УДК 519.248.3

М. Е. Широков

О непрерывности выходной энтропии положительных отображений

В статье исследуются условия глобальной и локальной непрерывности выходной энтропии фон Неймана положительных отображений между банаховыми пространствами ядерных операторов, в частности, вполне положительных отображений – квантовых операций и квантовых каналов бесконечной размерности.

Показано, что некоторые специфические свойства энтропии фон Неймана (как функции на множестве операторов плотности) позволяют получить ряд результатов о поведении выходной энтропии положительных отображений, которые нельзя вывести из общих свойств функций энтропийного типа. В частности, доказано, что достаточным условием глобальной непрерывности выходной энтропии положительного отображения является ее конечность. Получена характеризация линейных положительных отображений, сохраняющих непрерывность энтропии в том смысле, что из непрерывности энтропии на любом множестве входных операторов следует непрерывность выходной энтропии на этом множестве. Установлена связь свойств локальной непрерывности двух вполне положительных отображений, связанных отношением комплементарности.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: энтропия фон Неймана, положительный ядерный оператор, квантовая операция, квантовый канал, PCE-свойство положительных отображений.

§ 1. Введение

Некоммутативными аналогами марковских и субмарковских операторов в классической теории вероятностей являются, соответственно, сохраняющие след и не увеличивающие след линейные положительные преобразования банахова пространства ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве (см. [1]). В статистической структуре квантовой теории ключевую роль играют понятия квантового канала (динамического отображения) и квантовой операции, определяемые, соответственно, как сохраняющее след и

Работа выполнена при поддержке научной программы РАН "Математическая теория управления", Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00424а, № 10-01-00139а), Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (грант № 1.2.1.938) и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 2.1.1/500). Работа проводилась в рамках Программы "Математика в квантовой теории информации" в институте Филдса (Канада, июль-август 2009 г.).

© М. Е. Широков, 2011

не увеличивающее след линейные преобразования банахова пространства ядерных операторов, которые обладают свойством полной положительности (см. [2; § 3.1]).

Важной характеристикой квантового канала является его выходная энтропия фон Неймана – некоммутативный аналог выходной энтропии Шеннона марковского оператора. Именно эта характеристика прямо или косвенно участвует в выражениях для различных пропускных способностей квантового канала (см. [3; гл. 8, 9]). Понятия квантовой операции и ее выходной энтропии существенно используются в теории квантовых измерений (см. [2; гл. 4]).

В конечномерном случае выходная энтропия квантовых каналов и операций – это вогнутая непрерывная неотрицательная функция на конусе входных положительных операторов. Однако, при переходе к бесконечномерному случаю сохраняются лишь свойства вогнутости и неотрицательности, а свойство непрерывности “заменяется” свойством полунепрерывности снизу с возможным включением $+\infty$ в множество принимаемых значений. Последнее обстоятельство связано с “патологическим” поведением энтропии фон Неймана в бесконечномерном случае, подробно рассмотренным в [4]. В то же время особые свойства энтропии фон Неймана могут быть использованы для доказательства непрерывности выходной энтропии на определенных подмножествах входных операторов. Так, например, установлено, что выходная энтропия так называемых гауссовских квантовых каналов непрерывна на множестве квантовых состояний (операторов плотности) системы квантовых осцилляторов с ограниченной средней энергией (см. [3; § 11.5]). Более того, существуют нетривиальные бесконечномерные квантовые каналы, выходная энтропия которых непрерывна на всем конусе входных операторов (см. § 3).

Сингулярные аналитические свойства выходной энтропии квантовых каналов и операций представляют собой серьезное препятствие для изучения их статистических и информационных характеристик, в частности, пропускных способностей квантовых каналов. Все это приводит к необходимости анализа свойств выходной энтропии с целью получения глобальных или локальных условий непрерывности. С точки зрения приложений интерес представляют следующие вопросы, исследованию которых и посвящена настоящая статья.

