УДК 517.982.25

В. Ю. Протасов, М. Е. Широков

Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения

Для данного выпуклого множества в линейном метрическом пространстве естественно возникают вопросы об условиях непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной вогнутой функции (CE-свойство) и непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной функции на этом множестве (сильное CE-свойство). В случае выпуклых компактов полное решение этих вопросов было найдено в 1970-е годы усилиями Дж. Вестерстрёма и Р. О'Брайена. Сначала Вестерстрёмом было показано, что для компактов сильное CE-свойство и CE-свойство равносильны соответственно открытости барицентрического отображения и открытости сужения этого отображения на множество максимальных мер. Затем О'Брайен показал эквивалентность последних двух свойств открытости геометрически наглядному "свойству устойчивости" данного компакта, установив тем самым равносильность CE-свойства и сильного CE-свойства. В работе решается следующая задача: обобщаются ли эти результаты на некомпактные выпуклые множества, и если да, то на какие? Доказано, что такое обобщение возможно на класс так называемых μ-компактных множеств. Приведены аргументы, показывающие, что этот класс является, по-видимому, максимальным классом, для которого такое обобщение возможно. Детально исследуются свойства μ-компактов, рассматривается ряд примеров и обсуждаются приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: барицентрическое отображение, μ-компактное множество, выпуклая оболочка функции, устойчивость выпуклого множества.

§ 1. Введение

Свойства и структура компактных множеств в контексте выпуклого анализа активно изучаются с середины прошлого века, этому посвящена обширная литература (см. [1]–[3] и библиографию в этих работах). К числу наиболее важных результатов относятся теорема Крейна–Мильмана о выпуклой оболочке крайних точек, теория Шоке о барицентрическом разложении, свойства выпуклых оболочек (convex envelopes) функций, заданных на выпуклых компактах. В работах Г. А. Эдгара [4], [5] и Р. Д. Боргина [6], [7] ряд классических

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208), МД-2195.2008.1 и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3233.2008.1), работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-01-00156 и № 09-01-00424а) и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 2.1.1/500).

результатов обобщен на некомпактные множества в локально выпуклых пространствах. Подобные обобщения не только представляют теоретический интерес, но и существенно важны для приложений, например, в математической физике (см. [8]), квантовой теории информации (см. [9]) и т.д. Понятно, что классические результаты выпуклого анализа обобщаются не на любые некомпактные множества. От множеств требуются некоторые специальные свойства. Так, теория Шоке была распространена на множества, обладающие свойством Радона–Никодима (см. [4]). В работе [9] ряд результатов о непрерывности выпуклых оболочек функций был обобщен на специальный класс некомпактных множеств, названный *μ-компактами*. Этот класс, характеризуемый специальным сочетанием топологии и структуры линейных операций, и будет основным классом множеств, рассматриваемым в настоящей статье.

Начиная с 1970-х годов в литературе исследуются задачи о непрерывности выпуклых оболочек функций (см. определение 1). При каких условиях на выпуклый компакт $\mathscr{A}$ выпуклая оболочка любой непрерывной (в другой постановке – вогнутой непрерывной) функции, заданной на $\mathscr{A}$, непрерывна? Дж. Вестерстрём в работе [10] показал, что необходимым и достаточным условием этого является свойство открытости барицентрического отображения. Он также высказал гипотезу о равносильности свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной вогнутой функции (названного в [11] CE-*свойством*) и свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной функции (названного в [9] *сильным* CE-*свойством*). Эта гипотеза была доказана Р. О'Брайеном (см. [12]), который показал эквивалентность CE-свойств свойству открытости отображения выпуклого смешивания

$$(x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$$

(свойство устойчивости выпуклых множеств – stable convex sets; см. [13]–[15]). В какой мере данные результаты распространяются на некомпактные множества $\mathscr{A}$? Первый шаг в решении этой задачи был сделан в работе [9], где были определены так называемые μ-компактные множества. Часть результатов о CE-свойствах была перенесена с компактов на более широкий класс μ-компактов, что позволило, в частности, получить ряд результатов о свойствах энтропийных характеристик бесконечномерных квантовых каналов и систем.

В настоящей работе мы детально исследуем свойство μ-компактности, рассматриваем ряд примеров, важных для приложений, обобщаем на класс выпуклых μ-компактов некоторые классические результаты выпуклого анализа, ранее доказанные только для компактов, в частности теорию Вестерстрёма–О'Брайена.

Класс μ-компактных выпуклых множеств определяется требованием слабой компактности прообраза любого компакта при барицентрическом отображении, которое не является чисто топологическим, но выражает определенную связь топологии и структуры линейных операций. Этот класс включает в себя как все компакты, так и некоторые важные для приложений некомпактные множества (например, множество операторов плотности в сепарабельном гильбертовом пространстве). μ-компактные множества не обладают многими свойствами компактов, такими, например, как ограниченность непрерывных функций, теорема Вейерштрасса и т.д. Тем не менее, как мы увидим, на них можно распространить многие результаты теории Шоке и теории Вестерстрёма–О'Брайена. Более того, будут приведены аргументы, показывающие, что класс выпуклых μ-компактов является в определенном смысле максимальным классом, для которого возможно обобщение теории Вестерстрёма–О'Брайена.

Статья организована следующим образом. В § 2 устанавливаются основные свойства μ-компактов. На простом примере мы покажем, что ряд результатов, распространяющихся на μ-компактные множества, может не выполняться уже при небольшом ослаблении этого свойства до точечной μ-компактности (это свойство определяется требованием слабой компактности множества мер с фиксированным барицентром). Затем мы рассмотрим примеры μ-компактных множеств. В частности, покажем, что ограниченная часть положительного конуса в пространстве l_p при $p = 1$ является μ-компактом, а при $p > 1$ не обладает даже свойством точечной μ-компактности. Также докажем μ-компактность множества борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве. Этот результат позволяет доказать сохранение μ-компактности при операции выпуклого замыкания.

В § 3 завершим начатое в [9] обобщение теории Вестерстрёма–О'Брайена на μ-компактные выпуклые множества. Докажем μ-компактную версию основного результата из [12], который, в частности, устанавливает равносильность свойства непрерывности выпуклой оболочки любой вогнутой непрерывной ограниченной функции и непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции. Затем построим пример, подтверждающий предположение о том, что выпуклые μ-компакты составляют максимальный класс выпуклых метризуемых множеств, для которых возможно такое обобщение.

В § 4 рассмотрим некоторые приложения полученных результатов в квантовой теории информации. Возможные обобщения и формулировку открытых вопросов приведем в § 5.

§ 2. О μ-компактных множествах

2.1. Основные определения и свойства. В § 2 и § 3 будем предполагать, что $\mathscr{A}$ – замкнутое ограниченное подмножество локально выпуклого пространства, выпуклое замыкание $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$ которого (определяемое как замыкание выпуклой оболочки $\mathrm{co}\,\mathscr{A}$ множества $\mathscr{A}$) является полным сепарабельным метрическим пространством[1]. Будем использовать следующие обозначения:

$\mathrm{extr}\,\mathscr{A}$ – множество крайних точек выпуклого множества $\mathscr{A}$;

$C(\mathscr{A})$ – множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathscr{A}$;

$P(\mathscr{A})$, $Q(\mathscr{A})$ – соответственно множества выпуклых и вогнутых непрерывных ограниченных функций на выпуклом множестве $\mathscr{A}$;

[1] Это означает, что топология на множестве $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$ определяется некоторым счетным набором из семейства полунорм, определяющих топологию всего локально выпуклого пространства, и что это множество является сепарабельным и полным в метрике, порожденной этим счетным набором полунорм.

$\mathrm{co}\,f$, $\overline{\mathrm{co}}\,f$ – выпуклая оболочка и выпуклое замыкание функции f на выпуклом множестве, определяемые соответственно как наибольшая выпуклая и как наибольшая выпуклая замкнутая (полунепрерывная снизу) функции, не превосходящие функцию f (см. [3], [16]);

$\mathfrak{P}_n = \bigl\{\{\pi_i\}_{i=1}^n \mid \pi_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^n \pi_i = 1\bigr\}$ – симплекс всех распределений вероятностей с $n \leqslant +\infty$ исходами.

Пусть $M(\mathscr{A})$ – множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\mathscr{A}$, снабженное топологией слабой сходимости (см. [17], [18]).

Каждой мере $\mu \in M(\mathscr{A})$ можно сопоставить ее барицентр (среднее) $\mathbf{b}(\mu) \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$, определяемый интегралом Петтиса (см. [17], [19])

$$\mathbf{b}(\mu) = \int_{\mathscr{A}} x\,\mu(dx). \tag{1}$$

Пусть $M_x(\mathscr{A})$ – выпуклое замкнутое подмножество множества $M(\mathscr{A})$, состоящее из таких мер μ, что $\mathbf{b}(\mu) = x \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$.

Меру с конечным или счетным числом атомов $\{x_i\}$ с весами $\{\pi_i\}$ будем обозначать $\{\pi_i, x_i\}$. Пусть $M^{\mathrm{f}}(\mathscr{A})$ и $M_x^{\mathrm{f}}(\mathscr{A})$ – подмножества множеств $M(\mathscr{A})$ и $M_x(\mathscr{A})$ соответственно, состоящие из мер с конечным носителем.

Барицентрическое отображение

$$M(\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A} \tag{2}$$

является непрерывным (это нетрудно доказать, используя теорему Прохорова). Поэтому образ любого компакта в $M(\mathscr{A})$ при отображении (2) является компактом в $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$. Обратное отображение $\mathbf{b}^{-1}$ может уже не обладать этим свойством. Обобщая определение из [9], выделим класс выпуклых множеств, для которых отображение $\mathbf{b}^{-1}$ переводит компакты в компакты.

Определение 1. Множество $\mathscr{A}$ назовем *μ-компактным*, если прообраз любого компактного подмножества множества $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$ при барицентрическом отображении (2) является компактным подмножеством множества $M(\mathscr{A})$.

Любое компактное множество является μ-компактным. Действительно, из компактности $\mathscr{A}$ следует компактность $M(\mathscr{A})$ (см. [18]). С помощью теоремы Прохорова нетрудно получить следующий критерий μ-компактности (см. [9]).

Предложение 1. *Выпуклое множество $\mathscr{A}$ является μ-компактным тогда и только тогда, когда для любого компактного подмножества $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество $\mathscr{K}_\varepsilon \subseteq \mathscr{A}$ такое, что для любого $x \in \mathscr{K}$ из разложения $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, где $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{A}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{P}_n$, следует $\sum_{i:x_i\in\mathscr{A}\setminus\mathscr{K}_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon$.*

Из предложения 1 и общих свойств множества $M(\mathscr{A})$ следует критерий μ-компактности, наиболее удобный для практического использования.

Предложение 2. *Выпуклое множество $\mathscr{A}$ является μ-компактным тогда и только тогда, когда существует семейство $F(\mathscr{A})$ вогнутых неотрицательных функций на $\mathscr{A}$, обладающее следующими свойствами:*

- *множество $\{x \in \mathscr{A} \mid f(x) \leqslant c\}$ относительно компактно для любой функции $f \in F(\mathscr{A})$ и любого $c > 0$;*

- *для любого компактного подмножества $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{A}$ найдется функция $f \in F(\mathscr{A})$ такая, что* $\sup_{x\in\mathscr{K}} f(x) < +\infty$.

