n, что с учетом $\bar{y}_n \in U_{1/2m_0}(y_0)$ и (9) противоречит (6).

Равносильность свойств (i)–(iii) доказана.

Из свойства (i) непосредственно следует замкнутость множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$.

Для доказательства того, что из свойств (i)–(iii) следует открытость отображения $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathscr{A}$, достаточно показать, что для любой меры μ_0 из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ и любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathscr{A}$, сходящейся к $b(\mu_0) = x_0$, существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и последовательность $\{\mu_k\}$ мер из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, сходящаяся к мере μ_0, такие, что $b(\mu_k) = x_{n_k}$ для всех k. Свойство (ii) гарантирует для данных меры μ_0 и последовательности $\{x_n\}$ существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и последовательности $\{\mu_k\}$ мер из $M_1^+(\mathscr{A})$, сходящейся к мере μ_0, таких, что $b(\mu_k) = x_{n_k}$ для всех k. В силу леммы 1 можно считать, что последовательность $\{\mu_k\}$ состоит из мер с конечным носителем. В силу леммы 3 существует подпоследовательность $\{x_{n_{k_m}}\}$ последовательности $\{x_{n_k}\}$ и последовательность $\{\widehat{\mu}_m\}$ мер из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, сходящаяся к некоторой мере $\widehat{\mu}_0$ из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, такие, что

$$b(\widehat{\mu}_m) = b(\mu_{k_m}) = x_{n_{k_m}} \quad \forall\, m \qquad \text{и} \qquad \widehat{\mu}_0 \succ \mu_0.$$

Из максимальности в $M_1^+(\mathscr{A})$ меры μ_0, которая гарантируется леммой 2, следует, что $\widehat{\mu}_0 = \mu_0$. Таким образом, подпоследовательность $\{x_{n_{k_m}}\}$ и последовательность мер $\{\widehat{\mu}_m\}$ обладают требуемыми свойствами.

С помощью теоремы 1 можно показать, что класс выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, обладающих сильным CE-свойством, достаточно широк и включает в себя класс P-множеств в $\mathbb{R}^n$ (см. определение в [8], [2]). Действительно, используя теоремы 1.8.1 и 1.8.2 из [2], нетрудно показать открытость отображения $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \ni (x, y) \mapsto \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathscr{A}$ при каждом фиксированном $\lambda \in [0,1]$ для любого P-множества $\mathscr{A}$ в $\mathbb{R}^n$, что гарантирует выполнение свойства (i) для этого множества. Отметим, что класс P-множеств включает в себя все выпуклые многогранники и все строго выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$ и что любой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$ является P-множеством [2]. Однако, уже в $\mathbb{R}^3$ не всякий выпуклый компакт, обладающий сильным CE-свойством, является P-множеством, как показывает пример 1.8.1 из [2].

Заметим также, что в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ есть выпуклые компакты, не обладающие сильным CE-свойством. В силу теоремы 1 в качестве примера можно взять любой компакт с незамкнутым множеством крайних точек. Протасов (устное сообщение) доказал, что для выпуклых компактов в $\mathbb{R}^3$ свойство (i) равносильно замкнутости множества крайних точек и построил пример выпуклого компакта в $\mathbb{R}^4$, имеющего замкнутое множество крайних точек и обладающего CE-свойством, для которого свойство (i) не имеет места. Таким образом, различие между CE-свойством и сильным CE-свойством для выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ проявляется при $n \geqslant 4$.

В [5] показано, что образ любого компакта, обладающего CE-свойством, при открытом непрерывном аффинном отображении также обладает CE-свойством. Аналог этого утверждения для сильного CE-свойства установлен в приведенном ниже следствии (с условием а)), которое легко доказать, используя равносильность свойств (i) и (iii) в теореме 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\mathscr{A}$ – μ-компактное выпуклое множество, обладающее сильным* CE-*свойством, а* Φ *– непрерывное аффинное отображение множества* $\mathscr{A}$

на μ-компактное множество $\mathscr{B}$. Множество $\mathscr{B}$ обладает сильным CE-*свойством при выполнении одного из следующих условий*:

а) Φ – *открытое отображение*;

б) $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ *и* $\Phi^2 = \Phi$.