1) При каких условиях выходная энтропия положительного отображения (в частности, квантового канала или операции) непрерывна на всем конусе входных операторов?
2) При каких условиях выходная энтропия положительного отображения (в частности, квантового канала или операции) непрерывна на подмножествах конуса входных операторов, на которых непрерывна энтропия?
3) Как связаны свойства непрерывности выходной энтропии вполне положительных взаимно комплементарных отображений?

Отношение комплементарности, упомянутое в последнем вопросе, связано с представлением Стайнспринга вполне положительного отображения (см. § 2) и играет важную роль при исследовании информационных свойств квантовых каналов (см. [3; гл. 6]).

Статья имеет следующую структуру. В § 2 даны все необходимые определения и сформулированы полученные ранее результаты, которые используются в основной части статьи. Параграфы 3–5 являются центральными и посвящены исследованию указанных выше вопросов 1)–3) соответственно. В § 6 приведены возможные обобщения результатов §§ 3–5 для анализа непрерывности выходной энтропии положительного отображения как функции пары (отображение, входной оператор). Такой анализ необходим для исследования физически мотивированного вопроса о непрерывности пропускных способностей квантового канала как функций канала, а также для реализации метода изучения квантовых каналов посредством их аппроксимации (см. [5], [6]).

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – банаховы пространства всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$ с операторной нормой $\|\cdot\|$ и всех ядерных операторов в $\mathscr{H}$ со следовой нормой $\|\cdot\|_1=\operatorname{Tr}|\cdot|$ соответственно, а $\mathfrak{B}_+(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ – конусы положительных операторов в этих пространствах (см. [1], [2]). Замкнутые выпуклые подмножества

$$\mathfrak{T}_1(\mathscr{H})=\{A\in\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})\mid \operatorname{Tr}A\leqslant 1\},\qquad \mathfrak{S}(\mathscr{H})=\{A\in\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})\mid \operatorname{Tr}A=1\}$$

конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ являются полными сепарабельными метрическими пространствами с метрикой, определяемой следовой нормой. Следуя традиции, операторы из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ будем обозначать греческими буквами ρ, σ, ω и называть *состояниями*, поскольку каждый такой оператор ρ задает линейный нормальный функционал $A\mapsto\operatorname{Tr}A\rho$ с единичной нормой на алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, называемый в теории операторных алгебр *состоянием* (см. [7]). *Носителем* $\operatorname{supp}A$ *положительного оператора* A назовем ортогональное дополнение его ядра, размерность носителя назовем *рангом* этого оператора: $\operatorname{rank}A=\dim\operatorname{supp}A$. Множество значений произвольного линейного оператора A обозначим через $\operatorname{Ran}A$.

Для векторов и операторов ранга один в гильбертовом пространстве будем использовать дираковские обозначения $|\varphi\rangle, |\chi\rangle\langle\psi|,\dots$ (в которых действие оператора $|\chi\rangle\langle\psi|$ на вектор $|\varphi\rangle$ – это вектор $\langle\psi,\varphi\rangle\,|\chi\rangle$). Следуя традиции, ортонормированные наборы векторов $\{|\varphi_i\rangle\}_{i\in I}$, где $I=\{1,2,\dots,n\}$ или $I=\mathbb{N}$, будем для краткости обозначать через $\{|i\rangle\}_{i\in I}$.

Везде далее $\mathscr{A}$ – подмножество конуса положительных ядерных операторов.

Обозначим через $\operatorname{cl}(\mathscr{A})$, $\operatorname{co}(\mathscr{A})$, $\overline{\operatorname{co}}(\mathscr{A})$ и $\operatorname{extr}(\mathscr{A})$ замыкание, выпуклую оболочку, выпуклое замыкание и множество крайних точек множества $\mathscr{A}$ соответственно (см. [8], [9]).

