Математические заметки

Том 93 выпуск 5 май 2013

УДК 519.248.3

# Число Шмидта и каналы, частично разрушающие сцепленность, в бесконечномерных квантовых системах

**М. Е. Широков**

Дано определение числа Шмидта состояния составной квантовой системы бесконечной размерности и рассмотрены свойства соответствующих классов Шмидта. Показано существование состояний с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которых не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта. Рассмотрены классы бесконечномерных каналов, частично разрушающих сцепленность. Получены обобщения некоторых свойств таких каналов, установленных ранее в конечномерном случае. В то же время, доказано существование частично разрушающих сцепленность каналов (в частности, разрушающих сцепленность каналов), у которых все операторы в любом представлении Крауса имеют бесконечный ранг.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10234

## 1. Введение

Ранг Шмидта чистого состояния и его "обобщение" на смешанные состояния, называемое *числом Шмидта*, являются важными количественными характеристиками сцепленности в составных квантовых системах.

*Ранг Шмидта* чистого состояния составной системы $AB$, описываемого единичным вектором $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ (где $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ – гильбертовы пространства, соответствующие системам $A$ и $B$), определяется как число ненулевых слагаемых в разложении Шмидта

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$$

этого вектора; он совпадает с рангом частичных состояний $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |\psi\rangle\langle\psi|$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A} |\psi\rangle\langle\psi|$.

Число Шмидта смешанного состояния $\omega$ конечномерной составной квантовой системы $AB$ определено в [1] как максимальный ранг Шмидта в ансамбле чистых состояний со средним состоянием $\omega$, минимизированный по всем таким ансамблям

Работа выполнена при поддержке научной программы РАН "Математическая теория управления и динамических систем", Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00319-а, 13-01-00295-а).

(см. раздел 3). В [1] показано, что число Шмидта не возрастает при действии LOCC-операций и что множество состояний с числом Шмидта, не превосходящим $k$, (класс Шмидта порядка $k$) можно охарактеризовать в терминах $k$-положительных отображений.[1] В последующих статьях [2]–[4] рассмотрены различные свойства числа Шмидта и классов Шмидта.

Число Шмидта существенно используется в определении квантового канала, частично разрушающего сцепленность [5]. Недавно обнаружена связь этого понятия с необходимым условием равенства в законе невозрастания величины Холево ансамбля квантовых состояний при действии квантового канала [6; теорема 1].

Эта статья посвящена бесконечномерным обобщениям рассмотренных выше понятий. Ее частичной мотивацией является желание автора расширить упомянутый выше результат из [6] на бесконечномерные квантовые системы и каналы.

В разделе 3 рассмотрено определение числа Шмидта для состояний составной квантовой системы бесконечной размерности. Поскольку существование счетно-неразложимых сепарабельных состояний (см. [7]) показывает некорректность конечномерной формулы для числа Шмидта, предложена "непрерывная" модификация этой формулы, основанная на понятии существенного супремума функции относительно заданной меры. Показано, что эта формула дает адекватное определение числа Шмидта в том смысле, что соответствующие классы Шмидта (множества состояний с числом Шмидта $\leqslant k$) совпадают с выпуклыми замыканиями множеств чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant k$.

Свойства классов Шмидта в бесконечномерном случае рассмотрены в разделе 4. В частности, доказана характеризация класса Шмидта порядка $k$ в терминах $k$-положительных отображений (обобщающая теорему 1 в [1]). Показано, что произвольное состояние класса Шмидта порядка $k$ является барицентром некоторой вероятностной меры с носителем в множестве чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant k$. В то же время показано существование состояний с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которых не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.

Определение и некоторые свойства бесконечномерных квантовых каналов, частично разрушающих сцепленность, рассмотрены в разделе 5. Установлено, что, в отличие от конечномерного случая, класс частично разрушающих сцепленность каналов порядка $k$ не совпадает с классом каналов, имеющих представление Крауса с операторами ранга $\leqslant k$ (последний класс является собственным подклассом первого). Более того, показано существование частично разрушающих сцепленность каналов (в частности, разрушающих сцепленность каналов), у которых все операторы в любом представлении Крауса имеют бесконечный ранг.

## 2. Предварительные сведения

Будем использовать следующие обозначения:

- $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства;
- $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$;
- $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$;
- $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ – конус всех положительных ядерных операторов в $\mathcal{H}$;

[1] Определения LOCC-операций и $k$-положительных отображений, а также некоторых других понятий некоммутативной теории вероятностей, даны в разделе 2.

- $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, состоящее из операторов с единичным следом.

Замыкание, выпуклую оболочку, выпуклое замыкание и множество крайних точек подмножества $\mathcal{A}$ топологического линейного пространства будем обозначать $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$, $\mathrm{co}(\mathcal{A})$, $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{extr}(\mathcal{A})$ соответственно [8]–[10].

Операторы из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ будем обозначать $\rho$, $\sigma$, $\omega$, … и называть *операторами плотности* или *состояниями*, поскольку каждый оператор плотности однозначно определяет нормальное состояние на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Состояния, соответствующие операторам плотности ранга 1, называются *чистыми*. Множество чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ совпадает с $\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Для векторов и операторов ранга 1 в гильбертовом пространстве будем использовать дираковские обозначения $|\varphi\rangle$, $|\chi\rangle\langle\psi|$, … (в которых действие оператора $|\chi\rangle\langle\psi|$ на вектор $|\varphi\rangle$ – это вектор $\langle\psi,\varphi\rangle\,|\chi\rangle$).

Единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и тождественное преобразование пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ будем обозначать $I_{\mathcal{H}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ – множество борелевских вероятностных мер на замкнутом подмножестве $\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, снабженное топологией слабой сходимости [11], [12]. Это множество можно считать полным сепарабельным метрическим пространством [12]. Барицентр $\mathbf{b}(\mu)$ меры $\mu$ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ – это состояние из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$, определяемое интегралом Бохнера

$$\mathbf{b}(\mu)=\int_{\mathcal{A}}\rho\mu\,(d\rho).$$

Для произвольного подмножества $\mathcal{B}\subseteq\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из мер с барицентром в $\mathcal{B}$, будем обозначать $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

Конечный или счетный набор состояний $\{\rho_i\}\subset\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ традиционно называется *ансамблем* и обозначается $\{\pi_i,\rho_i\}$. Ансамбль состояний можно рассматривать как атомическую (дискретную) меру из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Барицентр этой меры – это среднее состояние $\sum_i\pi_i\rho_i$ соответствующего ансамбля.