Используя следствие 2 с условием б) и предложение 4 из раздела 6, можно установить сильное CE-свойство для μ-компактного множества $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов. В качестве Φ в этом случае следует взять отображение, ставящее в соответствие любому оператору плотности набор его диагональных элементов в некотором фиксированном базисе.

5. О выпуклом и вогнутом расширениях. Пусть $\mathscr{A}$ – μ-компактное выпуклое множество такое, что $\operatorname{extr}\mathscr{A} = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$ и $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, а f – замкнутая ограниченная снизу функция на $\operatorname{extr}\mathscr{A}$. В силу предложения 2 множество $M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ всех мер из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ с барицентром x непусто для каждого x из $\mathscr{A}$. Следовательно, на множестве $\mathscr{A}$ корректно определены функции

$$f_*(x) = \inf_{\mu\in M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})} \int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy), \qquad f^*(x) = \sup_{\mu\in M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})} \int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy). \tag{10}$$

В силу выпуклости множества $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ первая из этих функций выпукла, а вторая – вогнута на $\mathscr{A}$. Поскольку функции f_* и f^* совпадают с f на множестве $\operatorname{extr}\mathscr{A}$, эти функции можно рассматривать соответственно как выпуклое и вогнутое расширения функции f на множество $\mathscr{A}$. Свойства этих расширений определяет следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое μ-компактное множество такое, что* $\operatorname{extr}\mathscr{A} = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$ *и* $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, *а f – замкнутая ограниченная снизу функция на* $\operatorname{extr}\mathscr{A}$.

А) *Функция f_* является наибольшим выпуклым замкнутым расширением функции f на множество $\mathscr{A}$.*[5] *Для каждого x из $\mathscr{A}$ существует мера $\widehat{\mu}_x^f$ из $M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ такая, что*

$$f_*(x) = \int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}} f(y)\,\widehat{\mu}_x^f(dy).$$

Б) *Если отображение $M_1^+(\operatorname{extr}\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathscr{A}$ открыто, то функция f^* является замкнутой. Если дополнительно $\mathscr{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, то функция f^* является наименьшим вогнутым ограниченным снизу расширением функции f на множество $\mathscr{A}$ и*

$$f^*(x) = \sup\biggl\{\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i f(x_i) \biggm| \sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i x_i = x,\ \{x_i\}\subset \operatorname{extr}\mathscr{A},\ \{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_\infty\biggr\} \qquad \forall\, x\in\mathscr{A}.$$

Замечание 2. В силу теоремы 1 все основные условия теоремы 2 выполнены для выпуклого μ-компактного множества $\mathscr{A}$, обладающего сильным CE-свойством, такого, что $\mathscr{A} = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$.

Аналоги утверждений теоремы 2 о существовании меры $\widehat{\mu}_x^f$ и о представлении для функции f^* в случае $\mathscr{A} = \sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ не имеют места для функций f^* и f_*

[5] Такая функция в [3] называется нижней обертывающей для f.

соответственно (см. примеры в замечании 2 в [14]). Условие ограниченности снизу в утверждении Б существенно. Действительно, функция

$$g(x)=\begin{cases} f^*(x), & x\in\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A}),\\ -\infty, & x\in\mathscr{A}\setminus\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A}),\end{cases}$$

является вогнутым расширением функции f на множество $\mathscr{A}$, мажорируемым функцией f^*.

Доказательство. Из леммы 5 (для множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$) с учетом μ-компактности множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}\subset\mathscr{A}$ и предложения 2 следует замкнутость функций f_* и f^*, а также утверждение о существовании меры $\widehat{\mu}_x^f$.

Пусть g – выпуклое замкнутое ограниченное снизу расширение функции f на множество $\mathscr{A}$. Из неравенства Йенсена следует, что

$$g(x)\leqslant\inf_{\mu\in M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})}\int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}}g(y)\,\mu(dy)=\inf_{\mu\in M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})}\int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}}f(y)\,\mu(dy)=f_*(x)$$

для всех x из $\mathscr{A}$. Поэтому f_* – максимальное выпуклое замкнутое расширение функции f на множество $\mathscr{A}$.

Если $\mathscr{A}=\sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, то из леммы 4 следует плотность атомических мер в $M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ для каждого x из $\mathscr{A}$. Учитывая это и полунепрерывность снизу функционала (2), нетрудно показать, что точную верхнюю грань в определении величины $f^*(x)$ можно брать только по множеству атомических мер в $M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})$.