Конечный или счетный набор операторов (состояний) $\{A_i\}$ из некоторого подмножества $\mathscr{A}$ конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ назовем *ансамблем* и обозначим через $\{\pi_i,A_i\}$. *Средним оператором* (*состоянием*) такого ансамбля является оператор $\sum_i \pi_i A_i$ из $\overline{\mathrm{co}}(\mathscr{A})$. Множество всех ансамблей операторов из $\mathscr{A}$ с заданным средним оператором A обозначим через $\mathscr{P}^{\mathrm{a}}_{\{A\}}(\mathscr{A})$.[1]

Тождественный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и тождественное преобразование банахова пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ обозначим через $I_{\mathscr{H}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$ соответственно.

Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ – сепарабельные гильбертовы пространства, которые будем называть *входным* и *выходным пространствами* соответственно, а $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ – линейное отображение, которое положительно и не увеличивает след ($\Phi(A) \geqslant 0$ и $\mathrm{Tr}\,\Phi(A) \leqslant \mathrm{Tr}\,A$ для любого $A \geqslant 0$). *Сопряженное отображение* $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}') \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ (определяемое соотношением двойственности $\mathrm{Tr}\,\Phi(A)B = \mathrm{Tr}\,A\Phi^*(B)$, $A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H})$, $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}')$) является положительным отображением, таким, что $\Phi^*(I_{\mathscr{H}'}) \leqslant I_{\mathscr{H}}$. Множество всех линейных положительных не увеличивающих след отображений из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ обозначим через $\mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$.

Линейное отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ называется *вполне положительным*, если для любого гильбертова пространства $\mathscr{K}$ отображение $\Phi^* \otimes \mathrm{Id}^*_{\mathscr{K}}$ C^*-алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H}' \otimes \mathscr{K})$ в C^*-алгебру $\mathfrak{B}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})$ является положительным (о равносильных определениях полной положительности см. [3; § 6.2]).

Определение 1. Линейное вполне положительное не увеличивающее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ называется *квантовой операцией.*

Квантовая операция, сохраняющая след, называется *квантовом каналом.*

Множества всех квантовых операций и всех квантовых каналов из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ обозначим через $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ и $\mathfrak{F}_{=1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ соответственно. Таким образом,

$$\mathfrak{F}_{=1}(\mathscr{H},\mathscr{H}') \subset \mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}') \subset \mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}').$$

Произвольная квантовая операция (соответственно, канал) $\Phi \in \mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ имеет представление Крауса

$$\Phi(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i(\,\cdot\,)V_i^*, \tag{1}$$

определяемое таким набором $\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ограниченных линейных операторов из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$, что $\sum_{i=1}^{+\infty} V_i^*V_i \leqslant I_{\mathscr{H}}$ (соответственно, $\sum_{i=1}^{+\infty} V_i^*V_i = I_{\mathscr{H}}$) (см. [3; § 6.2]).

Если Φ – квантовая операция (соответственно, канал) из $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$, то в силу теоремы Стайнспринга существуют гильбертово пространство $\mathscr{H}''$ и сжатие (соответственно, изометрия) $V\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}' \otimes \mathscr{H}''$ такие, что

$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}''} VAV^*, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}). \tag{2}$$

Квантовая операция (соответственно, канал)

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H}) \ni A \mapsto \widetilde{\Phi}(A) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}'} VAV^* \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}'') \tag{3}$$

[1] Такое обозначение связано с тем, что ансамбль операторов из $\mathscr{A}$ можно отождествить с атомарной вероятностной мерой на множестве $\mathscr{A}$.

называется *комплементарной к операции* (соответственно, каналу) Φ (см. [3; § 6.6]).[2] Однозначность определения комплементарной операции (с точностью до унитарной эквивалентности) показана в работе [11], где также установлено представление

$$\widetilde{\Phi}(A) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \operatorname{Tr}[V_i A V_j^*]|i\rangle\langle j|, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}), \tag{4}$$

в котором $\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – набор операторов из представления Крауса (1) для операции Φ, а $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{H}''$ (это представление легко получить, заметив, что для оператора $V\colon \mathscr{H} \ni |\varphi\rangle \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} |V_i\varphi\rangle \otimes |i\rangle \in \mathscr{H}' \otimes \mathscr{H}''$ имеет место (2)).