Линейное отображение $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathcal{H})\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ называется *$k$-положительным*, если для $k$-мерного гильбертова пространства $\mathcal{K}$ отображение $\Phi^*\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}^*$ $C^*$-алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})$ в $C^*$-алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ является положительным. Если отображение $\Phi$ является $k$-положительным при любом $k$, то оно называется *вполне положительным*. Вполне положительное сохраняющее след линейное отображение называется *квантовым каналом* [13], [14]. Множество всех квантовых каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ будем обозначать $\mathfrak{F}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.

Состояние $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ называется *сепарабельным* или *несцепленным*, если оно принадлежит выпуклому замыканию множества всех чистых состояний-произведений из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ (т.е. состояний вида $\rho\otimes\sigma$, где $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\sigma\in\mathfrak{S}(\mathcal{K})$), в противном случае оно называется *сцепленным*.

Ключевым в теории сцепленности является понятие *LOCC-операции*, т.е. такого преобразования состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, которое сводится к последовательности локальных операций (Local Operation) над каждой из подсистем и обмену классической информацией между этими подсистемами (Classical Communication) [14], [15]. Простейшие примеры LOCC-операций – это квантовые каналы вида $\Phi\otimes\Psi$, где $\Phi\in\mathfrak{F}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ и $\Psi\in\mathfrak{F}(\mathcal{K},\mathcal{K})$.

## 3. Число Шмидта

*Ранг Шмидта* $\mathrm{SR}(\omega)$ чистого состояния $\omega$ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ можно определить как ранг изоморфных состояний $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,\omega$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\omega$.

Если пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ конечномерны, то число Шмидта произвольного состояния $\omega$ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ определяется выражением

$$\mathrm{SN}(\omega)=\inf_{\sum_i\pi_i\omega_i=\omega}\sup_i \mathrm{SR}(\omega_i), \tag{3.1}$$

в котором инфимум берется по всем ансамблям $\{\pi_i,\omega_i\}$ чистых состояний со средним состоянием $\omega$ [1]. Используя теорему Каратеодори, нетрудно показать, что для каждого натурального $k$ множество $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})=\{\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})\mid \mathrm{SN}(\omega)\leqslant k\}$ замкнуто и совпадает с выпуклой оболочкой чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant k$. Это означает, что функция $\omega\mapsto\mathrm{SN}(\omega)$ полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Таким образом, имеем следующую возрастающую конечную последовательность[2]

$$\mathfrak{S}_1\subset\mathfrak{S}_2\subset\mathfrak{S}_3\subset\dots\subset\mathfrak{S}_{n-1}\subset\mathfrak{S}_n=\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$$

замкнутых подмножеств, где $\mathfrak{S}_1$ – множество сепарабельных (несцепленных) состояний и $n=\min\{\dim\mathcal{H},\dim\mathcal{K}\}$.

Если пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ бесконечномерны, то правая часть (3.1) определена корректно, но она не дает адекватного определения числа Шмидта. Это следует из существования сепарабельных состояний в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ (называемых счетно-неразложимыми), которые нельзя представить в виде счетной выпуклой комбинации чистых состояний-произведений [7]. Из счетной неразложимости сепарабельного состояния $\omega$ следует, что правая часть (3.1) больше единицы для каждого такого состояния вопреки естественному требованию, которому должно удовлетворять число Шмидта.[3]

Ниже будет показано, что разумное обобщение определения (3.1) на бесконечномерный случай дает следующая формула:

$$\mathrm{SN}(\omega)=\inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\omega\}}(\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}))}\operatorname{ess\,sup}_\mu \mathrm{SR}(\,\cdot\,), \tag{3.2}$$

где “$\operatorname{ess\,sup}_\mu$” – существенный супремум по отношению к мере $\mu$ [9; п. 13.1]. Заметим, что $\operatorname{ess\,sup}_\mu\mathrm{SR}(\,\cdot\,)=\|\mathrm{SR}\|_\infty$ – это норма функции SR в пространстве $L^\infty(X,\mu)$, где $X=\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

Предложение 1. A) *Функция* $\mathrm{SN}(\omega)$, *определенная формулой* (3.2), *полунепрерывна снизу на множестве* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. *Для каждого состояния* $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ *инфимум в* (3.2) *достигается на некоторой мере из* $\mathrm{extr}\,\mathcal{P}_{\{\omega\}}(\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}))$.

B) *Для каждого натурального* $k$ *множество* $\mathfrak{S}_k=\{\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})\mid\mathrm{SN}(\omega)\leqslant k\}$, *где* $\mathrm{SN}(\omega)$ *определяется формулой* (3.2), *замкнуто и выпукло. Оно совпадает с выпуклым замыканием множества чистых состояний из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, *имеющих ранг Шмидта* $\leqslant k$.

---

[2] Здесь и далее будем для краткости писать $\mathfrak{S}_k$ вместо $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

[3] Эта проблема аналогична проблеме, возникающей при бесконечномерном обобщении метода выпуклой надстройки, используемого для построения монотонных характеристик сцепленности (the convex roof construction of entanglement monotones [15]): существование счетно-неразложимых сепарабельных состояний приводит к некорректности дискретной версии этой конструкции (см. замечание 9 в [16]).

C) *Если* $\omega$ – *состояние конечного ранга в* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, *то значения* $\mathrm{SN}(\omega)$, *определяемые формулами* (3.1) *и* (3.2), *совпадают.*

Доказательство. Поскольку неотрицательная функция $\omega\mapsto\mathrm{SR}(\omega)$ полунепрерывна снизу на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, первое утверждение предложения следует из предложения 9 в приложении.

Второе утверждение следует из первого и леммы 1 из [7].

Для доказательства третьего утверждения заметим, что если правая часть (3.2) равна $k<+\infty$, то и правая часть (3.1) равна $k$ в силу совпадения выпуклой оболочки и выпуклого замыкания замкнутого подмножества

$$\mathfrak{S}_k^{\omega}=\{\varpi\in\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\operatorname{supp}\omega)\mid \mathrm{SR}(\varpi)\leqslant k\}$$

конечномерного пространства $\mathfrak{T}(\operatorname{supp}\omega)$ (см. [9; следствие 5.33]).

Следующее предложение обобщает предложение 1 из [1] на бесконечномерный случай.

Предложение 2. *Число Шмидта состояния бесконечномерной составной квантовой системы, определяемое формулой* (3.2), *не возрастает под действием LOCC-операций.*

Это утверждение сводится к утверждению предложения 1 из [1] с помощью следующего аппроксимативного результата.