Пусть g – ограниченное снизу вогнутое расширение функции f на множество $\mathscr{A}$. Применяя к этой функции неравенство Йенсена, получаем

$$\begin{aligned} g(x)&\geqslant\sup\biggl\{\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i g(x_i)\biggm|\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i x_i=x,\ \{x_i\}\subset\operatorname{extr}\mathscr{A},\ \{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_\infty\biggr\}\\ &=\sup\biggl\{\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i f(x_i)\biggm|\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i x_i=x,\ \{x_i\}\subset\operatorname{extr}\mathscr{A},\ \{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_\infty\biggr\}=f^*(x)\end{aligned}$$

для всех x из $\mathscr{A}$. Поэтому f^* – минимальное ограниченное снизу вогнутое расширение функции f на множество $\mathscr{A}$.

Из теоремы 2 вытекает следующее обобщение предложения 9 из [5] на случай μ-компактных выпуклых множеств.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое μ-компактное множество, обладающее сильным* CE-*свойством, такое, что $\mathscr{A}=\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$.*

Для любой функции $f\in C(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ функция f_*, определенная первой формулой в (10), является непрерывным ограниченным выпуклым расширением функции f на множество $\mathscr{A}$, совпадающим с точной верхней гранью всех выпуклых замкнутых расширений функции f на множество $\mathscr{A}$. Если дополнительно $\mathscr{A}=\sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, то

$$f_*(x)=\inf\biggl\{\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i f(x_i)\biggm|\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i x_i=x,\ \{x_i\}\subset\operatorname{extr}\mathscr{A},\ \{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_\infty\biggr\}\qquad\forall\,x\in\mathscr{A},$$

и функция f_* совпадает с точной верхней гранью всех выпуклых ограниченных сверху расширений функции f на множество $\mathscr{A}$.

Для функции f^* можно сформулировать утверждение, двойственное утверждению следствия 3.

Заметим, что если множество $\mathscr{A}$, удовлетворяющее условиям следствия 3, не является компактным, то существование у любой функции из $C(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ хотя бы одного выпуклого расширения из $C(\mathscr{A})$ не является очевидным. Для компакта $\mathscr{A}$ указанное свойство равносильно замкнутости множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$ [5; следствие 2].

Отметим следующий критерий непрерывности выпуклого замыкания вогнутых функций, который будет использован в следующем разделе.

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое μ-компактное множество, обладающее сильным* CE-*свойством, такое, что $\mathscr{A}=\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{extr}\mathscr{A})$.*

Пусть f – вогнутая ограниченная снизу замкнутая функция на $\mathscr{A}$ такая, что $-f\in\widehat{P}(\mathscr{A})$. Тогда

$$\{\overline{\mathrm{co}}\,f\in C(\mathscr{A})\}\ \Leftrightarrow\ \{f|_{\operatorname{extr}\mathscr{A}}\in C(\operatorname{extr}\mathscr{A})\}.$$

Доказательство. В силу предложения 3 с учетом последнего утверждения теоремы 1 для любой функции f указанного вида имеем

$$\overline{\mathrm{co}}\,f(x)=\inf_{\mu\in M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})}\int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}}f(y)\,\mu(dy)=f_*(x)\qquad\forall\,x\in\mathscr{A}.$$

Если функция f непрерывна и ограничена на множестве $\operatorname{extr}\mathscr{A}$, то в силу следствия 3 функция $\overline{\mathrm{co}}\,f=f_*$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathscr{A}$. Обратное утверждение очевидно, поскольку в силу предложения 3 функции f и $\overline{\mathrm{co}}\,f$ совпадают на множестве $\operatorname{extr}\mathscr{A}$.

6. Некоторые приложения. Пусть $\mathscr{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – сепарабельное банахово пространство всех ядерных операторов в $\mathscr{H}$ со следовой нормой $\|A\|_1=\operatorname{Tr}\sqrt{A^*A}$. *Оператором плотности* (*квантовым состоянием*) называется положительный ядерный оператор ρ с единичным следом [4], [15]. Множество всех операторов плотности $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, которое является компактным тогда и только тогда, когда пространство $\mathscr{H}$ конечномерно. Множество $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ замкнуто и состоит из чистых состояний – одномерных проекторов, причем в силу спектральной теоремы $\mathfrak{S}(\mathscr{H})=\sigma\text{-}\operatorname{co}(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$. Чистое состояние – проектор на подпространство, порожденное единичным вектором φ, будем обозначать P_φ.