Для квантовой операции Φ, имеющей представления (1) и (2), сопряженное отображение имеет следующий вид:

$$\Phi^*(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i^* B V_i = V^*(B \otimes I_{\mathscr{H}''})V, \qquad B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}'). \tag{5}$$

Симплекс распределений вероятностей с $n \leqslant +\infty$ исходами обозначим через $\mathfrak{P}_n$.

Энтропия фон Неймана $H(\rho) = \operatorname{Tr}\eta(\rho)$ состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$, где $\eta(x) = -x\log x$, имеет следующее естественное расширение на конус $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$:

$$H(A) = \operatorname{Tr} AH\left(\frac{A}{\operatorname{Tr} A}\right) = \operatorname{Tr}\eta(A) - \eta(\operatorname{Tr} A), \qquad A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$$

(см. [12]).[3] Далее функцию $A \mapsto H(A)$ на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ будем называть *квантовой энтропией*, а функцию $\{x_i\} \mapsto H(\{x_i\}) = \sum_i \eta(x_i) - \eta(\sum_i x_i)$ на положительном конусе пространства ℓ_1, совпадающую с энтропией Шеннона на множестве $\mathfrak{P}_{+\infty}$ распределений вероятностей, будем называть *классической энтропией*.

Неотрицательность, вогнутость и полунепрерывность снизу квантовой энтропии на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ следуют из соответствующих свойств энтропии фон Неймана на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ (см. [4], [12], [13]). По определению

$$H(\lambda A) = \lambda H(A), \qquad A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}), \quad \lambda \geqslant 0. \tag{6}$$

Из вогнутости энтропии фон Неймана с учетом (6) следует монотонность квантовой энтропии

$$A \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad H(A) \leqslant H(B), \qquad A, B \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}). \tag{7}$$

С помощью простой аппроксимации из теоремы 11.10 из [14] нетрудно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i H(A_i) \leqslant H\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H(A_i) + H(\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}), \tag{8}$$

[2] В литературе квантовая операция $\widetilde{\Phi}$ также называется *сопряженной к операции* Φ (см. [10]).

[3] Здесь и далее $\log$ – это натуральный логарифм.

которое имеет место для любого набора $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$ и любого распределения вероятностей $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, где $n \leqslant +\infty$. Из этого неравенства легко выводится следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^n H(A_i) \leqslant H\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n H(A_i) + H(\{\operatorname{Tr} A_i\}_{i=1}^n), \tag{9}$$

которое имеет место для любого набора $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ такого, что

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Tr} A_i < +\infty.$$

Во втором неравенстве в (9) имеет место равенство, когда $\operatorname{supp} A_i \perp \operatorname{supp} A_j$ для любых $i \neq j$.

Для произвольного линейного сжатия V из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$ и любого оператора A из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ имеет место неравенство

$$H(VAV^*) \leqslant H(A), \tag{10}$$

которое легко доказать, заметив, что $V \oplus \sqrt{I_{\mathscr{H}} - V^*V}$ – изометрия из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}' \oplus \mathscr{H}$.

Положительный неограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве с дискретным спектром конечной кратности будем называть $\mathfrak{H}$-*оператором*. Если $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный набор собственных векторов, а $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – соответствующая последовательность собственных значений $\mathfrak{H}$-оператора H, то на своей области определения

$$\mathscr{D}(H) = \left\{\varphi \in \overline{\operatorname{lin}}(\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{+\infty} h_i^2 |\langle i, \varphi\rangle|^2 < +\infty\right\}$$

этот оператор имеет "спектральное" представление следующего вида: $H = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i |i\rangle\langle i|$.