Лемма 1. *Пусть* $\{P_n\}$ *и* $\{Q_n\}$ – *возрастающие последовательности проекторов конечного ранга, сильно сходящиеся к* $I_{\mathcal{H}}$ *и к* $I_{\mathcal{K}}$ *соответственно. Для произвольного состояния* $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ *пусть*

$$\omega_n=(\operatorname{Tr}P_n\otimes Q_n\cdot\omega)^{-1}P_n\otimes Q_n\cdot\omega\cdot P_n\otimes Q_n.$$

*Тогда*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{SN}(\omega_n)=\mathrm{SN}(\omega).$$

*Если* $\mathrm{SN}(\omega)<+\infty$, *то существует* $n_0$ *такое, что* $\mathrm{SN}(\omega_n)=\mathrm{SN}(\omega)$ *для всех* $n\geqslant n_0$.

Доказательство. В силу полунепрерывности снизу числа Шмидта (предложение 1, A) достаточно показать, что

$$\mathrm{SN}(\omega_n)\leqslant\mathrm{SN}(\omega)\qquad\forall\,n. \tag{3.3}$$

Поскольку состояние $\omega$ лежит в выпуклом замыкании множества $\mathfrak{S}^p_{\mathrm{SN}(\omega)}$ чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant\mathrm{SN}(\omega)$ (предложение 1, B), существует последовательность $\{\omega_m\}$ из выпуклой оболочки множества $\mathfrak{S}^p_{\mathrm{SN}(\omega)}$, сходящаяся к состоянию $\omega$, такая, что $\lim_{m\to+\infty}\mathrm{SN}(\omega_m)=\mathrm{SN}(\omega)$. При каждом $m$ неравенство (3.3) с $\omega=\omega_m$ непосредственно проверяется. В силу полунепрерывности снизу числа Шмидта переход к пределу при $m\to+\infty$ дает (3.3).

## 4. Некоторые свойства классов Шмидта $\mathfrak{S}_k$

При $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{K} = +\infty$ мы имеем бесконечную возрастающую последовательность

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n \subset \cdots$$

замкнутых подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, в которой $\mathfrak{S}_1$ – множество сепарабельных (несцепленных) состояний.

Пусть $\mathfrak{S}_k^p$ – замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}_k$, состоящее из чистых состояний.

Предложение 3. A) *Произвольное состояние из* $\mathfrak{S}_k$ *является барицентром некоторой меры из* $\operatorname{extr}\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k^p)$.

B) *Существуют состояния* $\omega$ *в* $\mathfrak{S}_k\setminus\mathfrak{S}_{k-1}$ *такие, что оператор* $\omega-\lambda\sigma$ *не является положительным при любом* $\lambda>0$ *и любом чистом состоянии* $\sigma$ *с конечным рангом Шмидта.*[4] *Для каждого такого состояния* $\omega$ *имеем*

$$\omega = \sum_i \pi_i\omega_i, \qquad \{\omega_i\}\subset \operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{SR}(\omega_i)=+\infty \quad \forall\, i.$$

C) *Произвольное чистое состояние из* $\mathfrak{S}_k\setminus\mathfrak{S}_{k-1}$ *можно аппроксимировать последовательностью состояний из* $\mathfrak{S}_k\setminus\mathfrak{S}_{k-1}$, *обладающих свойством, указанным в утверждении* B.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из предложения 1, второе подтверждается примером, рассмотренным в приложении 6.2 (после предложения 10).

Третье утверждение доказывается с помощью конструкции указанного выше примера из приложения 6.2 с учетом того, что функции с неравными нулю коэффициентами Фурье образуют плотное подмножество в $L^2([0,2\pi))$ и что произвольный набор $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^k$ ортогональных единичных векторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является образом набора векторов $\{|\varphi_i\rangle\otimes|i\rangle\}_{i=1}^k\subset L^2([0,2\pi))\otimes\mathcal{K}$ при некотором унитарном отображении из $L^2([0,2\pi))\otimes\mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$, где $\{|i\rangle\}_{i=1}^k$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{K}$.

Рассмотрим характеризацию множества $\mathfrak{S}_k$ в терминах $k$-положительных отображений (которая является бесконечномерным обобщением теоремы 1 из [1]).

Предложение 4. *Состояние* $\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ *лежит в* $\mathfrak{S}_k$ *тогда и только тогда, когда оператор* $\Lambda_k\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega)$ *положителен при любом* $k$*-положительном линейном преобразовании* $\Lambda_k$ *пространства* $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Доказательство. Пусть $\omega_0\in\mathfrak{S}_k$. В силу предложения 3 существует мера $\mu_0$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k^p)$ такая, что $\omega_0=\int\omega\mu_0\,(d\omega)$. Поскольку $\Lambda_k\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega)\geqslant 0$ для любого состояния $\omega\in\mathfrak{S}_k^p$ в силу определения $k$-положительности (см. раздел 2), имеем

$$\Lambda_k\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega_0) = \int \Lambda_k\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega)\mu_0\,(d\omega)\geqslant 0.$$

Обратное утверждение можно вывести из соответствующего конечномерного результата ([1; теорема 1]) методом аппроксимации с использованием леммы 1.

[4] Предполагается, что $\mathfrak{S}_0=\varnothing$, а значит, $\mathfrak{S}_1\setminus\mathfrak{S}_0=\mathfrak{S}_1$ – множество сепарабельных состояний.

Пусть $\omega_0 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})\setminus\mathfrak{S}_k$, т.е. $\mathrm{SN}(\omega_0) > k$. В силу леммы 1 существуют проекторы $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $Q \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ с одинаковым конечным рангом такие, что состояние

$$\omega_* = (\mathrm{Tr}\, P \otimes Q \cdot \omega_0)^{-1} P \otimes Q \cdot \omega_0 \cdot P \otimes Q$$

не лежит в множестве $\mathfrak{S}_k$. Пусть $\mathcal{H}_* = P(\mathcal{H})$ и $\mathcal{K}_* = Q(\mathcal{K})$. В силу теоремы 1 из [1] существует $k$-положительное отображение $\Lambda_k\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_*) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_*)$ такое, что оператор $\Lambda_k \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}_*}(\omega_*)$ не является положительным. Рассмотрим $k$-положительное отображение $\Lambda_k \circ \Pi$, где $\Pi(\,\cdot\,) = P(\,\cdot\,)P$. Тогда оператор $(\Lambda_k \circ \Pi) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega_0)$ не является положительным, поскольку в противном случае оператор

$$I_{\mathcal{H}} \otimes Q \cdot (\Lambda_k \circ \Pi) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega_0) \cdot I_{\mathcal{H}} \otimes Q = (\mathrm{Tr}\, P \otimes Q \cdot \omega_0)\, \Lambda_k \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}_*}(\omega_*)$$

положителен, что противоречит выбору $\Lambda_k$.