Доказательство. Достаточность приведенного условия нетрудно установить, используя предложение 1 (см. [9]).

Покажем его необходимость. Пусть $\mathfrak{V}(\mathscr{A})$ – множество всех полунепрерывных снизу функций φ на $\mathscr{A}$ со значениями в $[0, +\infty]$ таких, что множество $\{x \in \mathscr{A} \mid \varphi(x) \leqslant c\}$ компактно при любом $c \geqslant 0$. Из теоремы Прохорова следует (см. [17; пример 8.6.5]), что подмножество $M_0 \subseteq M(\mathscr{A})$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi \in \mathfrak{V}(\mathscr{A})$ такая, что

$$\sup_{\mu\in M_0} \int_{\mathscr{A}} \varphi(x)\, \mu(dx) < +\infty.$$

Рассмотрим семейство вогнутых неотрицательных функций

$$f_\varphi(x) = \sup_{\mu\in M_x(\mathscr{A})} \int_{\mathscr{A}} \varphi(y)\, \mu(dy), \qquad \varphi \in \mathfrak{V}(\mathscr{A}),$$

на множестве $\mathscr{A}$. Наличие у этого семейства первого характеристического свойства семейства $F(\mathscr{A})$ следует из непрерывности барицентрического отображения, тогда как второе вытекает из μ-компактности множества $\mathscr{A}$.

Замечание 1. Интересно отметить, что для всех выпуклых μ-компактных некомпактных множеств (рассмотренных в п. 2.2) удается найти семейство $F(\mathscr{A})$, состоящее из аффинных полунепрерывных снизу функций.

В [20] получен критерий μ-компактности выпуклого множества в терминах свойств функций, определенных на этом множестве. А именно, показано, что μ-компактность равносильна непрерывности операции выпуклого замыкания (двойного преобразования Фенхеля) относительно монотонных поточечно сходящихся последовательностей на классах непрерывных ограниченных и полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций.

Свойство μ-компактности может не сохраняться под действием непрерывных аффинных отображений. Из предложений 1 и 2 несложно получить следующий результат.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ – выпуклые множества,*[2] *а φ – такое непрерывное аффинное отображение $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$, что для любого компакта $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ его полный прообраз $\varphi^{-1}(\mathscr{C})$ является компактом в $\mathscr{A}$. Тогда*:

1) *из μ-компактности $\mathscr{B}$ следует μ-компактность $\mathscr{A}$*;
2) *если φ сюръективно, то из μ-компактности $\mathscr{A}$ следует μ-компактность $\mathscr{B}$.*

Свойство μ-компактности множества сохраняется при операциях пересечения, выпуклого замыкания и прямого произведения.

Предложение 4. 1) *Замкнутое подмножество любого μ-компакта является μ-компактом.*

2) *Выпуклое замыкание любого μ-компакта является μ-компактом.*

[2] Предполагаем, что множество $\mathscr{B}$ обладает свойствами, указанными в начале п. 2.1.

3) *Декартово произведение конечного или счетного числа μ-компактов является μ-компактом* (*в топологии покоординатной сходимости*).

Доказательство. 1) Утверждение непосредственно следует из определения 1.

2) Из μ-компактности множества $\mathscr{A}$ и предложения 2 в [9] (доказательство которого непосредственно переносится на рассматриваемый в статье класс множеств) следует, что барицентрическое отображение $\mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$ является непрерывной аффинной сюръекцией из $M(\mathscr{A})$ на $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$, удовлетворяющей условию предложения 3. В силу п. 2) предложения 3 и следствия 4 (см. п. 2.2) множество $\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$ является μ-компактным.

3) В силу утверждения 2) достаточно рассмотреть случай выпуклых μ-компактов. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathscr{A}^n$ μ-компактно. Покажем, что множество $\mathscr{A} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}^n$ является μ-компактом в топологии покоординатной сходимости. Пусть $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$ – произвольный компакт. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathscr{K}^n$ (проекция $\mathscr{K}$ на $\mathscr{A}^n$, состоящая из точек $x^n \in \mathscr{A}^n$, каждая из которых является соответствующей координатой некоторой точки $x \in \mathscr{K}$) компактно. Поскольку множество $\mathscr{A}^n$ μ-компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ в силу предложения 1 найдется соответствующий компакт $\mathscr{K}^n_\varepsilon \subset \mathscr{A}^n$. Так как $\mathscr{K} \subseteq \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{K}^n$, то можно положить $\mathscr{K}_\varepsilon = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{K}^n_{\varepsilon 2^{-n}}$ и проверить, что для этого множества выполняются условия предложения 1. Таким образом, множество $\mathscr{A}$ μ-компактно.

Из п. 1) предложения 4 следует, что пересечение любого числа μ-компактов является μ-компактом. Однако их объединение и сумма Минковского в общем случае μ-компактами не являются (замечание 4).

Замечание 2. В силу п. 2) предложения 4 для доказательства μ-компактности выпуклого множества $\mathscr{A}$ достаточно доказать μ-компактность любого его подмножества $\mathscr{B}$ такого, что $\mathscr{A} = \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{B}$. Интересно отметить, что при этом множества мер $M(\mathscr{A})$ и $M(\mathscr{B})$ (участвующие в определении μ-компактности множеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$) могут быть существенно различны. Например, если $\mathscr{A}$ – симплекс, то $\mathscr{B}$ может представлять собой счетный набор $\{e_i\}$ изолированных крайних точек множества $\mathscr{A}$, а значит, $M(\mathscr{B})$ изоморфно множеству $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов, при этом критерий μ-компактности множества $\mathscr{B}$, а значит, и $\mathscr{A}$ можно сформулировать следующим образом: для любого компакта $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что из $\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i e_i \in \mathscr{K}$, $\{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_{+\infty}$, следует $\sum_{i=n+1}^{+\infty} \pi_i < \varepsilon$.

В силу п. 2) предложения 4 и приведенного ниже предложения 5 приходим к следующему наблюдению. Пусть $\mathscr{A}$ – μ-компактное выпуклое множество в исходной топологии τ, и пусть τ' – более сильная топология на $\mathscr{A}$, совпадающая с топологией τ на множестве $\overline{\mathrm{extr}\,\mathscr{A}}$; тогда множество $\mathscr{A}$ μ-компактно в топологии τ'.

Из предложения 3 следует, что изоморфизмами в категории μ-компактных выпуклых множеств являются аффинные гомеоморфизмы. Свойство аффинности существенно, что подтверждается следующим примером. Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое множество, не являющееся μ-компактным. В силу п. 1) предложения 4 и приведенного далее следствия 4 подмножество множества $M(\mathscr{A})$, состоящее из дираковских (одноатомных) мер, является μ-компактом, гомеоморфным множеству $\mathscr{A}$. Это наблюдение показывает, что свойство μ-компактности (в отличие от свойства компактности) не является чисто топологическим, а определяется сочетанием топологии и структуры операции выпуклого смешивания.

Из предложения 3 следует условие μ-компактности семейств отображений, которое будет использовано в следующем параграфе.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ – локально выпуклое пространство с топологией τ отображений из множества $\mathscr{X}$ в локально выпуклое пространство $\mathscr{Y}$, а $\mathfrak{F}_0$ – выпуклое ограниченное замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, состоящее из отображений с множеством значений в выпуклом μ-компакте $\mathscr{A} \subset \mathscr{Y}$, причем $\mathfrak{F}_0$ является полным сепарабельным метрическим пространством таким, что существует элемент $x_0 \in \mathscr{X}$ со следующими свойствами*:

1) $\{\tau - \lim_{n\to+\infty} \Phi_n = \Phi_0\} \Longrightarrow \{\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(x_0) = \Phi_0(x_0)\} \quad \forall\, \{\Phi_n\} \subset \mathfrak{F}_0$;
2) *множество $\{\Phi \in \mathfrak{F}_0 \mid \Phi(x_0) \in \mathscr{C}\}$ является относительно компактным в топологии τ для любого компакта $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$.*

Тогда множество $\mathfrak{F}_0$ является μ-компактным.

Доказательство. Непрерывное аффинное отображение

$$\mathfrak{F}_0 \ni \Phi \mapsto \Phi(x_0) \in \mathscr{A}$$

удовлетворяет условиям предложения 3, из п. 1) которого следует μ-компактность множества $\mathfrak{F}_0$.

Для дальнейшего исследования μ-компактности введем ослабленную версию этого свойства.

Определение 2. Множество $\mathscr{A}$ назовем *точечно μ-компактным*, если для любого $x \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{A}$ множество $M_x(\mathscr{A})$ является компактным подмножеством множества $M(\mathscr{A})$.

Ясно, что точечная μ-компактность следует из μ-компактности. Однако, как мы увидим далее (предложение 13), эти свойства не равносильны.

μ-компактные множества не обладают многими свойствами компактов, такими, например, как равномерная непрерывность и ограниченность непрерывных функций, теорема Вейерштрасса о достижении экстремальных значений непрерывных функций и т.д. Оказывается, однако, что μ-компакты наследуют некоторые важные свойства компактных множеств, позволяющие распространить на них многие результаты теории Шоке и теорию Вестерстрёма–О'Брайена (см. § 3).

Если $\mathscr{A}$ – выпуклое множество, то на множестве $M(\mathscr{A})$ можно ввести следующее отношение частичного порядка, называемое *порядком Шоке* (Choquet ordering; см. [1], [6]). Будем считать, что $\mu \succ \nu$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy) \geqslant \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\nu(dy)$$

для любой функции $f \in P(\mathscr{A})$.

Мера $\mu \in M(\mathscr{A})$ называется *максимальной*, если из $\nu \succ \mu$ следует $\nu = \mu$ для любой меры $\nu \in M(\mathscr{A})$. Заметим, что если μ и ν – меры из $M(\mathscr{A})$ такие, что $\mu \succ \nu$, то $\mathbf{b}(\mu) = \mathbf{b}(\nu)$ (это следует из того, что множество непрерывных ограниченных аффинных функций на множестве $\mathscr{A}$ отделяет точки этого множества).

Из определения 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое точечно μ-компактное множество. Любое подмножество множества $M(\mathscr{A})$, линейно упорядоченное отношением $\prec$, имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Любое подмножество множества $M(\mathscr{A})$, линейно упорядоченное отношением $\prec$, которое можно рассматривать как направленность $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, содержится в $M_x(\mathscr{A})$ при некотором $x \in \mathscr{A}$ и, следовательно, относительно компактно. Поэтому существует поднаправленность $\{\mu_{\lambda_\pi}\}_{\pi\in\Pi}$, сходящаяся к некоторой мере $\mu_0 \in M_x(\mathscr{A})$. Непосредственная проверка показывает, что $\mu_\lambda \prec \mu_0$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Лемма 1 с учетом теоремы 2.4 из [5] показывает, что класс выпуклых точечно μ-компактных множеств является собственным подклассом класса выпуклых множеств, обладающих свойством Радона–Никодима. Исследованию этого свойства и соответствующего класса выпуклых множеств посвящена обширная литература (см. [4]–[6]).

Используя лемму 1 и лемму Цорна, несложно установить следующее обобщение теоремы Крейна–Мильмана и теоремы Шоке на точечно μ-компактные множества (которое является следствием наличия у этих множеств свойства Радона–Никодима; см. [5]).