Для $\mathfrak{H}$-оператора $H = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i |i\rangle\langle i|$ в пространстве $\mathscr{H}$ и оператора $A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ считаем, что

$$\operatorname{Tr} AH = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i \langle i|A|i\rangle \leqslant +\infty,$$

если $\operatorname{supp} A \subseteq \overline{\operatorname{lin}}(\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty})$, и $\operatorname{Tr} AH = +\infty$ в противном случае.

Важным примером $\mathfrak{H}$-оператора является оператор $-\log A$ для любого оператора $A = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i |i\rangle\langle i|$ из $\mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$ бесконечного ранга ($\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$), который на множестве

$$\mathscr{D}(-\log A) = \left\{\varphi \in \operatorname{supp} A \;\middle|\; \sum_{i=1}^{+\infty} (\log \lambda_i)^2 |\langle i, \varphi\rangle|^2 < +\infty\right\}$$

имеет представление $-\log A = \sum_{i=1}^{+\infty} (-\log \lambda_i) |i\rangle\langle i|$.

Отметим, что для любых операторов $A \in \mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$ и $B \in \mathfrak{T}_1(\mathscr{K})$ имеет место тождество

$$-\log(A \otimes B) = (-\log A) \otimes I_{\mathscr{K}} + I_{\mathscr{H}} \otimes (-\log B), \tag{11}$$

где “$=$” означает совпадение операторов на $\mathscr{D}(-\log(A \otimes B)) \subseteq \operatorname{supp} A \otimes \operatorname{supp} B$.

Для $\mathfrak{H}$-оператора H введем параметр $\mathrm{g}(H) = \inf\{\lambda > 0 \mid \operatorname{Tr} e^{-\lambda H} < +\infty\}$, считая, что $\mathrm{g}(H) = +\infty$, если $\operatorname{Tr} e^{-\lambda H} = +\infty$ для всех $\lambda > 0$ (см. [15]). Ясно, что $\mathrm{g}(-\log A) \leqslant 1$ для любого оператора A из $\mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$.

Заданный $\mathfrak{H}$-оператор H в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и положительное h определяют выпуклое множество

$$\mathscr{K}_{H,h} = \{A \in \mathfrak{T}_1(\mathscr{H}) \mid \operatorname{Tr} AH \leqslant h\}.$$

Будем использовать следующие обобщенные версии предложения 1 из [15; часть I] и предложения 6.6. из [13], которые легко получить из этих предложений, используя конструкцию из доказательства приведенной ниже леммы 3.

Предложение 1. *Пусть H – $\mathfrak{H}$-оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и $h > 0$.*

A) *Квантовая энтропия ограничена на множестве $\mathscr{K}_{H,h}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{g}(H) < +\infty$;*

B) *Квантовая энтропия непрерывна на множестве $\mathscr{K}_{H,h}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{g}(H) = 0$.*

Следующий результат непосредственно выводится из следствий 3 и 4 из [16].

Лемма 1. *Пусть $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ – последовательности операторов из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, сходящиеся к операторам A_0 и B_0 соответственно. Тогда*

$$\Bigl\{H(A_n+B_n) \underset{n}{\to} H(A_0+B_0)\Bigr\} \iff \Bigl\{H(A_n) \underset{n}{\to} H(A_0)\Bigr\} \wedge \Bigl\{H(B_n) \underset{n}{\to} H(B_0)\Bigr\}.$$

Квантовая энтропия произвольного оператора $A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ и классическая энтропия последовательности диагональных элементов его матрицы в любом ортонормированном базисе $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ пространства $\mathscr{H}$ связаны неравенством

$$H(A) \leqslant H(\{\langle i|A|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}), \tag{12}$$

которое следует из неотрицательности относительной энтропии (см. равенство (21) в [15; часть I]).

С помощью соотношений (6) и (12) из предложения 5 в [15; часть I] нетрудно получить следующее условие непрерывности квантовой энтропии.