С помощью приведенного в предложении 1 достаточного условия можно доказать μ-компактность множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Для этого в качестве $F(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ можно взять семейство функций вида $\rho\mapsto\operatorname{Tr}H\rho$, где H – произвольный неограниченный положительный оператор с дискретным спектром конечной кратности (см. подробности в [11]). Используя лемму 3 в [16] при $m=2$ и теорему 1, получаем следующее утверждение.

Предложение 4. *Множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является выпуклым μ-компактным множеством, обладающим сильным* CE-*свойством.*

Заметим, что из μ-компактности множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ и леммы 4 следует полезный результат о плотности атомических мер в множестве всех вероятностных мер на $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ с заданным барицентром: *каждая мера μ_0 из $M_1^+(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ является* *пределом последовательности* $\{\mu_n\}$ *атомических мер из* $M_1^+(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ *таких, что* $b(\mu_n)=b(\mu_0)$ *для всех* n.

Энтропия фон Неймана оператора плотности ρ определяется выражением

$$H(\rho)=-\sum_i\lambda_i\log\lambda_i,$$

в котором $\{\lambda_i\}$ – набор собственных значений оператора ρ, и является замкнутой вогнутой функцией на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ со значениями в $[0,+\infty]$ [17].

Рассмотрим составную квантовую систему, состояния которой – это операторы плотности в тензорном произведении $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ двух сепарабельных гильбертовых пространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$, характеризующих отдельные подсистемы. Рассмотрим *энтропию частичного состояния* – замкнутую вогнутую функцию

$$f_{\mathscr{H}}\colon\omega\mapsto H(\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}\omega)\in[0,+\infty]$$

на $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, где $\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}(\,\cdot\,)$ – частичный след по пространству $\mathscr{K}$ [4]. Значение выпуклого замыкания функции $f_{\mathscr{H}}$ в состоянии $\omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ является важной характеристикой этого состояния, называемой *сцепленностью формирования* (Entanglement of Formation=EoF) и обозначаемой $E_F(\omega)$ [18], [19], т.е.

$$E_F(\omega)=\overline{\operatorname{co}}\,f_{\mathscr{H}}(\omega)\qquad\forall\,\omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}).$$

Нетрудно показать, что $E_F(\omega)=0$ тогда и только тогда, когда ω является *несцепленным* состоянием, т.е. лежит в выпуклом замыкании множества чистых состояний-произведений.

Аналогично можно определить функцию $f_{\mathscr{K}}\colon\omega\mapsto H(\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\omega)$. Несмотря на то, что функции $f_{\mathscr{H}}$ и $f_{\mathscr{K}}$ различны, они совпадают на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ [4]. Поэтому определение EoF не зависит от выбора пространства, по которому берется частичный след, т.е.

$$E_F=\overline{\operatorname{co}}\,f_{\mathscr{H}}=\overline{\operatorname{co}}\,f_{\mathscr{K}}. \tag{11}$$

Из представленных выше результатов с учетом предложения 4 можно получить следующие наблюдения о свойствах EoF.

Предложение 5. А) EoF *является максимальной замкнутой выпуклой функцией, совпадающей на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния.*

Б) *Пусть* $\mathscr{L}$ *– некоторое подпространство* $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$. EoF *непрерывна и ограничена на множестве* $\mathfrak{S}(\mathscr{L})=\{\omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})\mid\operatorname{supp}\omega\subseteq\mathscr{L}\}$ *тогда и только тогда, когда функция*

$$\varphi\mapsto f_{\mathscr{H}}(P_\varphi)=H(\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}P_\varphi)$$

непрерывна и ограничена на единичной сфере подпространства $\mathscr{L}$.

В) EoF *непрерывна и ограничена на* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ *тогда и только тогда, когда либо* $\dim\mathscr{H}<+\infty$, *либо* $\dim\mathscr{K}<+\infty$.[6]

[6] Заметим, что непосредственное доказательство непрерывности EoF в случае, когда $\dim\mathscr{H}<+\infty$ и $\dim\mathscr{K}<+\infty$ не является тривиальным [20].

Доказательство. Утверждение А следует из предложения 3 и утверждения А теоремы 2.