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{A}$ – точечно μ-компактное выпуклое множество. Тогда $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{extr}\,\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ и $\mathbf{b}(M(\overline{\mathrm{extr}\,\mathscr{A}})) = \mathscr{A}$.*

Доказательство. В силу плотности в $M(\overline{\mathrm{extr}\,\mathscr{A}})$ множества мер с конечным носителем (см. [18; теорема 6.3]) первое утверждение непосредственно следует из второго.

Пусть $x_0 \in \mathscr{A}$. Из леммы 1 и леммы Цорна следует существование максимальной меры μ_* в M_{x_0}. В силу свойств порядка Шоке мера μ_* будет максимальной и в $M(\mathscr{A})$, а значит, эта мера лежит в $M(\overline{\mathrm{extr}\,\mathscr{A}})$ (см. доказательство теоремы 5.2 в [4]). Таким образом, $x_0 \in \mathbf{b}(M(\overline{\mathrm{extr}\,\mathscr{A}}))$.

Другое свойство, которое μ-компакты наследуют у компактных множеств, есть следующее представление для выпуклого замыкания функций (полученное в предложении 3 в [9]; его доказательство непосредственно обобщается на рассматриваемый в статье класс множеств).

Предложение 6. *Пусть f – полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на выпуклом μ-компакте $\mathscr{A}$. Тогда ее выпуклое замыкание вычисляется по формуле*

$$\overline{\mathrm{co}}\, f(x) = \inf_{\mu\in M_x(\mathscr{A})} \int_{\mathscr{A}} f(y)\,\mu(dy) \qquad \forall\, x \in \mathscr{A}, \tag{3}$$

точная нижняя грань в которой достигается на некоторой мере μ_x^f *из* $M_x(\mathscr{A})$.

Именно это представление служит основой для большинства результатов о выпуклых замыканиях функций, определенных на выпуклых μ-компактах.

Если f – непрерывная ограниченная функция на выпуклом μ-компакте $\mathscr{A}$, то в силу непрерывности функционала

$$M(\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto \int_{\mathscr{A}} f(x)\,\mu(dx)$$

из [9; лемма 1] следует, что точную нижнюю грань в (3) можно брать по множеству мер с конечным носителем.

Следствие 2. *Любая непрерывная ограниченная функция* f *на выпуклом* μ*-компакте* $\mathscr{A}$ *имеет полунепрерывную снизу* (*замкнутую*) *выпуклую оболочку*, *т.е.*

$$\operatorname{co} f(x) = \inf_{\{\pi_i, x_i\} \in M_x^{\mathrm{f}}(\mathscr{A})} \sum_i \pi_i f(x_i) = \overline{\operatorname{co}}\, f(x) \qquad \forall\, x \in \mathscr{A}. \tag{4}$$

Это утверждение является μ-компактным обобщением следствия I.3.6 из [2].

Условие μ-компактности множества $\mathscr{A}$ в предложении 6 и в следствии 2 нельзя ослабить до точечной μ-компактности.

Предложение 7. *Если* $\mathscr{A}$ *– точечно* μ*-компактное выпуклое множество*, *не являющееся* μ*-компактным*, *то существует непрерывная ограниченная функция* f *на* $\mathscr{A}$, *у которой выпуклая оболочка* $\operatorname{co} f$ *не является полунепрерывной снизу*.

Это означает, *что для выпуклого замыкания* $\overline{\operatorname{co}}\, f$ *функции* f *не имеет места представление* (3).

Доказательство. Поскольку множество $\mathscr{A}$ не μ-компактно, существует такая некомпактная последовательность мер $\{\mu_n\} \subset M(\mathscr{A})$, что соответствующая последовательность $\{x_n = \mathbf{b}(\mu_n)\} \subset \mathscr{A}$ сходится. В силу теоремы Прохорова последовательность $\{\mu_n\}$ не является (равномерно) плотной. Как показано в доказательстве теоремы 8.6.2 из [17], это гарантирует существование таких $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любого компакта $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$ и любого натурального N найдется такое $n > N$, что $\mu_n(U_\delta(\mathscr{K})) < 1 - \varepsilon$, где $U_\delta(\mathscr{K})$ – замкнутая δ-окрестность компакта $\mathscr{K}$. В силу плотности множества мер с конечным носителем в множестве мер с данным барицентром (см. [9; лемма 1]) с учетом следствия 8.2.9 из [17] можно считать, что последовательность $\{\mu_n\}$ состоит из мер с конечным носителем.

Пусть x_0 – предел последовательности $\{x_n\}$. В силу точечной μ-компактности множества $\mathscr{A}$ для определенного выше ε существует такой выпуклый компакт $\mathscr{K}_\varepsilon$, что $\mu(\mathscr{K}_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon/2$ для любой меры $\mu \in M_{x_0}(\mathscr{A})$.

Пусть f – такая непрерывная ограниченная функция на $\mathscr{A}$, что $f(x) = 1$ для всех $x \in \mathscr{K}_\varepsilon$ и $f(x) \leqslant 0$ для всех $x \in \mathscr{A} \setminus U_\delta(\mathscr{K}_\varepsilon)$. Тогда из приведенных выше свойств последовательностей $\{x_n\}$ и $\{\mu_n\}$ следует, для любого натурального N найдется такое $n > N$, что $\operatorname{co} f(x_n) < 1 - \varepsilon$, в то время как из свойства множества $M_{x_0}(\mathscr{A})$ следует, что $\operatorname{co} f(x_0) \geqslant 1 - \varepsilon/2$. Таким образом, функция $\operatorname{co} f$ не является полунепрерывной снизу.

Замечание 3. Условие точечной μ-компактности существенно в доказательстве предложения 7. Это обстоятельство не позволяет охарактеризовать μ-компакты как максимальный класс выпуклых множеств, для которых верно утверждение следствия 2. Однако и при отсутствии точечной μ-компактности утверждение следствия 2 может нарушаться (см. пример 1 в п. 2.2).

В качестве примера, показывающего существенность условия точечной μ-компактности в предложении 7, рассмотрим единичный шар $\mathscr{B}$ сепарабельного гильбертова пространства. Ясно, что он не является точечным μ-компактом. Покажем, что для любой непрерывной ограниченной функции f на $\mathscr{B}$ ее выпуклая оболочка $\operatorname{co} f$ непрерывна. Так как ограниченная выпуклая функция непрерывна во внутренних точках области определения, то достаточно доказать непрерывность $\operatorname{co} f$ на границе $\mathscr{B}$, т.е. в точках единичной сферы.

Пусть x – точка единичной сферы. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $\|x-y\| < 2\delta$, то $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. В силу приведенной ниже леммы 2 для произвольной точки z такой, что $\|z-x\| < \delta$, и для произвольной меры $\mu \in M_z(\mathscr{B})$ мера шара радиуса 2δ с центром x не меньше чем $r(\delta, z)$. Следовательно, величина

$$\left| f(x) - \int_{\mathscr{B}} f(t)\, d\mu \right|$$

не превосходит $\varepsilon r(\delta,z) + N(1-r(\delta,z))$, где $N = \sup_{t\in\mathscr{B}} |f(t)|$. Значит,

$$|f(x) - \operatorname{co} f(z)| \leqslant \varepsilon r(\delta,z) + N(1-r(\delta,z)).$$

Так как при $z \to x$ имеем $\|z\| \to 1$, значит, $r(\delta,z) \to 1$ и, следовательно, $\operatorname{co} f(z) \to f(x)$. Остается заметить, что $\operatorname{co} f(x) = f(x)$, поскольку x – крайняя точка $\mathscr{B}$.

Лемма 2. *Даны единичный шар $\mathscr{B}$ гильбертова пространства и число $\delta > 0$. Для любой точки $z \in \mathscr{B}$ такой, что $\|z\| > 1-\delta$, и для любой меры $\mu \in M_z(\mathscr{B})$ мера шара радиуса δ с центром z не меньше чем*

$$r(\delta,z) = \frac{\delta^2 - (1-\|z\|^2)}{\delta^2 - (1-\|z\|)^2}\,.$$

Доказательство. Положим $\bar z = z/\|z\|$ и

$$\mathscr{B}_0 = \left\{ y \in \mathscr{B},\ (y,\bar z) < \frac{1+\|z\|^2-\delta^2}{2\|z\|} \right\},$$
$$\mathscr{B}_1 = \left\{ y \in \mathscr{B},\ (y,\bar z) \geqslant \frac{1+\|z\|^2-\delta^2}{2\|z\|} \right\}.$$

Прямым вычислением показываем, что если $\|y\| = 1$ и $\|y-z\| > \delta$, то $y \in \mathscr{B}_0$. Следовательно, все точки шара $\mathscr{B}$, удаленные от z на расстояние больше чем δ, лежат в множестве $\mathscr{B}_0$. Пусть c_i – барицентр меры μ на множестве $\mathscr{B}_i$, $i = 0,1$. Тогда $z = \mu(\mathscr{B}_0)c_0 + \mu(\mathscr{B}_1)c_1$. Ясно, что $(c_0,\bar z) \leqslant (1+\|z\|^2-\delta^2)/(2\|z\|)$ и $(c_1,\bar z) \leqslant 1$. Следовательно,

$$\|z\| = (z,\bar z) < (1-\mu(\mathscr{B}_1))\frac{1+\|z\|^2-\delta^2}{2\|z\|} + \mu(\mathscr{B}_1),$$

откуда получаем требуемое неравенство для $\mathscr{B}_1$, а следовательно, и для меры шара радиуса δ с центром z, так как этот шар содержит множество $\mathscr{B}_1$.

Одно из важнейших следствий предложения 6 – совпадение любой полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции f, определенной на выпуклом μ-компакте $\mathscr{A}$, с ее выпуклым замыканием $\overline{\mathrm{co}}\, f$ на множестве крайних точек $\operatorname{extr}\mathscr{A}$. Более того, это предложение позволяет получить следующее представление для множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$, которое будет использовано в § 3.

Предложение 8. *Пусть $\mathscr{A}$ – μ-компактное выпуклое множество. Тогда*

$$\operatorname{extr}\mathscr{A} = \bigcap_{f\in Q(\mathscr{A})} \mathscr{B}_f, \qquad \text{где } \mathscr{B}_f = \{x \in \mathscr{A} \mid f(x) = \overline{\mathrm{co}}\, f(x)\}. \tag{5}$$

Доказательство. Включение $\operatorname{extr}\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}_f$ для любой функции $f \in Q(\mathscr{A})$ следует из (4). Пусть $x_0 \in \mathscr{A} \setminus \operatorname{extr}\mathscr{A}$. Тогда в $\mathscr{A}$ существуют различные точки x_1 и x_2 такие, что $x_0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Для доказательства того, что точка x_0 не лежит в $\bigcap_{f\in Q(\mathscr{A})} \mathscr{B}_f$, достаточно найти в $Q(\mathscr{A})$ такую функцию f, для которой $f(x_0) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$. В качестве такой функции можно взять функцию $-a^2(\,\cdot\,)$, где a – такая аффинная непрерывная ограниченная функция на $\mathscr{A}$, что $a(x_1) \neq a(x_2)$.

Пример 1 (см. п. 2.2) показывает существенность условия μ-компактности в предложении 8.

Используя рассуждение из доказательства предложения 7, нетрудно показать, что необходимым условием справедливости выражения (5) является следующее свойство локальной μ-компактности в окрестности множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$: для любой крайней точки x_0 множества $\mathscr{A}$ и любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathscr{A}$, сходящейся к x_0, множество $\mathbf{b}^{-1}(\{x_n\})$ компактно в $M(\mathscr{A})$.