Предложение 2. *Пусть $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Непрерывность квантовой энтропии на множестве $\mathscr{A} \subset \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ следует из непрерывности классической энтропии на множестве $\bigl\{\{\langle i|A|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty} \mid A \in \mathscr{A}\bigr\} \subset (\ell_1)_+$.*

Для любого оператора C из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})$ выполнено неравенство треугольника

$$H(C) \geqslant \bigl|H(\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}} C) - H(\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}} C)\bigr| \tag{13}$$

(см.[14]).

Для любых отображения $\Phi \in \mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ и оператора $A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ имеет место оценка

$$H(\Phi(A)) \leqslant \Big[\sup_{\rho\in \operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H})} H(\Phi(\rho))\Big] \operatorname{Tr} A + H(A), \tag{14}$$

которая легко доказывается с помощью спектрального разложения оператора A и неравенства (8).

Неоднократно будет использован следующий результат (см. [3; § 3.1.3]).

Лемма 2. *Пусть A – оператор ранга один из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$. Операторы $\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}} A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ и $\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}} A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{K})$ изоморфны и, следовательно, имеют одинаковую энтропию.*

Относительная энтропия операторов A и B из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ определяется выражением

$$H(A\,\|B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle i|\, A\log A - A\log B + B - A\,|i\rangle,$$

в котором $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A (или B) и считается, что $H(A\,\|B) = +\infty$, если $\operatorname{supp} A \nsubseteq \operatorname{supp} B$ (см. подробности в [12]).

Важным свойством квантовой операции $\Phi \in \mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ является выполнимость следующего закона невозрастания (монотонности) относительной энтропии (см. [12]):

$$H(\Phi(A)\|\Phi(B)) \leqslant H(A\,\|B), \qquad A, B \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}). \tag{15}$$

Для заданного натурального k обозначим через $\mathfrak{T}^k_+(\mathscr{H})$ (соответственно, через $\mathfrak{S}_k(\mathscr{H})$) множество операторов из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ (соответственно, состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$), имеющих ранг меньше или равный k.

Рассмотрим кратко метод аппроксимации вогнутых полунепрерывных снизу неотрицательных функций на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, предложенный в [16; раздел 4].

Для заданного натурального k и неотрицательной функции f на множестве $\mathfrak{S}_k(\mathscr{H})$ рассмотрим вогнутую функцию

$$\mathfrak{S}(\mathscr{H}) \ni \rho \mapsto \widehat{f}^{\sigma}_k(\rho) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\}\in \mathscr{P}^{\mathrm{a}}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_k(\mathscr{H}))} \sum_i \pi_i f(\rho_i) \in [0,+\infty] \tag{16}$$

(супремум берется по всем ансамблям состояний из $\mathfrak{S}_k(\mathscr{H})$ со средним состоянием ρ, т.е. по всем разложениям состояния ρ в выпуклую комбинацию состояний ранга меньше или равного k).

Свойство сильной устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ (см. [16; раздел 3]) позволяет доказать, что для любой полунепрерывной снизу (соответственно, непрерывной и ограниченной) функции f на множестве $\mathfrak{S}_k(\mathscr{H})$ функция $\widehat{f}^{\sigma}_k$ полунепрерывна снизу (соответственно, непрерывна и ограничена) на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$.

Если f – вогнутая полунепрерывная снизу неотрицательная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, то неубывающая последовательность $\{\widehat{f}^{\sigma}_k\}_k$ поточечно сходится к функции f. Поэтому приведенное выше замечание дает следующее условие непрерывности: если функция f имеет непрерывное сужение на множество $\mathfrak{S}_k(\mathscr{H})$ при каждом $k\in\mathbb{N}$, то достаточным условием непрерывности функции f на множестве $\mathscr{A}\subset\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является равномерная сходимость последовательности $\{\widehat{f}_k^{\sigma}\}_k$ на этом множестве. Для компактного множества $\mathscr{A}$ это условие является также необходимым в силу леммы Дини.