Используя критерий компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ (см. Предложение в приложении в [17]), можно доказать бесконечномерное обобщение предложения 1 из [2].

Предложение 5. *Произвольное состояние $\omega_k \in \mathfrak{S}_k$ можно представить в виде*

$$\omega_k = (1-p)\omega_{k-1} + p\delta, \qquad p \in [0,1], \tag{4.1}$$

*где $\omega_{k-1} \in \mathfrak{S}_{k-1}$, а $\delta$ – состояние с числом Шмидта $\geqslant k$ такое, что оператор $\delta - \lambda\sigma$ не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом $\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}$.*

*Среди всех таких разложений существует разложение с минимальным $p$.*

Состояние, обладающее свойством состояния $\delta$, названо в [2] *$k$-граничным* состоянием ($k$-*edge* state). В отличие от конечномерного случая, для доказательства $k$-граничности состояния $\delta$ недостаточно показать, что оператор $\delta - \lambda\sigma$ не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом $\sigma \in \mathfrak{S}^p_{k-1}$. Это следует из предложения 3, B.

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{M} = \{0\} \cup \{A \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \mid A \leqslant \omega_k, (\mathrm{Tr}\, A)^{-1}A \in \mathfrak{S}_{k-1}\}$$

– замкнутое подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

Предположим, что $\mathcal{M} \neq \{0\}$. В силу указанного выше критерия компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ множество $\mathcal{M}$ компактно. Следовательно, существует такой оператор $A_0 \in \mathcal{M}$, что $\mathrm{Tr}\, A_0 = \sup_{A\in\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\, A$. Обозначая $p = 1 - \mathrm{Tr}\, A_0$, $\omega_{k-1} = (\mathrm{Tr}\, A_0)^{-1}A_0$ и $\delta = p^{-1}(\omega_k - A_0)$, получим разложение (4.1) с минимальным $p$.

Если $\mathcal{M} = \{0\}$, то единственный способ получить (4.1) – это положить $p = 1$ и $\delta = \omega_k$.

## 5. Каналы, частично разрушающие сцепленность

Понятие частично разрушающего сцепленность канала порядка $k$ ($k$-partially entanglement-breaking channel) в конечномерном случае введено в [5] как естественное обобщение понятия разрушающего сцепленность канала (который является частично разрушающим сцепленность порядка 1). В соответствии с определением в [5], канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ называется *частично разрушающим сцепленность порядка* $k$, если для любого гильбертова пространства $\mathcal{K}$ число Шмидта состояния $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ не превосходит $k$ при любом состоянии $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

Используя определение числа Шмидта, введенное в разделе 3, данное определение канала, частично разрушающего сцепленность порядка $k$, непосредственно обобщается на бесконечномерный случай.

Следуя традиции, частично разрушающий сцепленность канал порядка $k$ будем кратко называть $k$-PEB *каналом*.

Пусть $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – класс $k$-PEB каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$. Поскольку множество $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ замкнуто и выпукло, $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – замкнутое выпуклое подмножество множества $\mathfrak{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ всех каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$, снабженного топологией сильной сходимости [17].

Из предложения 4 легко выводится следующая характеризация $k$-PEB каналов (обобщающая соответствующий результат из [5], [18]).

Предложение 6. *Канал $\Phi$ является $k$-PEB каналом тогда и только тогда, когда отображение $\Lambda_k \circ \Phi$ является вполне положительным для любого $k$-положительного отображения $\Lambda_k$.*

По определению $\Phi \in \mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ означает, что $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ для любого $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. В силу следующего предложения достаточно проверить это включение только для одного чистого состояния.

Предложение 7. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ – квантовый канал. Если существует чистое состояние $|\psi\rangle\langle\psi|$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ с частичными состояниями $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi| \cong \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle\langle\psi|$ полного ранга такое, что $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$, то канал $\Phi$ является $k$-PEB каналом.*

Доказательство. Пусть $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i |i\rangle \otimes |i\rangle$, где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}$ и $\mu_i > 0$ при всех $i$. Пусть $P_n = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|$ – проектор из $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$.

В силу предложения 2 имеем

$$\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|) = c_n I_{\mathcal{H}} \otimes P_n \cdot \Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \cdot I_{\mathcal{H}} \otimes P_n \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}),$$

где $|\psi_n\rangle = c_n \sum_{i=1}^{n} \mu_i |i\rangle \otimes |i\rangle$ и $c_n = \bigl[\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2\bigr]^{-1/2}$.

Пусть $\mathcal{H}_n = \mathrm{lin}(\{|i\rangle\}_{i=1}^{n})$ и $\mathcal{K}_n = \mathrm{lin}(\{|i\rangle\}_{i=1}^{n})$ – $n$-мерные подпространства пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$. Произвольный вектор $|\varphi\rangle$ из $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{K}_n$ можно представить в виде

$$|\varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |i\rangle \otimes A|i\rangle,$$

где

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i)^{-1} \gamma_{ij} |j\rangle\langle i|$$

– оператор из $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_n)$. Потому

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = I_{\mathcal{H}_n} \otimes A \cdot |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \cdot I_{\mathcal{H}_n} \otimes A^*$$

и, следовательно,

$$\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = I_{\mathcal{H}} \otimes A \cdot \Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|) \cdot I_{\mathcal{H}} \otimes A^* \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}).$$

Это означает, что сужение канала $\Phi$ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_n)$ является $k$-PEB каналом. В силу приведенной ниже леммы 2 канал $\Phi$ является $k$-PEB каналом.

Лемма 2. *Пусть $\{\mathcal{H}_n\}$ – возрастающая последовательность подпространств пространства $\mathcal{H}$ такая, что $\operatorname{cl}\bigl(\bigcup_n \mathcal{H}_n\bigr) = \mathcal{H}$. Если сужение канала $\Phi$ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_n)$ является $k$-PEB каналом при каждом $n$, то канал $\Phi$ является $k$-PEB каналом.*

Доказательство. Поскольку произвольное состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ можно аппроксимировать последовательностью $\{\omega_n\}$ такой, что $\operatorname{supp}\operatorname{Tr}_{\mathcal{K}}\omega_n \subset \mathcal{H}_n$ (см. лемму 1), это утверждение следует из замкнутости множества $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})$.