2.2. Примеры. Любое компактное множество является также и μ-компактным. В этом пункте будут рассмотрены несколько наиболее важных примеров μ-компактных, но не компактных множеств.

Предложение 9. *Ограниченная часть*[3] *положительного конуса в пространстве l_1 является μ-компактом.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть семейство функций вида $l_1 \ni \{x_i\} \mapsto \sum_i h_i x_i$, где $\{h_i\}$ – возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел, и использовать предложение 2 (с учетом критерия компактности для подмножеств пространства l_1).

Следствие 3. *Множество $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов μ-компактно в метрике пространства l_1.*

Замечание 4. Пусть $\mathscr{A}_1 = \{x \in l_1 \mid x \geqslant 0,\ \|x\|_1 \leqslant 1\}$. Согласно предложению 9 оба множества $\mathscr{A}_1$ и $-\mathscr{A}_1$ μ-компактны в метрике l_1. Однако их выпуклая оболочка и их сумма (по Минковскому) не являются даже точечно μ-компактными, поскольку содержат единичный шар пространства l_1, который, как легко показать, не является точечно μ-компактным.

[3]Здесь и далее под ограниченной частью положительного конуса в упорядоченном банаховом пространстве будем понимать пересечение этого конуса с единичным шаром.

Предложение 10. *Любое слабо замкнутое ограниченное по вариации множество борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве является μ-компактом в топологии слабой сходимости.*

Доказательство. Пусть X – полное сепарабельное метрическое пространство, M – слабо замкнутое ограниченное множество борелевских мер на нем, $\mathfrak{V}(X)$ – множество всех полунепрерывных снизу функций φ на пространстве X со значениями в $[0,+\infty]$ таких, что множество $\{x \in X \mid \varphi(x) \leqslant c\}$ компактно при любом $c \geqslant 0$. Из теоремы Прохорова следует (см. [17; пример 8.6.5]), что подмножество $M_0 \subseteq M$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi \in \mathfrak{V}(X)$ такая, что

$$\sup_{\mu\in M_0} \int_X \varphi(x)\,\mu(dx) < +\infty.$$

Поэтому семейство аффинных полунепрерывных снизу функций

$$f_\varphi(\mu) = \int_X \varphi(x)\,\mu(dx), \qquad \varphi \in \mathfrak{V}(X),$$

на множестве M удовлетворяет условиям предложения 2.

Следствие 4. *Множество борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве является μ-компактом в топологии слабой сходимости.*

Предложения 3 и 9, а также приведенное ниже предложение 15 позволяют доказать следующее утверждение о свойствах конуса положительных операторов в банаховом пространстве Шаттена порядка p (т.е. в пространстве всех операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, у которых $\operatorname{Tr}|A|^p < +\infty$) с нормой $\|A\|_p = (\operatorname{Tr}|A|^p)^{1/p}$.

Предложение 11. *Ограниченная часть положительного конуса в пространстве Шаттена порядка p является μ-компактом только при $p = 1$.*

Доказательство. В случае $p = 1$ заметим, что в силу критерия компактности для подмножеств положительного конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ пространства ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ (см. лемму в [21; приложение]) отображение, ставящее в соответствие оператору $A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ набор его диагональных элементов в некотором фиксированном базисе пространства $\mathscr{H}$, удовлетворяет условиям п. 1) предложения 3, если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ – ограниченные части положительных конусов пространств $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ и l_1 соответственно. Из предложения 3 с учетом предложения 9 и следует μ-компактность ограниченной части конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$.

В случае $p > 1$ конус положительных операторов в пространстве Шаттена содержит подконус коммутирующих операторов, аффинно гомеоморфный $\mathscr{A}_p$ – ограниченной части положительного конуса в пространстве l_p, которая не является μ-компактом (предложение 15).

Из предложения 11 следует, в частности, μ-компактность множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ квантовых состояний – операторов плотности в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, первоначально установленная в [22].

Следствие 1 и лемма 5 позволяют доказать следующее утверждение.

Предложение 12. *Ограниченная по операторной норме часть конуса $\mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ линейных непрерывных положительных отображений банахова пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ в другое такое же пространство $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ является μ-компактом в сильной операторной топологии.*

Из этого утверждения следует μ-компактность множеств квантовых операций и квантовых каналов в топологии сильной сходимости (см. [21]).

Из предложения 12 также следует μ-компактность в сильной операторной топологии ограниченной части конуса линейных непрерывных положительных операторов в l_1, поскольку его можно отождествить с подмножеством конуса $\mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$. Это показывает μ-компактность множества субмарковских (в частности, марковских) операторов.

Рассмотрим теперь несколько “отрицательных” примеров. Предложение 13 дает пример точечно μ-компактных (см. определение 2), но не μ-компактных множеств. Мы увидим, в частности, что в гильбертовом пространстве не существует μ-компактных, но не компактных множеств (предложение 14). Далее последуют примеры множеств, которые не являются даже точечно μ-компактными.

В силу определения свойство точечной μ-компактности множества сохраняется при ослаблении топологии. Следующее предложение показывает, что μ-компактность этим свойством не обладает. Ограниченная часть положительного конуса в l_1 перестает быть μ-компактным множеством при ослаблении топологии.

Предложение 13. *При любом $p>1$ симплекс*

$$\Delta_p=\left\{x\in l_p \;\middle|\; x\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{+\infty}x^i\leqslant 1\right\}$$

в пространстве l_p является точечно μ-компактным, но не μ-компактным.

Доказательство. Точечная μ-компактность множества Δ_p следует из приведенного выше рассуждения. Покажем, что Δ_p не μ-компактно в пространстве l_p. Возьмем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ и последовательность неотрицательных чисел $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такие, что $\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1}z_i=1$ и $\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1}(z_i)^p\leqslant 1/r$ для любого $r\geqslant 1$. Рассмотрим компакт $\mathscr{K}=\{y\in\Delta_p \mid \forall\, r\in\mathbb{N}\ \sum_{i=n_r}^{+\infty}(y^i)^p\leqslant 1/r\}$. Если множество Δ_p является μ-компактным, то для любого $\varepsilon>0$ в силу предложения 1 найдется соответствующий компакт $\mathscr{K}_\varepsilon$. Множество $\mathscr{K}_\varepsilon$ может содержать лишь конечное число векторов канонического базиса $\{e_i\}$, иначе оно не будет компактно. Пусть N таково, что $e_i\notin\mathscr{K}_\varepsilon$ при $i>N$. Возьмем произвольное r, для которого $n_r>N$, и пусть $x\in\Delta_p$ – вектор с координатами $x^i=z^i$ при $n_r\leqslant i<n_{r+1}$ и $x^i=0$ при всех остальных i. Ясно, что $x\in\mathscr{K}$. Так как $x=\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1}x^ie_i$ и при этом $\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1}x^i=1$, а $e_i\notin\mathscr{K}_\varepsilon$ для всех $i=\overline{n_r,n_{r+1}-1}$, то получаем противоречие с критерием μ-компактности из предложения 1.

Предложение 13, в частности, показывает, что в гильбертовом пространстве существуют точечно μ-компактные множества. Оказывается, однако, что μ-компактных множеств, отличных от компактных, в гильбертовом пространстве нет.

Предложение 14. *В гильбертовом пространстве не существует μ-компактных множеств, не являющихся компактными.*

Доказательство. Изложим идею доказательства, опуская детали, которые читатель легко восстановит.

Пусть $\mathscr{A}$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Не ограничивая общности, считаем, что его диаметр равен 1. Если $\mathscr{A}$ не компактно, то существует последовательность его элементов $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, нормы которых и все попарные расстояния между которыми больше фиксированного числа $\varepsilon > 0$. В силу слабой компактности $\mathscr{A}$ считаем, что последовательность $\{a_k\}$ слабо сходится к некоторому элементу a. Так как $\mathscr{A}$ выпукло и замкнуто, то $a \in \mathscr{A}$. Последовательность $\{b_k = a_k - a\}_{k\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к нулю. Из этого следует, что, переходя к подпоследовательностям, можно добиться быстрой сходимости к нулю скалярных произведений: $(b_i, b_j) \leqslant \varepsilon^2 2^{-i-j}$ при любых $i \neq j$. Так как $\varepsilon \leqslant \|b_i\|_2 \leqslant 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то, применяя неравенство Коши–Буняковского, показываем, что для любой последовательности $x \in l_2$ выполнены неравенства

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|_2 \leqslant \Bigl\|\sum_i x^i b_i\Bigr\|_2 \leqslant 2\|x\|_2.$$

Это означает, что система элементов $\{b_k\}$ обладает свойством базиса Рисса. Тогда существует непрерывный линейный оператор, имеющий непрерывный обратный, переводящий систему $\{b_k\}$ в ортонормированную систему (см. [23]). Этот оператор переводит выпуклую оболочку точек a и $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в множество Δ_2 из предложения 13, которое не является μ-компактным. Следовательно, данная выпуклая оболочка, а значит, и исходное множество $\mathscr{A}$ не μ-компактны.

Приведем теперь два утверждения об отсутствии свойства точечной μ-компактности.

Предложение 15. *Множество $\mathscr{A}_p = \{x \in l_p \mid x \geqslant 0,\ \|x\|_p \leqslant 1\}$ (ограниченная часть положительного конуса в пространстве l_p) не является точечно μ-компактным ни при каком $p > 1$.*

Доказательство. Докажем, что если точка $x \in \mathscr{A}_p$ такова, что $\|x\|_p < 1/3$, $\sum_i x_i = +\infty$, то при $\varepsilon = 1/3$ для нее не существует компакта $\mathscr{K}_\varepsilon$ (см. предложение 1). Предположим, что такой компакт существует. Он может содержать лишь конечное число элементов канонического базиса $\{e_i\}$. Возьмем настолько большое N, что $e_i \notin \mathscr{K}_\varepsilon$ для любого $i > N$. Так как ряд $\sum_i x_i$ расходится, то существует r, для которого $s = \sum_{i=N+1}^{N+r} x^i \in (1/3, 2/3)$. Положим $\bar{x} = x - \sum_{i=N+1}^{N+r} x^i e_i$ (координаты вектора $\bar{x}$ с $(N+1)$-й по $(N+r)$-ю равны нулю, остальные координаты совпадают с координатами вектора x). Тогда

$$x = (1-s)\biggl(\frac{1}{1-s}\,\bar{x}\biggr) + \sum_{i=N+1}^{N+r} x^i e_i.$$

Так как $1/(1-s) < 3$, а $\|\bar{x}\|_p < 1/3$, то $\bar{x}/(1-s) \in \mathscr{A}_p$. Все точки e_i в данной барицентрической комбинации лежат вне $\mathscr{K}_\varepsilon$, а их суммарный вес s превосходит $1/3$, что приводит к противоречию.

Следующий пример дополняет предложение 7 и показывает, что отсутствие точечной μ-компактности не может гарантировать справедливость выражений (3) и (4) для непрерывных ограниченных вогнутых функций, что приводит к нарушению представления (5).