В [16] с помощью указанного выше метода показано, что достаточным условием непрерывности квантовой энтропии на множестве $A\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ является так называемое свойство равномерной аппроксимации (кратко UA-свойство) этого множества, т.е. выполнение равенства

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{A\in\mathscr{A}}\Delta_k(A)=0,$$

где

$$\Delta_k(A)=\inf_{\{\pi_i,A_i\}\in\mathscr{P}^{\mathrm{a}}_{\{A\}}(\mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H}))}\sum_i\pi_iH(A_i\|A),\qquad k\in\mathbb{N},$$

(инфимум берется по всем разложениям оператора A в выпуклую комбинацию операторов ранга меньше или равного k). Если множество $\mathscr{A}$ компактно, то UA-свойство является также необходимым условием непрерывности квантовой энтропии на этом множестве.

В § 4 рассмотренный выше метод аппроксимации будет использован для исследования свойств непрерывности выходной энтропии положительного отображения.

Замечание 1. Везде далее, говоря о непрерывности функции f на подмножестве $\mathscr{A}$ конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, имеем в виду непрерывность сужения этой функции на данное подмножество. При этом считаем, что непрерывность функции предполагает ее конечность (в отличие от полунепрерывности снизу или сверху).

§ 3. О непрерывности выходной энтропии на конусе положительных операторов

3.1. Общий случай. Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ – положительное линейное отображение. Выходная энтропия $H_\Phi\doteq H\circ\Phi$ этого отображения – вогнутая полунепрерывная снизу неотрицательная функция на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$. Следующая теорема показывает, что эта функция не может быть конечной и разрывной одновременно, т.е. она либо непрерывна, либо принимает бесконечные значения на некоторых входных операторах.

Теорема 1. *Пусть Φ – отображение из $\mathfrak{L}^+_{\leqslant1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$. Следующие свойства равносильны*:

(i) *функция $A\mapsto H_\Phi(A)$ конечна на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$;*

(ii) *функция $A\mapsto H_\Phi(A)$ непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$;*

(iii) *существует такой ортонормированный базис $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ пространства $\mathscr{H}'$, что функция $A\mapsto H(\{\langle i|\Phi(A)|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty})$ непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$;*[4]

[4] В силу предложения 2 это свойство формально сильнее предыдущего.

(iv) *существуют ортонормированный базис* $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ *в пространстве* $\mathscr{H}'$ *и последовательность* $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *неотрицательных чисел такие, что*

$$\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} h_i\Phi^*(|i\rangle\langle i|)\right\| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-h_i} < +\infty,$$

где $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}') \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *– сопряженное отображение к отображению* Φ.

Множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ *в* (*i*) *можно заменить произвольным выпуклым замкнутым ограниченным подмножеством* $\mathscr{A} \subset \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, *для которого*

$$\sup_n \sup_{A\in\mathscr{A}} \operatorname{Tr} AB_n < +\infty \quad\Longrightarrow\quad \sup_n \|B_n\| < +\infty$$

для любой возрастающей последовательности $\{B_n\}$ *операторов, принадлежащих* $\Phi^*(\mathfrak{B}_+(\mathscr{H}'))$.

Ограничения на выбор базиса $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ в свойствах (iii) и (iv) теоремы 1 рассмотрены в приведенном ниже замечании 4.

Доказательство. Докажем импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое замкнутое ограниченное подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, удовлетворяющее условию из последнего утверждения теоремы. Можно считать, что $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$. Из конечности функции $A \mapsto H_\Phi(A)$ на множестве $\mathscr{A}$ следует ее ограниченность на этом множестве. Действительно, если для каждого натурального n существует такой оператор $A_n \in \mathscr{A}$, что $H_\Phi(A_n) \geqslant 2^n$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}A_n \in \mathscr{A} \quad \text{и} \quad H_\Phi\biggl(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}A_n\biggr) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}H_\Phi(A_n) = +\infty$$

в силу дискретного неравенства Йенсена, выполнимость которого для вогнутой неотрицательной функции $A \mapsto H_\Phi(A)$ на множестве $\mathscr{A}$ легко проверяется.