Пусть $|\psi\rangle\langle\psi|$ – чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, имеющее частичные состояния $\operatorname{Tr}_{\mathcal{K}}|\psi\rangle\langle\psi| \cong \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}}|\psi\rangle\langle\psi| = \sigma$ полного ранга. Рассмотрим взаимно-однозначное соответствие Чоя–Ямиолковского

$$\mathfrak{F}(\mathcal{H},\mathcal{H}') \ni \Phi \quad\longleftrightarrow\quad \Phi\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \in \mathfrak{C}_\sigma \doteq \{\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K}) \mid \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}'}\omega = \sigma\},$$

которое является топологическим изоморфизмом, если множество $\mathfrak{F}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ всех каналов наделено топологией сильной сходимости [16; предложение 3]. Из предложения 7 вытекает следующее наблюдение.

Следствие 1. *Сужение изоморфизма Чоя–Ямиолковского на класс $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ является изоморфизмом между этим классом и $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})\cap\mathfrak{C}_\sigma$ – замкнутым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})$.*

*При данном изоморфизме множество $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H},\mathcal{H}')\setminus\mathfrak{P}_{k-1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ соответствует множеству*

$$(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})\setminus\mathfrak{S}_{k-1}(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K}))\cap\mathfrak{C}_\sigma, \qquad k=2,3,\dots .$$

В [5] доказано, что конечномерный канал $\Phi$ является $k$-PEB каналом тогда и только тогда, когда он имеет представление Крауса

$$\Phi(\,\cdot\,) = \sum_i V_i(\,\cdot\,)V_i^* \tag{5.1}$$

такое, что $\operatorname{rank}V_i \leqslant k$ для всех $i$ (это естественное обобщение хорошо известной характеризации разрушающих сцепленность каналов конечной размерности, доказанной в [18]). В бесконечномерном случае класс $k$-PEB каналов существенно шире класса каналов, имеющих указанное выше представление Крауса.

Предложение 8. A) *Если канал $\Phi$ имеет представление Крауса (5.1) такое, что $\operatorname{rank}V_i \leqslant k$ для всех $i$, то он принадлежит классу $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.*

B) *Существуют каналы $\Phi$ в $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H},\mathcal{H}')\setminus\mathfrak{P}_{k-1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, обладающие следующим свойством*[5]:

$$\Phi(\,\cdot\,) = \sum_i V_i(\,\cdot\,)V_i^* \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{rank}V_i = +\infty \quad \forall\, i.$$

[5]Предполагается, что $\mathfrak{P}_0(\mathcal{H},\mathcal{H}') = \varnothing$ и, значит, $\mathfrak{P}_1(\mathcal{H},\mathcal{H}')\setminus\mathfrak{P}_0(\mathcal{H},\mathcal{H}') = \mathfrak{P}_1(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ – класс разрушающих сцепленность каналов.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, поскольку для любого чистого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ выражение

$$\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) = \sum_i V_i \otimes I_{\mathcal{K}} \cdot \omega \cdot V_i^* \otimes I_{\mathcal{K}}$$

приводит к разложению состояния $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\omega)$ в выпуклую комбинацию чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant k$.

Для доказательства второго утверждения выберем любое состояние $\omega$ из множества $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}) \setminus \mathfrak{S}_{k-1}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$, обладающее свойством из утверждения B предложения 3. Можно считать, что $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\,\omega$ – состояние полного ранга из $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$. Пусть $|\psi\rangle\langle\psi|$ – очищение этого состояния в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. В силу следствия 1 канал $\Phi_\omega$, соответствующий состоянию $\omega$ посредством изоморфизма Чоя–Ямиолковского, индуцированного состоянием $|\psi\rangle\langle\psi|$, лежит в $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \setminus \mathfrak{P}_{k-1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Если предположить, что $\Phi_\omega(\,\cdot\,) = \sum_i V_i(\,\cdot\,)V_i^*$ и $\operatorname{rank} V_{i_0} < +\infty$ при некотором $i_0$, то получим противоречие с основным свойством состояния $\omega$, поскольку $V_{i_0} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}|\psi\rangle \neq 0$ (в противном случае $V_{i_0}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,|\psi\rangle\langle\psi|)(V_{i_0})^* = 0$, что противоречит полному рангу состояния $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,|\psi\rangle\langle\psi|$).

Следствие 2. *Существуют разрушающие сцепленность каналы $\Phi$, у которых в любом представлении Крауса* (5.1) *все операторы $V_i$ имеют бесконечный ранг.*

Следствие 2 показывает, что бесконечномерные каналы, разрушающие сцепленность, могут иметь более сложную структуру, чем разрушающие сцепленность каналы между конечномерными системами [18].

## 6. Приложение

**6.1. Об одном свойстве множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.** Приведем одно следствие критерия компактности для подмножеств вероятностных мер на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (подробно рассмотренного в [15; раздел 1]), в силу которого *подмножество $\mathcal{P}$ множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно* (*в топологии слабой сходимости*) *тогда и только тогда*, *когда $\{\mathbf{b}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}\}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$* .

Предложение 9. *Пусть $f$ – неотрицательная полунепрерывная снизу функция на замкнутом подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Функция*

$$F(\rho) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \operatorname{ess\,sup}_\mu f(\,\cdot\,) \tag{6.1}$$

*полунепрерывна снизу на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$.*[6] *Для каждого состояния $\rho \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ инфимум в* (6.1) *достигается на некоторой мере из $\operatorname{extr} \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$.*

*При каждом $c \geqslant 0$ множество $\{\rho \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}) \mid F(\rho) \leqslant c\}$ совпадает с выпуклым замыканием множества $\{\rho \in \mathcal{A} \mid f(\rho) \leqslant c\}$.*

Доказательство. Функция $F(\rho)$ корректно определена на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ в силу леммы 1 из [7].

Покажем, что функционал

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \widehat{f}(\mu) = \operatorname{ess\,sup}_\mu f(\,\cdot\,) \tag{6.2}$$

[6] "$\operatorname{ess\,sup}_\mu$" – существенный супремум по отношению к мере $\mu$ [9; п. 13.1].

является вогнутым и полунепрерывным снизу. Поскольку для заданной меры $\mu$ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ $\mu$-существенный супремум функции $f$ (совпадающий с нормой $\|f\|_\infty$ пространства $L^\infty(\mathcal{A},\mu)$) есть точная верхняя грань возрастающего семейства норм $\|f\|_p$ пространств $L^p(\mathcal{A},\mu)$, $p\in[1,+\infty)$, вогнутость и полунепрерывность снизу функционала (6.2) следует из вогнутости и полунепрерывности снизу функционала

$$\mathcal{P}(\mathcal{A})\ni\mu\mapsto\|f\|_p=\sqrt[p]{\int_{\mathcal{A}}[f(\rho)]^p\mu\,(d\rho)}$$

(полунепрерывность снизу этого функционала – следствие основных свойств слабой сходимости вероятностных мер, см. [11; гл. I, п. 2]).