Утверждение Б вытекает из следствия 4.

Утверждение В следует из Б с учетом (11).

Утверждение А предложения 5 интересно в связи с тем, что всякая функция, претендующая на роль меры сцепленности, должна совпадать на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния – функцией $f_{\mathscr{H}}$ [5].

Если $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ – бесконечномерные пространства, то EoF не является непрерывной функцией на $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, но в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ существуют такие подпространства $\mathscr{L}$, что несмотря на неограниченность функций $f_{\mathscr{H}}$ и $f_{\mathscr{K}}$ на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{L})$, условие утверждения Б предложения 5 выполнено. В силу этого утверждения EoF непрерывна и ограничена на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{L})$. Важность этого результата связана с тем, что в силу наблюдения из [21] выходную энтропию любого квантового канала можно представить в виде сужения EoF на множество $\mathfrak{S}(\mathscr{L})$ при некотором $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$. Практически доказать выполнение условия утверждения Б для заданного подпространства $\mathscr{L}$ можно с помощью достаточного условия непрерывности квантовой энтропии для некомпактных множеств состояний [22].

Из следствия 3 с учетом предложения 4 и спектральной теоремы получаем следующее утверждение, которое можно использовать для построения непрерывных выпуклых (вогнутых) характеристик квантовых состояний.

Следствие 5. *Для любой функции* $f\in C(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ *функция*

$$f_*(\rho)=\inf\biggl\{\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i f(\rho_i)\Bigm|\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i\rho_i=\rho,\ \{\rho_i\}\subset\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}),\ \{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_\infty\biggr\}$$

является выпуклым непрерывным ограниченным расширением функции f *на множество* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. *Эта функция совпадает с точной верхней гранью всех выпуклых замкнутых расширений функции* f *на множество* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ *и с точной верхней гранью всех выпуклых ограниченных сверху расширений функции* f *на множество* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$.

Поскольку множество $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ состоит из чистых состояний – одномерных проекторов – множество $C(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ изоморфно множеству непрерывных ограниченных функций на единичной сфере гильбертова пространства $\mathscr{H}$, обладающих свойством инвариантности по отношению к умножению аргумента на комплексные числа, равные по модулю единице.

С помощью следствия 5 можно построить непрерывную ограниченную квазимеру сцепленности,[7] которая тесно связана с сцепленностью формирования E_F. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Для произвольного чистого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ пусть

$$f^n_{\mathscr{H}}(\omega)=-\sum_{i=1}^n\lambda_i\log\lambda_i+\biggl(\sum_{i=1}^n\lambda_i\biggr)\log\biggl(\sum_{i=1}^n\lambda_i\biggr),$$

где $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ – множество n наибольших собственных значений (с учетом кратности) состояний $\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}\omega\cong\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\omega$. В силу предложения 4 из [17] последовательность $\{f^n_{\mathscr{H}}\}$

[7] Как было отмечено выше, всякая мера сцепленности совпадает на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния и, следовательно, не может быть непрерывной в бесконечномерном случае.

функций из $C(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))$ возрастает и поточечно сходится к энтропии частичного состояния – функции $f_{\mathscr{H}}$.

Пусть E_F^n – расширение $(f_{\mathscr{H}}^n)_*$ функции $f_{\mathscr{H}}^n$ на множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, определенное в следствии 5 при $f=f_{\mathscr{H}}^n$. В силу этого следствия E_F^n – функция из $P(\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))$. По построению функция E_F^n обладает следующими свойствами:

1) $E_F^n(\omega)=0$ тогда и только тогда, когда ω – несцепленное состояние;
2) $E_F^n(\omega)\leqslant E_F(\omega)$ для любого состояния ω;
3) $E_F^n(\omega)=E_F(\omega)$ для любого состояния ω, у которого либо $\operatorname{rank}\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}\omega\leqslant n$, либо $\operatorname{rank}\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\omega\leqslant n$;
4) $0\leqslant E_F^n(\omega)\leqslant\log n$ для любого состояния ω.