Пример 1. Пусть f – любая непрерывная функция на ограниченной части $\mathscr{A}_p$ положительного конуса пространства l_p при $p > 1$, принимающая значение 1 в нуле и значение 0 на всех векторах канонического базиса $\{e_n\}$ пространства l_p, например функция $f(\,\cdot\,) = 1 - \|\,\cdot\,\|_p$. Поскольку нулевой вектор пространства l_p является предельной точкой множества всех выпуклых комбинаций векторов базиса $\{e_n\}$, то выпуклое замыкание функции f – это нулевая функция на множестве $\mathscr{A}_p$. Таким образом, $\overline{\mathrm{co}}\, f(0) \neq f(0)$. Этот пример также показывает, что для множества $\mathscr{A}_p$ такого, что $\mathscr{A}_p = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{extr}\,\mathscr{A}_p)$ и отображение (2) открыто (это следует из теоремы в [15] с учетом сильной выпуклости пространства l_p при $p > 1$ и доказательства теоремы 1 из [9]), не выполнено утверждение следствия 2 из [9], т.е. непрерывная функция на замкнутом множестве $\mathrm{extr}\,\mathscr{A}_p$ может не иметь выпуклого непрерывного (и даже полунепрерывного снизу) расширения на $\mathscr{A}_p$.

Гильбертовым кирпичом называется множество

$$\mathscr{H}_a = \{x \in l_2 \mid |x^i| \leqslant a^i,\ i \in \mathbb{N}\},$$

где $a = \{a^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – произвольная последовательность положительных чисел. Покажем, что для любого гильбертова кирпича имеет место следующая альтернатива.

Предложение 16. *Если $\|a\|_2 < \infty$, то множество $\mathscr{H}_a$ компактно, а если $\|a\|_2 = +\infty$, то оно не будет даже точечно μ-компактно.*

Доказательство. Первое утверждение предложения общеизвестно. Оно следует, например, из критерия компактности в l_2. Пусть $\|a\|_2 = +\infty$. Разобьем последовательность a на пачки так, что каждая пачка содержит конечное число идущих подряд элементов, сумма квадратов которых больше 1. Предположим, что n-я пачка состоит из элементов $a^k, a^{k+1}, \dots, a^{k+m}$. Пусть

$$b_n = \sum_{i=k}^{k+m} a^i e_i$$

при каждом n, а $\mathscr{L}$ – замыкание линейной оболочки элементов b_n, $n \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathscr{L}$ является гильбертовым с ортогональным базисом $\{b_n\}$. Единичный шар пространства $\mathscr{L}$ целиком содержится в $\mathscr{H}_a$. Так как шар гильбертова пространства не является точечно μ-компактным, то и множество $\mathscr{H}_a$ таковым не является.

§ 3. О CE-свойствах выпуклых μ-компактов

В 1970-е годы интенсивно исследовались различные свойства выпуклых компактов, в частности вопросы о непрерывности выпуклых оболочек непрерывных функций. В работе [10] Дж. Вестерстрём установил связь свойств непрерывности выпуклых оболочек[4] непрерывных функций со свойствами открытости барицентрического отображения и высказал гипотезу о равносильности свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной вогнутой функции (названного в работе [11] CE-*свойством*) и свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной функции (названного в работе [9] *сильным* CE-*свойством*). Эта гипотеза была доказана в работе Р. О'Брайена [12], в которой установлена эквивалентность этих свойств свойству открытости отображения выпуклого смешивания $(x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$. В дальнейшем появилась обширная литература, посвященная исследованию последнего свойства выпуклых множеств (не обязательно компактных), в которой оно названо *свойством устойчивости*, а выпуклые множества, обладающие этим свойством, названы *устойчивыми* (stable convex sets; см. [13]). Была установлена связь свойства устойчивости с другими свойствами выпуклых множеств (см. [14], [15]).

Цель этого параграфа – обобщение теории Вестерстрёма–О'Брайена на класс μ-компактных выпуклых множеств. Первый частичный результат в этом направлении был получен в работе [9], где доказано μ-компактное обобщение теоремы 3.1 из [10]. Следующая теорема является μ-компактным обобщением основного результата из [12].

Теорема 1. *Для выпуклого μ-компактного множества $\mathscr{A}$ следующие свойства равносильны*:

(i) *отображение* $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \ni (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2} \in \mathscr{A}$ *открыто* (*свойство устойчивости*; *см.* [13]);

(ii) *отображение* $M(\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathscr{A}$ *открыто*;

(iii) *отображение* $M(\,\overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}\,) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathscr{A}$ *открыто*;[5]

(iv) *любая функция из* $C(\mathscr{A})$ *имеет непрерывную выпуклую оболочку* (*сильное* CE-*свойство*; *см.* [9]);

(v) *любая функция из* $Q(\mathscr{A})$ *имеет непрерывную выпуклую оболочку* (CE-*свойство*; *см.* [11]).

Каждое из свойств (i)–(v) *влечет замкнутость множества* $\operatorname{extr}\mathscr{A}$.

Замечание 5. Свойство (i) в теореме 1 равносильно открытости отображения $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \times [0, 1] \ni (x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathscr{A}$ (см. [14]). Свойства (iv) и (v) в теореме 1 можно сформулировать как непрерывность выпуклого замыкания и его совпадение с выпуклой оболочкой для любой функции из $C(\mathscr{A})$ и из $Q(\mathscr{A})$ соответственно.

Замечание 6. Если для выпуклого μ-компактного множества $\mathscr{A}$ выполнены свойства (i)–(v), то семейство $F(\mathscr{A})$ в предложении 2 можно составить

[4]В силу следствия I.3.6 из [2] выпуклая оболочка любой непрерывной функции на компакте совпадает с ее выпуклым замыканием.

[5]Это отображение является сюръективным в силу предложения 5.

из полунепрерывных снизу функций. Действительно, используя свойство (ii), нетрудно показать, что функции f_φ, построенные в доказательстве предложения 2, полунепрерывны снизу.

Доказательство теоремы 1. Заметим прежде всего, что в силу предложения 8 из (v) следует замкнутость множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$, поскольку (v) гарантирует замкнутость множества $\mathscr{B}_f = \{x \in \mathscr{A} \mid f(x) = \overline{\operatorname{co}}\, f(x)\}$ для любой функции $f \in Q(\mathscr{A})$.

(v) $\Longrightarrow$ (iii). Доказательство этой части теоремы (как и доказательство соответствующей части теоремы 3.2 из [10]) основано на применении леммы 2.1 из [10] с учетом возможности ее доказательства без использования условий компактности. Действительно, условие компактности в доказательстве этой леммы можно убрать, используя следующее наблюдение: если X – компактное, а Y – произвольное топологические пространства, то образ любого замкнутого в $X \times Y$ множества при каноническом проектировании $X \times Y \ni (x, y) \mapsto y \in Y$ замкнут в Y.

В силу представления (3) выпуклое замыкание любой функции f из $Q(\mathscr{A})$ определяется выражением

$$\overline{\operatorname{co}}\, f(x) = \inf_{\mu \in M_x(\operatorname{extr}\mathscr{A})} \mu(f) \quad \forall\, x \in \mathscr{A}, \qquad \text{где } \mu(f) = \int_{\operatorname{extr}\mathscr{A}} f(x)\, \mu(dx).$$

Поэтому свойство (v) равносильно непрерывности и ограниченности функции

$$\mathscr{A} \ni x \mapsto \sup\{\mu(f) \mid \mu \in M(\operatorname{extr}\mathscr{A}),\ b(\mu) = x\}$$

при любой функции f из $P(\mathscr{A})$. Из модифицированной указанным выше образом леммы 2.1 из [10] при $K = M(\mathscr{A})$, $M = M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ и $K' = \mathscr{A}$ следует открытость отображения

$$M(\operatorname{extr}\mathscr{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathscr{A} \tag{6}$$

при наделении множества $M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ топологией, предбаза которой состоит из множеств $\{\mu \in M(\operatorname{extr}\mathscr{A}) \mid \mu(f) > 0\}$, $f \in P(\mathscr{A})$. Следуя терминологии из [10], данную топологию будем называть *p-топологией*. Это слабейшая топология, в которой полунепрерывны снизу функционалы $\mu \mapsto \mu(f)$ при любой функции $f \in P(\mathscr{A})$.

Покажем с помощью леммы 6 (см. § 6), что из открытости отображения (6) в p-топологии на $M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ и доказанной замкнутости множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$ следует[6] открытость отображения (6) в слабой топологии на $M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. Для этого достаточно показать, что для любой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset \mathscr{A}$ и любой направленности $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$ такой, что

$$b(\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \subseteq \{x_n\}, \qquad \exists\, p\text{-}\lim_{\lambda} \mu_\lambda = \mu_0,$$

где μ_0 – мера из $M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$, для которой $\mathbf{b}(\mu_0) = \lim_{n\to+\infty} x_n$, существует поднаправленность направленности $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, слабо сходящаяся к мере μ_0.

---

[6] В случае компактного множества $\mathscr{A}$ в [10; лемма 3.4] установлено совпадение указанных топологий на $M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. В случае μ-компактного множества $\mathscr{A}$ такое совпадение установить не удается.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – указанные последовательность и направленность соответственно. Поскольку последовательность относительно компактна, то из μ-компактности множества $\mathscr{A}$ и включения $\mathbf{b}(\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \subseteq \{x_n\}$ следует относительная компактность направленности $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в слабой топологии, а значит, и существование у нее поднаправленности $\{\mu_{\lambda_\pi}\}_{\pi\in\Pi}$, слабо сходящейся к некоторой мере $\nu \in M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. В силу определений слабой топологии и p-топологии имеем

$$\nu(f) = \lim_\pi \mu_{\lambda_\pi}(f) \geqslant p\text{-}\liminf_\lambda \mu_\lambda(f) \geqslant \mu_0(f) \qquad \forall\, f \in P(\mathscr{A}).$$

Это означает, что $\nu \succ \mu_0$ (в смысле частичного порядка Шоке). Из замкнутости множества $\operatorname{extr}\mathscr{A}$ следует максимальность в $M(\mathscr{A})$ любой меры из $M(\operatorname{extr}\mathscr{A})$. Это можно доказать, используя теорему 2.2 из [5] и рассуждение в доказательстве теоремы 1.1 из [7], но можно и непосредственно показать, используя свойство (v) и совпадение любой функции из $Q(\mathscr{A})$ с ее выпуклой оболочкой на множестве $\operatorname{extr}\mathscr{A}$. Поэтому μ_0 – максимальная мера в $M(\mathscr{A})$ и, следовательно, $\nu = \mu_0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Данное утверждение непосредственно доказывается с помощью предложения 5 и приведенного ниже предложения 17 (при $X = \overline{\operatorname{extr}\mathscr{A}}$).

С учетом замечания 5 равносильность свойств (i), (ii) и (iv) для выпуклых μ-компактных подмножеств банахова пространства установлена в [9; теорема 1]. Приведенное там доказательство непосредственно обобщается на рассматриваемый здесь класс множеств.

Импликация (iv) $\Longrightarrow$ (v) очевидна.

В доказательстве теоремы 1 был использован следующий результат теории меры (см. [24; теорема 2.4]).