В силу вогнутости и полунепрерывности снизу функционала (6.2) и компактности множества $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$ (которая следует из приведенного выше критерия компактности) инфимум в определении величины $F(\rho)$ при каждом $\rho$ из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ достигается на некоторой мере из $\operatorname{extr}\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$.

Предположим, что функция (6.1) не является полунепрерывной снизу. Тогда существует последовательность $\{\rho_n\}\subset\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$, сходящаяся к состоянию $\rho_0\in\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ такая, что

$$\exists\lim_{n\to+\infty}F(\rho_n)<F(\rho_0). \tag{6.3}$$

Как показано выше, при каждом $n=1,2,\dots$ существует мера $\mu_n$ в $\mathcal{P}_{\{\rho_n\}}(\mathcal{A})$ такая, что $F(\rho_n)=\widehat{f}(\mu_n)$. Поскольку последовательность $\{\rho_n\}$ – это компактное множество, приведенный выше критерий компактности показывает существование подпоследовательности $\{\mu_{n_k}\}$, сходящейся к некоторой мере $\mu_0$. В силу непрерывности отображения $\mu\mapsto\mathbf{b}(\mu)$ мера $\mu_0$ лежит в $\mathcal{P}_{\{\rho_0\}}(\mathcal{A})$. Из полунепрерывности снизу функционала (6.2) следует, что

$$F(\rho_0)\leqslant\widehat{f}(\mu_0)\leqslant\liminf_{k\to+\infty}\widehat{f}(\mu_{n_k})=\lim_{k\to+\infty}F(\rho_{n_k}),$$

что противоречит (6.3).

Последнее утверждение предложения следует из предыдущих и леммы 1 из [7].

**6.2. О существовании состояния с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которого не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.** Сначала мы покажем, что сепарабельное счетно-неразложимое состояние, построенное в [7], на самом деле обладает более сильным свойством: любое счетное выпуклое разложение этого состояния не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта (счетная неразложимость означает отсутствие разложения в выпуклую комбинацию чистых состояний-произведений – состояний с рангом Шмидта $=1$). Затем, используя это наблюдение, мы построим состояние с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которого не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.

Конструкцию упомянутого выше сепарабельного состояния представим, следуя обозначениям из [7]. Рассмотрим одномерную группу вращений $G$, отождествляя ее с интервалом $[0,2\pi)$ со сложением $\operatorname{mod}2\pi$. Пусть $\mathcal{H}=L^2([0,2\pi))$ с нормированной мерой Лебега $dx/2\pi$, и пусть $\{|k\rangle;k\in\mathbf{Z}\}$ – ортонормированный тригонометрический базис в $\mathcal{H}$, для которого

$$\langle k|\psi\rangle=\int_0^{2\pi}e^{-ixk}\,\psi(x)\,\frac{dx}{2\pi}\,.$$

Рассмотрим унитарное представление $x \to V_x$ группы $G$, где $V_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ixk}|k\rangle\langle k|$, такое, что $(V_u\psi)(x) = \psi(x+u)$.

Для произвольных единичных векторов $|\varphi_j\rangle \in \mathcal{H}_j \simeq L^2([0,2\pi))$, $j=1,2$, рассмотрим сепарабельное состояние

$$\rho_{12} = \int_0^{2\pi} V_x^{(1)}|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|(V_x^{(1)})^* \otimes V_x^{(2)}|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|(V_x^{(2)})^* \,\frac{dx}{2\pi}\,. \tag{6.4}$$

Следующее предложение усиливает утверждение теоремы 3 из [7]. Его доказательство является естественным обобщением доказательства этой теоремы.

Предложение 10. *Пусть $\rho_{12}$ – сепарабельное состояние, определенное в (6.4). Если все коэффициенты Фурье (координаты в базисе $\{|k\rangle\}$) векторов $|\varphi_j\rangle$ отличны от нуля, то оператор*

$$\rho_{12} - \lambda\sigma$$

*не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом чистом состоянии $\sigma$ с конечным рангом Шмидта.*

*Это означает, в частности, что любое счетное выпуклое разложение состояния $\rho_{12}$ не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.*

Доказательство. Предположим, что существует вектор $|\psi\rangle$ в $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ с рангом Шмидта $n$ такой, что

$$\rho_{12} \geqslant |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{6.5}$$

Пусть $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i^1\rangle\otimes|\alpha_i^2\rangle$, где $\{|\alpha_i^j\rangle\}_{i=1}^n$, $j=1,2$, – наборы ортогональных векторов. Из неравенства (6.5) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \bigl|\langle\lambda_1|V_x^{(1)}|\varphi_1\rangle\bigr|^2 \bigl|\langle\lambda_2|V_x^{(2)}|\varphi_2\rangle\bigr|^2 \,\frac{dx}{2\pi} \geqslant \biggl|\sum_{i=1}^n \langle\lambda_1|\alpha_i^1\rangle\langle\lambda_2|\alpha_i^2\rangle\biggr|^2 \tag{6.6}$$

для любых $\lambda_j \in L^2([0,2\pi))$, $j=1,2$.

Рассмотрим линейные отображения

$$L^2([0,2\pi)) \ni \lambda \mapsto \Phi_j(\lambda) = \{\langle\alpha_i^j|\lambda\rangle\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n,$$

$$L^2([0,2\pi)) \ni \lambda \mapsto \Psi_j(\lambda) = \overline{\langle\lambda|V_x^{(j)}|\varphi_j\rangle} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle\varphi_j|k\rangle\langle k|\lambda\rangle e^{-ikx}, \qquad j=1,2.$$

Пусть $\mathcal{H}_0$ – плотное подмножество пространства $L^2([0,2\pi))$, состоящее из тригонометрических полиномов (функций имеющих конечное число ненулевых коэффициентов Фурье). Поскольку $\langle\varphi_j|k\rangle \neq 0$ для всех $k$, отображения $\Psi_j$, $j=1,2$, являются линейными изоморфизмами в $\mathcal{H}_0$. Поэтому из (6.6) следует, что

$$|\langle A_1(\xi), \Xi(A_2(\eta))\rangle_{\mathbb{C}^n}|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |\xi(x)\eta(x)|^2 \,\frac{dx}{2\pi}\,, \qquad \xi,\eta\in\mathcal{H}_0, \tag{6.7}$$

где $A_j(\,\cdot\,) = \Phi_j(\Psi_j^{-1}(\,\cdot\,))$, $j=1,2$, – линейные отображения из $\mathcal{H}_0$ в $\mathbb{C}^n$, а $\Xi$ – комплексное сопряжение в $\mathbb{C}^n$.