Последовательность $\{E_F^n\}$ функций из $P(\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))$ возрастающая. Следовательно, ее поточечный предел $E_F^{+\infty}$ – выпуклая замкнутая функция на $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, совпадающая на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния. Интересный вопрос – соотношение между $E_F^{+\infty}$ и E_F. По построению $E_F^{+\infty}(\omega)\leqslant E_F(\omega)$ для произвольного состояния ω, причем равенство имеет место для любого чистого состояния ω, а также, в силу свойства 3), для любого состояния ω, у которого либо $\operatorname{rank}\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}\omega<+\infty$, либо $\operatorname{rank}\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\omega<+\infty$. Доказательство совпадения $E_F^{+\infty}$ и E_F на всем множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ означало бы, что E_F – функция класса $\widehat{P}(\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))$.

7. Возможные обобщения. Сепарабельность, метризуемость и μ-компактность множества $\mathscr{A}$ существенно использовались в доказательствах основных результатов статьи. Поскольку эти условия достаточно ограничительны, кратко обсудим возможности обобщения этих результатов на более широкий класс выпуклых множеств.

Прежде всего отметим, что основной результат статьи – теорема 1 – непосредственно обобщается на класс компактных выпуклых подмножеств произвольного локально выпуклого линейного топологического пространства. Для получения такого обобщения необходимо вместо леммы 1 использовать предложение I.2.3 из [3] и несколько видоизменить доказательство теоремы 1. Однако ослабление требования компактности в этом случае вызывает большие затруднения.

Отметим также, что равносильность свойств (i) и (iii) в теореме 1 можно доказать, заменив требование μ-компактности множества на требование совпадения выпуклого замыкания и выпуклой оболочки произвольной непрерывной ограниченной функции на этом множестве.

Автор благодарен В. М. Тихомирову и участникам его семинара, в особенности, В. Ю. Протасову, а также Е. С. Половинкину и М. В. Балашову за интересное обсуждение. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, учтенные при переработке первоначальной версии статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1974.

[2] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.

[3] E. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **57**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971.

[4] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002.

[5] A. Lima, "On continuous convex functions and split faces", *Proc. London Math. Soc.* (3), **25**:3 (1972), 27–40.

[6] С. С. Кутателадзе, "Границы Шоке в K-пространствах", *УМН*, **30**:4 (1975), 107–146.

[7] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968.

[8] М. В. Балашов, "О P-свойстве выпуклых компактов", *Матем. заметки*, **71**:3 (2002), 323–333.

[9] K. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, **3**, Academic Press, New York–London, 1967.

[10] G. A. Edgar, "Extremal integral representations", *J. Funct. Anal.*, **23**:2 (1976), 145–161.

[11] А. С. Холево, М. Е. Широков, "Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности", *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:1 (2006), 98–114; `arXiv: quant-ph/0408176`.

[12] R. D. Bourgin, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodiym property*, Lecture Notes in Math., **993**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[13] R. D. Bourgin, G. A. Edgar, "Noncompact simplexes in Banach spaces with the Radon-Nikodiym property", *J. Funct. Anal.*, **23**:2 (1976), 162–176.

[14] M. E. Shirokov, *Properties of probability measures on the set of quantum states and their applications*, `arXiv: math-ph/0607019`.

[15] M. Keyl, "Fundamentals of Quantum Information Theory", *Phys. Rep.*, **369**:5 (2002), 431–548; `arXiv: quant-ph/0202122`.

[16] M. E. Shirokov, "The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem", *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159; `arXiv: quant-ph/0408009`.

[17] G. Lindblad, "Expectation and Entropy Inequalities for Finite Quantum Systems", *Comm. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.

[18] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, "Mixed-State Entanglement and Quantum Error Correction", *Phys. Rev. A* (3), **54**:5 (1996), 3824–3851; `arXiv: quant-ph/9604024`.

[19] M. E. Shirokov, *On entropic quantities related to the classical capacity of infinite dimensional quantum channels*, `arXiv: quant-ph/0411091`.

[20] M. A. Nielsen, "Continuity bounds for entangelment", *Phys. Rev. A* (3), **61**:6 (2000).

[21] K. Matsumoto, T. Shimono, A. Winter, "Remarks on additivity of the Holevo channel capacity and of the entanglement of formation", *Comm. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 427–442.

[22] M. E. Shirokov, *The convex closure of the output entropy of infinite dimensional channels and the additivity problem*, `arXiv: quant-ph/0608090`.

М. Е. Широков
Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: `msh@mi.ras.ru`

Поступило
14.08.2006
Исправленный вариант
22.02.2007