Предложение 17. *Пусть X – полное сепарабельное метрическое пространство. Отображение $M(X)\times M(X) \ni (\mu,\nu) \mapsto \frac{1}{2}(\mu+\nu) \in M(X)$ является открытым.*

Поскольку множество $M(X)$ μ-компактно (следствие 4), то получаем

Следствие 5. *Множество борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве обладает свойствами (i)–(v) из теоремы 1.*

Требование μ-компактности существенно в доказательстве теоремы 1, оно не может быть ослаблено без изменения всей структуры доказательства. Это приводит к предположению, что класс μ-компактов – это максимальный класс выпуклых метризуемых множеств, на который можно распространить теорию Вестерстрёма–О'Брайена. Косвенным подтверждением этого предположения является следующее утверждение, показывающее, что даже требования точечной μ-компактности не достаточно для доказательства теоремы 1.

Предложение 18. *При любом $p>1$ точечно μ-компактный симплекс $\Delta_p = \{x \in l_p \mid x \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} x^i \leqslant 1\}$ в l_p устойчив, т.е. для него выполнено свойство (i) теоремы 1, из которого следует (ii), но свойства (iii)–(v) для этого симплекса не имеют места.*

Заметим, что при $p = 1$ μ-компактный симплекс $\Delta_1 = \mathscr{A}_1$ уже обладает всеми свойствами (i)–(v) из теоремы 1.

Доказательство. Пример 1 показывает, что симплекс Δ_p не обладает свойствами (iv) и (v).

Покажем, что симплекс Δ_p не обладает свойством (iii). Для доказательства заметим, что $\operatorname{extr}\Delta_p = \{0, e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ и множество Δ_p является симплексом: для любой его точки x существует единственная мера на $\operatorname{extr}\Delta_p$ с барицентром x. Последовательность точек $x_n = (1/n, \dots, 1/n, 0, \dots) \in \Delta_p$ (первые n координат равны $1/n$, остальные – нули) стремится к нулю в l_p при $n \to +\infty$, однако единственная последовательность мер на $\operatorname{extr}\Delta_p$, порождающая точки x_n, как легко проверить, не сходится к атомарной мере, сосредоточенной в точке 0.

Докажем теперь, что при любом $p > 1$ множество Δ_p устойчиво, т.е. обладает свойством (i), из которого следует и выполнение свойства (ii) (см. доказательство теоремы 1 из [9]). Достаточно доказать, что для любых точек $a, b \subset \Delta_p$, $c = \frac{1}{2}(a + b)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: для любого $z \in \Delta_p$ такого, что $\|z - c\|_p < \delta$, найдется отрезок $[x, y] \subset \Delta_p$ с серединой в точке z, для которого $\|x - a\|_p < \varepsilon$ и $\|y - b\|_p < \varepsilon$. Взяв ε достаточно малым, можно считать, что $\|a\|_p < 1 - \varepsilon$ и $\|b\|_p < 1 - \varepsilon$. В противном случае заменим точки a и b на достаточно близкие им, лежащие внутри отрезка $[a, b]$. Поскольку l_p-норма сильно выпукла, нормы a и b станут меньше 1. Далее, возьмем настолько большое N, что у каждой из точек a и b норма "хвоста", начиная с $(N + 1)$-й координаты, меньше $\frac{1}{6}\,\varepsilon$, т.е. $\bigl(\sum_{k=N+1}^{\infty}(a^k)^p\bigr)^{1/p} < \frac{1}{6}\,\varepsilon$ и $\bigl(\sum_{k=N+1}^{\infty}(b^k)^p\bigr)^{1/p} < \frac{1}{6}\,\varepsilon$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^N$, порожденное первыми N координатами. Обозначим через $\widetilde{\Delta}_p$ и $\widetilde{s}$ ограничения множества Δ_p и любого элемента $s \in l_p$ на это пространство. Так как $\widetilde{\Delta}_p$ является симплексом в $\mathbb{R}^N$, то в силу устойчивости многогранников (см. [13]) найдется $\delta > 0$ такое, что всегда существуют точки $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{\Delta}_p$, для которых $\frac{1}{2}(\widetilde{x}+\widetilde{y}) = \widetilde{z}$, $\|\widetilde{x}-\widetilde{a}\|_p < \frac{1}{3}\,\varepsilon$ и $\|\widetilde{y} - \widetilde{b}\|_p < \frac{1}{3}\,\varepsilon$, если только $\|\widetilde{z} - \widetilde{c}\|_p < \delta$. Теперь для данного $z \in \Delta_p$ и произвольного $t \in [-1, 1]$ определим точки $x(t), y(t) \in l_p$ следующим образом:

$$x^k(t) = \begin{cases} \widetilde{x}^k, & k \leqslant N, \\ (1+t)z^k, & k > N, \end{cases} \qquad y^k(t) = \begin{cases} \widetilde{y}^k, & k \leqslant N, \\ (1-t)z^k, & k > N. \end{cases}$$

По построению $\frac{1}{2}(x(t) + y(t)) = z$ при любом t, а норма каждого из элементов $x(t)$ и $y(t)$ не превосходит $1 - \frac{1}{3}\,\varepsilon + 2\delta$. В самом деле,

$$\|\widetilde{x}\|_p \leqslant \|\widetilde{a}\|_p + \|\widetilde{x} - \widetilde{a}\|_p \leqslant 1 - \varepsilon + \frac{1}{3}\,\varepsilon = 1 - \frac{2}{3}\,\varepsilon,$$

а норма "хвоста" элемента $(1 + t)z$ не превосходит суммы норм "хвостов" $2c$ и $2(z-c)$, т.е. не превосходит $2\bigl(\frac{1}{6}\,\varepsilon+\delta\bigr)$. Складывая, получаем $\|x(t)\|_p \leqslant 1-\frac{1}{3}\,\varepsilon+2\delta$, и то же верно для $y(t)$. При $\delta \leqslant \frac{1}{6}\,\varepsilon$ получаем $\|x(t)\|_p \leqslant 1$ и $\bigl\|y(t)\bigr\|_p \leqslant 1$. Покажем, что существует такое $\tau \in [-1, 1]$, при котором $\|x(\tau)\|_1 \leqslant 1$ и $\|y(\tau)\|_1 \leqslant 1$, а значит, $x(\tau), y(\tau) \in \Delta_p$. Ясно, что $\|\widetilde{x}\|_1 \leqslant 1$ и $\|\widetilde{y}\|_1 \leqslant 1$. Пусть для определенности $\|\widetilde{x}\|_1 \geqslant \|\widetilde{y}\|_1$. Если $\|y(-1)\|_1 \leqslant 1$, то подходит $\tau = -1$, так как

$\|x(-1)\|_1 = \|\widetilde{x}\|_1 \leqslant 1$. Если же $\|y(-1)\|_1 > 1$, то $\|y(-1)\|_1 > \|x(-1)\|_1$, а поскольку $\|y(1)\|_1 \leqslant \|x(1)\|_1$, то, пользуясь непрерывностью, заключаем, что найдется такое $\tau \in [-1,1]$, что $\|y(\tau)\|_1 = \|x(\tau)\|_1$. Так как $\frac{1}{2}(x(\tau)+y(\tau)) = z$, то $\|x(\tau)\|_1 = \|y(\tau)\|_1 = \|z\|_1 \leqslant 1$.

Наконец, норма разности $\|x(\tau)-a\|_p$ в первых N координатах не превосходит $\frac{1}{3}\,\varepsilon$, а в оставшихся не превосходит максимальной из норм двух "хвостов" – элемента a и элемента $2z$. Следовательно,

$$\|x(\tau)-a\|_p \leqslant \frac{1}{3}\,\varepsilon + \max\biggl\{\frac{1}{6}\,\varepsilon, 2\biggl(\frac{1}{6}\,\varepsilon+\delta\biggr)\biggr\} = \frac{2}{3}\,\varepsilon + 2\delta.$$

При $\delta < \frac{1}{6}\varepsilon$ получаем, что $\|x(\tau)-a\|_p < \varepsilon$ и, аналогично, $\|y(\tau)-b\|_p < \varepsilon$. Положив $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, завершаем доказательство.

§ 4. Приложения в квантовой теории информации

Важным примером выпуклого μ-компактного множества, для которого имеют место эквивалентные свойства из теоремы 1, является множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ квантовых состояний – операторов плотности (положительных операторов с единичным следом) в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, множество крайних точек которого состоит из одномерных проекторов[7] – чистых состояний (см. [25]). μ-компактность и свойство устойчивости (свойство (i) в теореме 1) множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ установлены соответственно в [22; предложение 2] и в [26; лемма 3]. Данные свойства существенно использовались при исследовании характеристик квантовых состояний и квантовых каналов. Например, свойство μ-компактности множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ позволило показать, что любое несцепленное состояние (см. ниже) составной квантовой системы является средним состоянием (барицентром) некоторого обобщенного ансамбля чистых состояний-произведений (меры на множестве чистых состояний-произведений; см. [27]). Свойство устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является ключевым в доказательстве полунепрерывности снизу χ-функции произвольного квантового канала – важной характеристики, связанной с классической пропускной способностью этого канала (см. [26]).

В данном параграфе рассмотрен один результат, который является прямым следствием выполнимости для множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ обобщенной теоремы Вестерстрёма–О'Брайена – теоремы 1.

В соответствии с формализмом квантовой механики состояния составной квантовой системы (которая получена в результате объединения двух квантовых систем, описываемых гильбертовыми пространствами $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$) – это операторы плотности в тензорном произведении $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ этих пространств. Принципиальным отличием квантовомеханической статистической модели от классической является существование так называемых сцепленных состояний (entangled states) составной системы, которые невозможно представить в виде выпуклой комбинации состояний-произведений, т.е. состояний, в которых отдельные подсистемы независимы. Именно эффект сцеплености, который можно рассматривать как особый чисто квантовый вид корреляции, является

[7] Множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ компактно тогда и только тогда, когда $\dim\mathscr{H} < +\infty$.

основой построения различных квантовых алгоритмов, квантовых криптографических протоколов и систем передачи информации, привлекающих большой интерес исследователей в последние два десятилетия (см. [25; гл. 3]). Поэтому изучение сцепленности, в частности ее количественных характеристик, является одной из важнейших задач квантовой теории информации.

Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ называется *несцепленным*, если оно принадлежит выпуклому замыканию множества состояний произведений, т.е. состояний вида $\rho\otimes\sigma$, где $\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ и $\sigma\in\mathfrak{S}(\mathscr{K})$; в противном случае оно называется *сцепленным*.

Монотонной характеристикой сцепленности (entanglement monotone) называется любая неотрицательная функция E на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, обладающая следующими свойствами (см. [28], [29]):

E1) $\{E(\omega)=0\} \Longleftrightarrow \{$состояние ω несцеплено$\}$;

E2) монотонность относительно локальных операций и классических коммуникаций (LOCC), т.е.

$$E(\omega)\geqslant\sum_i \pi_i E(\omega_i) \tag{7}$$

для любого состояния $\omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ и произвольной LOCC-операции, результатом действия которой на состояние ω является набор состояний $\{\omega_i\}$ с распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ (см. подробности в обзоре [29]);

E3) выпуклость функции E на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, т.е.

$$E\biggl(\sum_i \pi_i\omega_i\biggr)\leqslant\sum_i \pi_i E(\omega_i)$$

для любого набора $\{\omega_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ и распределения вероятностей $\{\pi_i\}$.