Поскольку $\{\Phi_2(\lambda)\mid\lambda\in L^2([0,2\pi))\} = \mathbb{C}^n$, имеем $\{\Phi_2(\lambda)\mid\lambda\in\mathcal{H}_0\} = \mathbb{C}^n$ и, следовательно, $\{A_2(\xi)\mid\xi\in\mathcal{H}_0\} = \mathbb{C}^n$. Поэтому существует набор $|\eta_1\rangle,\dots,|\eta_n\rangle$ векторов из базиса $\{|k\rangle\}$ такой, что векторы $A_2(\eta_1),\dots,A_2(\eta_n)$ образуют базис в $\mathbb{C}^n$. Поскольку $|\eta_i(x)|=1$, из (6.7) следует, что

$$|\langle A_1(\xi),\Xi(A_2(\eta_i))\rangle_{\mathbb{C}^n}|^2\leqslant\int_0^{2\pi}|\xi(x)|^2\,\frac{dx}{2\pi}=\|\xi\|^2,\quad i=1,\dots,n,\qquad \xi\in\mathcal{H}_0.$$

Поэтому отображение $A_1$ ограничено на $\mathcal{H}_0$ и может быть расширено до ограниченного линейного отображения $A_1$ из $L^2([0,2\pi))$ в $\mathbb{C}^n$.

Аналогичное рассуждение показывает возможность расширения отображения $A_2$ до ограниченного линейного отображения $A_2$ из $L^2([0,2\pi))$ в $\mathbb{C}^n$.

Поскольку анти-линейный оператор $B=A_1^*\circ\Xi\circ A_2$ в пространстве $L^2([0,2\pi))$ имеет ранг $\leqslant n$, он имеет представление $B(\,\cdot\,)=\sum_{i=1}^n\langle\,\cdot\,|\beta_i^2\rangle|\beta_i^1\rangle$, где $\{|\beta_i^j\rangle\}$, $j=1,2,$ – наборы векторов из $L^2([0,2\pi))$, причем набор $\{|\beta_i^1\rangle\}$ состоит из линейно независимых векторов.

Поэтому (6.7) можно переписать следующим образом:

$$\left|\sum_{i=1}^n\langle\xi|\beta_i^1\rangle\langle\eta|\beta_i^2\rangle\right|^2\leqslant\int_0^{2\pi}|\xi(x)\eta(x)|^2\,\frac{dx}{2\pi}\,. \tag{6.8}$$

В силу приведенной ниже леммы 3 для произвольного $\varepsilon>0$ можно найти подмножество $\mathcal{A}\subset[0,2\pi)$ с мерой Лебега $<\varepsilon$ такое, что функции $\beta_1^1,\beta_2^1,\dots,\beta_n^1$ линейно независимы на $\mathcal{A}$. Поэтому при каждом $i$ можно найти функцию $\xi$ с носителем в $\mathcal{A}$ такую, что $\langle\xi|\beta_i^1\rangle\neq0$, но $\langle\xi|\beta_j^1\rangle=0$ для всех $j\neq i$. Для этой функции $\xi$ и произвольной функции $\eta$ с носителем в $[0,2\pi)\setminus\mathcal{A}$ правая часть (6.8) равна нулю, а значит, $\langle\eta|\beta_i^2\rangle=0$, и поэтому $\beta_i^2(x)=0$ почти всюду в $[0,2\pi)\setminus\mathcal{A}$. Следовательно, мера носителя функции $\beta_i^2$ не превосходит $\varepsilon$, а значит, $\beta_i^2(x)=0$ почти всюду в $[0,2\pi)$. Поэтому $B=0$, откуда следует, что $|\psi\rangle=0$.

В следующей лемме линейная независимость измеримых функций $f_1,\dots,f_n$ на измеримом подмножестве $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}$ означает, что любая нетривиальная линейная комбинация этих функций не равна нулю почти всюду на $\mathcal{A}$.

Лемма 3. *Пусть $f_1,\dots,f_n$ – линейно независимые измеримые функции на $[a,b]$. Для произвольного $\varepsilon>0$ существует подмножество $\mathcal{A}\subset[a,b]$ с мерой Лебега $\mu(\mathcal{A})<\varepsilon$ такое, что функции $f_1,\dots,f_n$ линейно независимы на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. При $n=1,2$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно верно при заданном $n$ и покажем его выполнимость при $n+1$.

По предположению для любого $\varepsilon>0$ и каждого набора функций $\{f_i\}\setminus f_j$, $j=1,\dots,n+1$, существует подмножество $\mathcal{A}_j^\varepsilon\subset[a,b]$ с $\mu(\mathcal{A}_j^\varepsilon)<\varepsilon$ такое, что функции этого набора линейно независимы на $\mathcal{A}_j^\varepsilon$.

Если утверждение леммы не верно для $n+1$, то существует $\varepsilon_*>0$ такое, что функции $f_1,\dots,f_{n+1}$ линейно зависимы на любом подмножестве $\mathcal{A}\subset[a,b]$ с $\mu(\mathcal{A})<\varepsilon_*$.

Пусть $\varepsilon<\varepsilon_*/2(n+1)$ и $\mathcal{A}^\varepsilon=\bigcup_{j=1}^{n+1}\mathcal{A}_j^\varepsilon$. Выберем конечный набор $\{\mathcal{B}_k\}$ непересекающихся подмножеств множества $[a,b]\setminus\mathcal{A}^\varepsilon$ таких, что $\mu(\mathcal{B}_k)<\varepsilon_*/2$ и $\bigcup_k\mathcal{B}_k=[a,b]\setminus\mathcal{A}^\varepsilon$.

При каждом $k$ пусть $\mathcal{C}_k=\mathcal{A}^\varepsilon\cup\mathcal{B}_k$. Поскольку $\mu(\mathcal{C}_k)<\varepsilon_*$, существует такой набор $\{\lambda_i^k\}_{i=1}^{n+1}$ комплексных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^k f_i(x)=0\quad\text{почти всюду на }\mathcal{C}_k,\qquad \sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i^k|>0. \tag{6.9}$$

Поскольку $\mathcal{A}_j^\varepsilon \subset \mathcal{C}_k$ для всех $j$, нетрудно видеть, что $\lambda_i^k \neq 0$ для всех $i$. Поэтому можно считать, что $\lambda_{n+1}^k = 1$. Поскольку функции $f_1, \dots, f_{n+1}$ линейно независимы на $[a,b] = \bigcup_k \mathcal{C}_k$, существуют $k_1$ и $k_2$ такие, что $\{\lambda_i^{k_1}\}_{i=1}^{n+1} \neq \{\lambda_i^{k_2}\}_{i=1}^{n+1}$. Из (6.9) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^{k_1} - \lambda_i^{k_2}) f_i(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathcal{A}_{n+1}^\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_{k_1} \cap \mathcal{C}_{k_2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{k_1} - \lambda_i^{k_2}| > 0,$$

что противоречит конструкции множества $\mathcal{A}_{n+1}^\varepsilon$.

**6.3. Пример состояния $\omega$ с $\mathrm{SN}(\omega) = k \in \mathbb{N}$ такого, что оператор $\omega - \lambda\sigma$ не является положительным для любого чистого состояния $\sigma$ с конечным рангом Шмидта и любого $\lambda > 0$.** Пусть $\{|\varphi_1^i\rangle\}_{i=1}^k$ и $\{|\varphi_2^i\rangle\}_{i=1}^k$ – наборы ортогональных единичных векторов из $\mathcal{H}_1 = L^2([0,2\pi))$ и $\mathcal{H}_2 = L^2([0,2\pi))$ соответственно, имеющих ненулевые коэффициенты Фурье. Пусть $\mathcal{K}$ – $k$-мерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{|i\rangle\}_{i=1}^k$. Для каждого натурального $n$ рассмотрим состояние

$$\rho_{123}^n = \int_0^{2\pi/n} V_x^{(1)} \otimes V_x^{(2)} \otimes I_{\mathcal{K}} \cdot |\Omega\rangle\langle\Omega| \cdot (V_x^{(1)})^* \otimes (V_x^{(2)})^* \otimes I_{\mathcal{K}} \frac{n\,dx}{2\pi} \tag{6.10}$$

из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K})$, где

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} |\varphi_1^i\rangle \otimes |\varphi_2^i\rangle \otimes |i\rangle$$

– единичный вектор из $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$.

Далее (говоря о ранге и числе Шмидта) будем считать пространство $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$ тензорным произведением пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$.

Поскольку состояние $\rho_{123}^n$ лежит в выпуклом замыкании семейства локальных унитарных “трансляций” состояния $|\Omega\rangle\langle\Omega|$, у которого $\mathrm{SR}(|\Omega\rangle\langle\Omega|) = k$, для всех $n$ выполнено $\mathrm{SN}(\rho_{123}^n) \leqslant k$. Поскольку последовательность $\{\rho_{123}^n\}$ сходится к состоянию $|\Omega\rangle\langle\Omega|$, из полунепрерывности снизу числа Шмидта (предложение 1, A) следует, что $\mathrm{SN}(\rho_{123}^n) = k$ для достаточно большого $n$.

Предположим, что

$$\rho_{123}^n \geqslant \lambda |\Psi\rangle\langle\Psi| \tag{6.11}$$

при некотором $\lambda > 0$, где $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ – чистое состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K})$ с конечным рангом Шмидта. Пусть $P_i = I_{\mathcal{H}_1} \otimes I_{\mathcal{H}_2} \otimes |i\rangle\langle i|$. Поскольку $\sum_{i=1}^k P_i = I_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}}$, существует такой $i_0$, что $P_{i_0}|\Psi\rangle \neq 0$. Можно считать, что $i_0 = 1$. Поэтому $P_1|\Psi\rangle = \nu|\psi\rangle \otimes |1\rangle$, где $\nu > 0$ и $|\psi\rangle$ – единичный вектор из $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Поскольку $P_1 \rho_{123}^n P_1 = k^{-1} \rho_{12}^n \otimes |1\rangle\langle 1|$, где

$$\rho_{12}^n = \int_0^{2\pi/n} V_x^{(1)} |\varphi_1^1\rangle\langle\varphi_1^1| (V_x^{(1)})^* \otimes V_x^{(2)} |\varphi_2^1\rangle\langle\varphi_2^1| (V_x^{(2)})^* \frac{n\,dx}{2\pi},$$

из (6.11) следует, что $\rho_{12}^n \geqslant k\lambda\nu|\psi\rangle\langle\psi|$. Поскольку $P_1(\,\cdot\,)P_1$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(\,\cdot\,)$ – локальные операции, состояние $|\psi\rangle\langle\psi|$ имеет конечный ранг Шмидта. Следовательно, предложение 10 показывает, что $\lambda = 0$.

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в работе над статьей и участникам семинара "Квантовая вероятность, статистика, информация" (МИАН им. В. А. Стеклова), а также Т. В. Шульман за интерес к работе и полезные замечания.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] B. M. Terhal, P. Horodecki, "Schmidt number for density matrices", *Phys. Rev. A*, **61**:4 (2000), 040301.

[2] A. Sanpera, D. Bruß, M. Lewenstein, "Schmidt-number witnesses and bound entanglement", *Phys. Rev. A*, **63**:5 (2001), 050301.

[3] J. Sperling, W. Vogel, "The Schmidt number as a universal entanglement measure", *Phys. Scr.*, **83**:4 (2011), 045002.

[4] J. Sperling, W. Vogel, "Determination of the Schmidt number", *Phys. Rev. A*, **83**:4 (2011), 042315.

[5] D. Chruściński, A. Kossakowski, "On partially entanglement breaking channels", *Open Syst. Inf. Dyn.*, **13**:1 (2006), 17–26.

[6] M. E. Shirokov, *Monotonicity of the Holevo Quantity: A Necessary Condition for Equality in Terms of a Channel*, 2011, arXiv: 1106.3297.

[7] Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, "О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах", *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154, arXiv: quant-ph/0504204.

[8] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1974.

[9] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[10] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Math. Ser., **28**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[11] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.

[12] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Probab. Math. Stat., **3**, Academic Press, New York, 1967.

[13] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, Ижевск, 2003.

[14] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[15] M. B. Plenio, S. Virmani, "An introduction to entanglement measures", *Quantum Inf. Comput.*, **7**:1-2 (2007), 1–51.

[16] М. Е. Широков, "Свойства пространства квантовых состояний и монотонные характеристики сцепленности", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 189–224.

[17] М. Е.Широков, А. С. Холево, "Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов", *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 3–22.

[18] M. Horodecki, P. W. Shor, M. B. Ruskai, "Entanglement breaking channels", *Rev. Math. Phys.*, **15**:6 (2003), 629–641.


**М. Е. Широков**
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
*E-mail*: msh@mi.ras.ru

Поступило
15.11.2011