Стандартным способом построения монотонных характеристик сцепленности (МХС) в случае конечномерных пространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ является *метод выпуклой надстройки* (the convex roof construction; см. [29], [30]). В соответствии с этим методом для произвольной вогнутой непрерывной неотрицательной функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ такой, что

$$f^{-1}(0)=\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}),\qquad f(\rho)=f(U\rho U^*) \tag{8}$$

для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ и любого унитарного оператора U в пространстве $\mathscr{H}$, соответствующая МХС E^f определяется выражением

$$E^f(\omega)=\inf_{\{\pi_i,\omega_i\}\in M_\omega(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))}\sum_i \pi_i f\circ\Theta(\omega_i),\qquad \omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}), \tag{9}$$

где $\Theta\colon\omega\mapsto\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}\omega$ – операция частичного следа (см. [25]); корректность выражения в правой части (9) обусловлена спектральной теоремой. Именно таким методом строится одна из наиболее популярных мер сцепленности[8] – сцепленность формирования (Entanglement of Formation – EoF), когда в качестве функции f используется энтропия фон Неймана $H(\rho)=-\operatorname{Tr}\rho\log\rho$ (см. [29]).

[8] *Мерой сцепленности* называется МХС, обладающая некоторыми особыми свойствами (см. [29]).

Далее будем исследовать свойства функции E^f, определенной выражением (9), считая пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ бесконечномерными.

Важной проблемой при построении любой МХС является исследование ее свойств непрерывности, в частности доказательство ее непрерывности на всем пространстве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ (формально последнее свойство не входит в определение МХС, однако в конечномерном случае его обычно включают в число основных дополнительных требований). Заметим, что даже в конечномерном случае непрерывность функции E^f не является очевидной и обычно доказывается с использованием явного вида функции f. Именно отмеченные выше μ-компактность и устойчивость множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ гарантируют в силу теоремы 1 непрерывность функции E^f на этом множестве при любой непрерывной функции f как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае, что составляет утверждение следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть f – вогнутая непрерывная неотрицательная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, удовлетворяющая условиям (8). Тогда функция E^f, определенная выражением (9), является непрерывной на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ монотонной характеристикой сцепленности.*

Доказательство. Из неотрицательности, вогнутости и непрерывности функции f следует ее ограниченность. В силу теоремы 1 свойство устойчивости μ-компактного множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ гарантирует непрерывность функции $\operatorname{co}(f\circ\Theta)$, а значит, и ее совпадение с функцией $\overline{\operatorname{co}}(f\circ\Theta)$, имеющей в силу предложения 6 представление

$$\overline{\operatorname{co}}(f\circ\Theta)(\omega)=\inf_{\mu\in M_\omega(\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))}\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})}(f\circ\Theta)(\varpi)\,\mu(d\varpi),\qquad \omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}),\tag{10}$$

где точная нижняя грань достигается на некоторой мере μ_ω из $M_\omega(\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))$. Используя вогнутость, непрерывность и ограниченность функции $f\circ\Theta$, нетрудно показать, что в качестве μ_ω можно выбрать меру из $M_\omega(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}))$. Поэтому из определения функции E^f с учетом вогнутости функции $f\circ\Theta$ непосредственно следует, что $E^f=\operatorname{co}(f\circ\Theta)=\overline{\operatorname{co}}(f\circ\Theta)$.

В силу свойства (8) неотрицательная функция $f\circ\Theta$ равна нулю на чистом состоянии из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ тогда и только тогда, когда оно является состоянием-произведением. Как показано в [27], состояние ω является несцепленным тогда и только тогда, когда существует такая мера μ_ω с носителем на множестве чистых состояний-произведений, что $\mathbf{b}(\mu_\omega)=\omega$. Поэтому приведенное выше замечание показывает выполнение свойства E1) для функции $E^f=\overline{\operatorname{co}}(f\circ\Theta)$.

Выполнение свойства E2) для функции E^f нетрудно доказать, повторяя рассуждение для такой же функции в конечномерном случае (см. [29]).

Свойство E3) для функции E^f следует из ее определения.

Пример 2. Обобщая на бесконечномерный случай рассуждение из [30], рассмотрим семейство непрерывных вогнутых ограниченных функций

$$f_\alpha(\rho)=2(1-\operatorname{Tr}\rho^\alpha),\qquad \alpha>1,$$

на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ при $\dim\mathscr{H}\leqslant+\infty$. Нетрудно проверить, что все функции данного семейства удовлетворяют условиям (8). В силу теоремы 2 $\{E^{f_\alpha}\}_{\alpha>1}$ –

семейство МХС, непрерывных и ограниченных на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ при $\dim\mathscr{H}\leqslant+\infty$ и $\dim\mathscr{K}\leqslant+\infty$. Особый интерес представляет случай $\alpha=2$, в котором МХС E^{f_2} можно рассматривать как бесконечномерное обобщение понятия I-tangle (см. [31]).

§ 5. Возможные обобщения и открытые вопросы

Предложение 1 дает равносильное определение μ-компактности выпуклых множеств рассматриваемого класса. Выпуклое множество $\mathscr{A}$ *μ-компактно*, если для любого компакта $\mathscr{K}\subseteq\mathscr{A}$ и любого $\varepsilon>0$ существует компакт $\mathscr{K}_\varepsilon\subseteq\mathscr{A}$ такой, что для любого разложения точки $x\in\mathscr{K}$ в выпуклую комбинацию точек из $\mathscr{A}$ общая масса точек этой комбинации, лежащих в $\mathscr{K}_\varepsilon$, не менее $1-\varepsilon$. Это свойство выпуклых множеств (любых) назовем *обобщенной μ-компактностью* (для краткости будем также называть *$\widetilde{\mu}$-компактностью*). Согласно предложению 1 для выпуклых ограниченных подмножеств локально выпуклых пространств, являющихся полными сепарабельными метрическими пространствами, $\widetilde{\mu}$-компактность равносильна μ-компактности. Определение $\widetilde{\mu}$-компактности переносится без изменений на любые выпуклые замкнутые множества в линейных топологических пространствах, в том числе и на неограниченные. Понятие же μ-компактности для неограниченных множеств не определено вовсе, поскольку не определено уже барицентрическое отображение: интеграл

$$\mathbf{b}(\mu)=\int_{\mathscr{A}}x\,\mu(dx)$$

для некоторых мер $\mu\in M(\mathscr{A})$ может не существовать. Таким образом, понятие $\widetilde{\mu}$-компактности обобщает понятие μ-компактности на более широкий класс выпуклых множеств. Подобно μ-компактам пересечение и декартово произведение любого числа $\widetilde{\mu}$-компактов являются $\widetilde{\mu}$-компактами, выпуклое замкнутое подмножество $\widetilde{\mu}$-компакта также является $\widetilde{\mu}$-компактом (доказательство дословно совпадает с доказательством предложения 4). Имеет место также полный аналог предложения 3 о непрерывных отображениях μ-компактов. Нетривиальные примеры $\widetilde{\mu}$-компактов появляются уже в конечномерном случае.

Лемма 3. *Любой выпуклый замкнутый точечный* (*не содержащий прямой линии*) *конус в $\mathbb{R}^d$ является $\widetilde{\mu}$-компактом.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}\subset\mathbb{R}^d$ – выпуклый точечный конус. Для него существует вектор $a\in\mathbb{R}^d$ такой, что $\inf_{x\in\mathscr{C},\,\|x\|=1}(x,a)>0$ (см. [32; с. 53]). Тогда для каждого $r>0$ усеченный конус $\mathscr{C}_r=\{x\in\mathscr{C},\,(x,a)\leqslant r\}$ компактен. Любой компакт $\mathscr{K}\subset\mathscr{C}$ можно поместить в некоторый усеченный конус $\mathscr{C}_r$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ компакт $\mathscr{K}_\varepsilon=\mathscr{C}_{r/\varepsilon}$ искомый, что завершает доказательство.

Приведенный ниже факт выпуклой геометрии общеизвестен, мы опускаем его доказательство.

Лемма 4. *Следующие свойства выпуклого замкнутого множества $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^d$ эквивалентны*:

(i) *$\mathscr{A}$ содержится в выпуклом точечном конусе*;
(ii) *$\mathscr{A}$ имеет хотя бы одну крайнюю точку*;
(iii) *$\mathscr{A}$ не содержит прямой линии*;
(iv) *поляра множества $\mathscr{A}$ имеет непустую внутренность.*

Применив лемму 3, получаем, что уже свойство (i) влечет $\widetilde{\mu}$-компактность множества $\mathscr{A}$. С другой стороны, прямая линия не $\widetilde{\mu}$-компактна, поэтому из $\widetilde{\mu}$-компактности следует свойство (iii). Таким образом, доказано

Предложение 19. *В пространстве $\mathbb{R}^d$ $\widetilde{\mu}$-компактность равносильна каждому из свойств* (i)–(iv), *перечисленных в лемме* 4.

Положительные конусы во всех пространствах l_p и $L_p(X)$ являются $\widetilde{\mu}$-компактными в слабой топологии. Доказательство аналогично доказательству леммы 3 и использует слабую компактность ограниченных множеств в этих пространствах. Положительный конус в l_1 (предложение 9), конус всех конечных борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве (предложение 10) и конус положительных операторов в пространстве Шаттена порядка $p = 1$ (предложение 11) являются $\widetilde{\mu}$-компактными, причем можно брать не только ограниченные части конусов, как в упомянутых предложениях. Таким образом, $\widetilde{\mu}$-компактность значительно расширяет понятие μ-компактности (это мотивирует вопрос 1).

Вопрос 1. В какой мере обобщаются результаты настоящей работы на $\widetilde{\mu}$-компактные множества?

Следующие вопросы касаются уже μ-компактных множеств.

Вопрос 2. Существуют ли μ-компактные, но не компактные множества в пространствах L_p и l_p при $p > 1$?

Вопрос 3. Дано упорядоченное банахово пространство. При каких условиях ограниченная часть положительного конуса в нем μ-компактна?

Вопрос 4. Каковы условия на выпуклое множество $\mathscr{A}$, гарантирующие непрерывность выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции, заданной на $\mathscr{A}$?

Это свойство выполнено для устойчивых μ-компактов (теорема 1), однако не выполнено для точечно μ-компактных множеств, не являющихся μ-компактными (предложение 7). Шар в пространстве l_2 обладает данным свойством (замечание 3), а положительная часть этого шара – нет (пример 1).

§ 6. Приложение

6.1. Критерий компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$. Пусть $\mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ – конус линейных непрерывных положительных отображений банахового пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ в другое такое же пространство $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$. Установим критерий компактности подмножеств данного конуса в сильной операторной топологии.

Лемма 5. 1) *Замкнутое ограниченное подмножество* $\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ *сильно компактно, если в* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ *существует состояние полного ранга* σ *такое, что* $\{\Phi(\sigma)\}_{\Phi\in\mathfrak{L}_0}$ – *компактное подмножество множества* $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$.

2) *Если подмножество* $\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ *сильно компактно, то* $\{\Phi(\sigma)\}_{\Phi\in\mathfrak{L}_0}$ – *компактное подмножество множества* $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ *для любого состояния* σ *из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$.

Доказательство. 1) Пусть $\{|i\rangle\}$ – базис из собственных векторов состояния σ, взятых в порядке убывания собственных значений, и $\mathscr{H}_m$ – собственное подпространство, порожденное первыми m векторами этого базиса.

Пусть $\{\Phi_n\}$ – произвольная последовательность отображений из $\mathfrak{L}_0$.

Покажем, что при каждом m для любого оператора A из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$ существует такая подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$, что последовательность $\{\Phi_{n_k}(A)\}_k$ сходится в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$. Предположим сначала, что $A \geqslant 0$. Поскольку $A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$, то существует такое $\lambda_A > 0$, что $\lambda_A A \leqslant \sigma$. В силу критерия компактности для подмножеств множества $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ (см. предложение в [21; приложение]) для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор конечного ранга $P_\varepsilon \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}')$ такой, что $\mathrm{Tr}(I_{\mathscr{H}'} - P_\varepsilon)\Phi(\sigma) < \varepsilon$, а значит, и $\mathrm{Tr}(I_{\mathscr{H}'} - P_\varepsilon)\Phi(A) < \lambda_A^{-1}\varepsilon$ для всех $\Phi \in \mathfrak{L}_0$. В силу того же критерия компактности множество $\{\Phi(A)\}_{\Phi\in\mathfrak{L}_0}$ компактно, что гарантирует существование указанной подпоследовательности для положительного A. Для произвольного оператора $A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$ существование такой подпоследовательности следует из возможности его представления в виде линейной комбинации положительных операторов из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$.

Итак, при каждом m из произвольной последовательности $\{\Phi_n\} \subset \mathfrak{L}_0$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$, что существуют

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi_{n_k}(|i\rangle\langle j|) = C_{ij}^m \tag{11}$$

при всех $i,j = \overline{1,m}$, где $\{C_{ij}^m\}$ – некоторые операторы из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$.

Для любого $m' > m$, применяя данное рассуждение к последовательности $\{\Phi_{n_k}\}_k$, получим такую подпоследовательность последовательности $\{\Phi_n\}$, для которой имеет место (11) для всех $i,j = \overline{1,m'}$ с таким набором операторов $\{C_{ij}^{m'}\}$, что $C_{ij}^{m'} = C_{ij}^m$ для всех $i,j = \overline{1,m}$.

Используя данную конструкцию, можно показать существование набора операторов $\{C_{ij}\}_{i,j=1}^{+\infty}$, обладающего следующим свойством: при каждом m существует такая подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$ последовательности $\{\Phi_n\}$, что имеет место (11) при $C_{ij}^m = C_{ij}$ для всех $i,j = \overline{1,m}$.

На множестве $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$ определим отображение

$$\Phi_*\colon \sum_{i,j} a_{ij}|i\rangle\langle j| \mapsto \sum_{i,j} a_{ij}\, C_{ij} \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}').$$

Это отображение линейно по построению. Нетрудно показать его положительность и ограниченность. Действительно, по свойству набора $\{C_{ij}\}$ для любого оператора $A \in \bigcup_m \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$ существует подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$ последовательности $\{\Phi_n\}$ такая, что $\Phi_*(A) = \lim_{k\to+\infty} \Phi_{n_k}(A)$. Поэтому положительность и ограниченность отображения Φ_* следуют из положительности отображений последовательности $\{\Phi_n\}$ и ее равномерной ограниченности. Поскольку множество $\bigcup_m \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$ плотно в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, отображение Φ_* можно расширить до линейного положительного ограниченного отображения из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ (которое будем обозначать тем же символом Φ_*).

Покажем, что отображение Φ_* является предельной точкой последовательности $\{\Phi_n\}$ в сильной операторной топологии. Эту топологию на ограниченных подмножествах $\mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ можно определить[9] счетным набором полунорм $\Phi \mapsto \|\Phi(\rho_i)\|_1$, где $\{\rho_i\}$ – любое счетное плотное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Выберем в качестве такого подмножества набор состояний из $\bigcup_m \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$. Любая окрестность отображения Φ_* содержит окрестность вида

$$\{\Phi \in \mathfrak{L}(\mathscr{H},\mathscr{H}') \mid \|(\Phi - \Phi_*)(\rho_{i_t})\|_1 < \varepsilon,\ t = \overline{1,p}\},$$

где $\{\rho_{i_t}\}_{t=1}^p$ – конечный поднабор указанного выше набора состояний и $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{\rho_{i_t}\}_{t=1}^p \subset \mathfrak{T}(\mathscr{H}_m)$ при некотором m, то из конструкции отображения Φ_* следует существование такой подпоследовательности $\{\Phi_{n_k}\}$ последовательности $\{\Phi_n\}$, что $\Phi_*(\rho_{i_t}) = \lim_{k\to+\infty} \Phi_{n_k}(\rho_{i_t})$ при всех $t = \overline{1,p}$, а значит, и принадлежность указанной выше окрестности хотя бы одного элемента последовательности $\{\Phi_n\}$.

Таким образом, отображение Φ_* – предельная точка последовательности $\{\Phi_n\}$ в сильной операторной топологии, что в силу метризуемости этой топологии на ограниченных подмножествах конуса $\mathfrak{L}_+(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ гарантирует существование у этой последовательности подпоследовательности, сходящейся к этому отображению. Компактность множества $\mathfrak{L}_0$ доказана.

2) Это утверждение непосредственно вытекает из определения сильной операторной топологии.

6.2. Критерий открытости.

Лемма 6. *Пусть φ – отображение топологического пространства X на метрическое пространство Y. Следующие утверждения равносильны*:

(i) *отображение φ является открытым*;

(ii) *для любого $x_0 \in X$ и любой последовательности $\{y_n\} \subset Y$, сходящейся к $y_0 = \varphi(x_0)$, существуют поднаправленность $\{y_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ последовательности $\{y_n\}$ и направленность $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, сходящаяся к x_0, такие, что $\varphi(x_\lambda) = y_{n_\lambda}$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $\mathfrak{U}$ – множество всех окрестностей точки x_0. Тогда множество Λ всех пар $\lambda = (U,k)$, где $U \in \mathfrak{U}$ и $k \in \mathbb{N}$, с частичным порядком

$$\{\lambda_1 = (U_1,k_1) \succ \lambda_2 = (U_2,k_2)\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{k_1 \geqslant k_2 \text{ и } U_1 \subseteq U_2\}$$

является направленным. При каждом $\lambda = (U,k)$ множество $W_\lambda = \varphi(U)\cap V_k$, где V_k – открытый шар в Y с центром y_0 и радиусом $1/k$, является окрестностью точки y_0. Поэтому существует минимальное число n_λ такое, что $y_{n_\lambda} \in W_\lambda$. Непосредственная проверка показывает, что $\{y_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – поднаправленность последовательности $\{y_n\}$. Для каждого $\lambda = (U,k)$ существует $x_\lambda \in U$ такое, что $\varphi(x_\lambda) = y_{n_\lambda}$. Ясно, что направленность $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к x_0.

[9] Здесь используется возможность представления любого оператора из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в виде линейной комбинации четырех состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Если существует открытое множество $U \subseteq X$ такое, что множество $\varphi(U)$ не является открытым, то существуют $y_0 = \varphi(x_0) \in \varphi(U)$ и последовательность $\{y_n\} \subset Y \setminus \varphi(U)$, сходящаяся к y_0. Используя (ii), нетрудно прийти к противоречию.

Авторы признательны рецензентам, чьи ценные замечания и предложения способствовали улучшению этой статьи.

Список литературы

[1] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1966.

[2] E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971.

[3] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.

[4] G. A. Edgar, "Extremal integral representations", *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 145–161.

[5] G. A. Edgar, "On the Radon–Nikodym-property and martingale convergence", *Vector space measures and applications*. II (Univ. Dublin, Dublin, 1977), Lecture Notes in Math., **645**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1978, 62–76.

[6] R. D. Bourgin, "Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nikodým property", Lecture Notes in Math., **993**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1983.

[7] R. D. Bourgin, G. A. Edgar, "Noncompact simplexes in Banach spaces with the Radon–Nikodým property", *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 162–176.

[8] П. А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: P. A. Meyer, *Probability and potentials*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1966.

[9] М. Е. Широков, "О сильном CE-свойстве выпуклых множеств", *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 441–458; англ. пер.: M. E. Shirokov, "On the strong CE-property of convex sets", *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 395–409.

[10] J. Vesterstrøm, "On open maps, compact convex sets, and operator algebras", *J. London Math. Soc.* (2), **6** (1973), 289–297.

[11] Å. Lima, "On continuous convex functions and split faces", *Proc. London Math. Soc.* (3), **25** (1972), 27–40.

[12] R. C. O'Brien, "On the openness of the barycentre map", *Math. Ann.*, **223**:3 (1976), 207–212.

[13] S. Papadopoulou, "On the geometry of stable compact convex sets", *Math. Ann.*, **229**:3 (1977), 193–200.

[14] A. Clausing, S. Papadopoulou, "Stable convex sets and extremal operators", *Math. Ann.*, **231**:3 (1978), 193–203.

[15] R. Grząślewicz, "Extreme continuous function property", *Acta Math. Hungar.*, **74**:1–2 (1997), 93–99.

[16] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.

[17] В. И. Богачёв, *Основы теории меры*, РХД, Москва–Ижевск, 2003.

[18] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York–London, 1967.

[19] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, “Ковариационные операторы вероятностных мер в локально выпуклых пространствах”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **23**:1 (1978), 3–26; англ. пер.: N. N. Vakhaniya, V. I. Tarieladze, “Covariance operators of probability measures in locally convex spaces”, *Theory Probab. Appl.*, **23**:1 (1978), 1–21.

[20] М. Е. Широков, “О характеризации выпуклых μ-компактных множеств”, *УМН*, **63**:5 (2008), 181–182; англ. пер.: M. E. Shirokov, “Characterization of convex μ-compact sets”, *Russian Math. Surveys*, **63**:5 (2008), 981–982.

[21] М. Е. Широков, А. С. Холево, “Об аппроксимации квантовых каналов”, *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 3–22; англ. пер.: M. E. Shirokov, A. S. Holevo, “On approximation of infinite-dimensional quantum channels”, *Probl. Inf. Transm.*, **44**:2 (2008), 73–90.

[22] А. С. Холево, М. Е. Широков, “Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:1 (2005), 98–114; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, “Continuous ensembles and the capacity of infinite-dimensional quantum channels”, *Theory Probab. Appl.*, **50**:1 (2006), 86–98.

[23] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

[24] L. Q. Eifler, “Open mapping theorems for probability measures on metric spaces”, *Pacific J. Math.*, **66**:1 (1976), 89–97.

[25] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002.

[26] M. E. Shirokov, “The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem”, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159.

[27] Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, “О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах”, *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154; англ. пер.: A. S. Kholevo, M. E. Shirokov, R. F. Werner, “On the notion of entanglement in Hilbert spaces”, *Russian Math. Surveys*, **60**:2 (2005), 359–360.

[28] G. Vidal, “Entanglement monotones”, *J. Modern Opt.*, **47**:2–3 (2000), 355–376.

[29] M. B. Plenio, Sh. Virmani, “An introduction to entanglement measures”, *Quantum Inf. Comput.*, **7**:1–2 (2007), 1–51; `arXiv: quant-ph/0504163`.

[30] T. J. Osborne, “Convex hulls of varieties and entanglement measures based on the roof construction”, *Quantum Inf. Comput.*, **7**:3 (2007), 209–227.

[31] P. Rungta, C. M. Caves, “Concurrence-based entanglement measures for isotropic states”, 012307, *Phys. Rev. A*, **67**:1 (2003).

[32] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `v-protassov@yandex.ru`

Поступила в редакцию
09.04.2008 и 17.02.2009

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `msh@mi.ras.ru`