Поэтому из приведенной ниже леммы 3 следует существование такого $\mathfrak{H}$-оператора $H = -\log T$ в пространстве $\mathscr{H}'$, что $\mathrm{g}(H) \leqslant 1$ и $\operatorname{Tr} H\Phi(A) \leqslant h$ для всех $A \in \mathscr{A}$ и некоторого $h > 0$. Пусть $H = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i|i\rangle\langle i|$. Можно считать, что $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – базис в $\mathscr{H}'$. Поскольку функция

$$A \mapsto \operatorname{Tr} H\Phi(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i\langle i|\Phi(A)|i\rangle = \operatorname{Tr}\biggl[\sum_{i=1}^{+\infty} h_i\Phi^*(|i\rangle\langle i|)\biggr]A \tag{17}$$

ограничена на множестве $\mathscr{A}$, линейный оператор в квадратных скобках ограничен, т.е. лежит в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ в силу наложенного на множество $\mathscr{A}$ условия. Поэтому функция (17) непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$. Для произвольного компакта $\mathscr{C} \subset \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ из леммы Дини следует равномерная сходимость ряда $\sum_{i=1}^{+\infty} h_i\langle i|\Phi(A)|i\rangle$ на этом компакте, а значит, и существование такой неубывающей последовательности $\{y_i^{\mathscr{C}}\}_{i=1}^{+\infty}$ положительных чисел, сходящейся к $+\infty$, что $\sup_{A\in\mathscr{C}}\sum_{i=1}^{+\infty} y_i^{\mathscr{C}} h_i\langle i|\Phi(A)|i\rangle < +\infty$. Заметим, что $H^{\mathscr{C}} = \sum_{i=1}^{+\infty} y_i^{\mathscr{C}} h_i|i\rangle\langle i|$ – $\mathfrak{H}$-оператор, у которого $\mathrm{g}(H^{\mathscr{C}}) = 0$. Имеем

$$\sup_{A\in\mathscr{C}} \operatorname{Tr} H^{\mathscr{C}}\Phi(A) = \sup_{A\in\mathscr{C}} \sum_{i=1}^{+\infty} y_i^{\mathscr{C}} h_i\langle i|\Phi(A)|i\rangle < +\infty. \tag{18}$$

В силу предложения 1, B) функция $A\mapsto H(\Phi(A))$ непрерывна на множестве $\mathscr{C}$, а значит, и на всем конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ (поскольку $\mathscr{C}$ – произвольное компактное подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$).

Импликация (i) $\Longrightarrow$ (iv) следует из доказательства импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii), в котором было показано существование базиса $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ и последовательности $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ с требуемыми свойствами.

Импликация (iv) $\Longrightarrow$ (iii) следует из доказательства импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii), поскольку из (18) следует непрерывность функции $A\mapsto H(\{\langle i|\Phi(A)|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty})$ на множестве $\mathscr{C}$ в силу классического аналога предложения 1, B).

Импликация (iii) $\Longrightarrow$ (i) следует из соотношения (12).

Лемма 3. *Для произвольного выпуклого множества $\mathscr{A}\subset\mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$, на котором квантовая энтропия ограничена, существует такой оператор $T\in\mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$, что*

$$\sup_{A\in\mathscr{A}} \operatorname{Tr} A(-\log T) < +\infty \quad \text{и} \quad UT = TU$$

для любого унитарного оператора U из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ такого, что $UAU^*\in\mathscr{A}$ для всех $A\in\mathscr{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}$ – одномерное пространство, порожденное единичным вектором $|0\rangle$. Рассмотрим выпуклое множество

$$\mathscr{A}^{\mathrm{e}} = \bigl\{\rho_A = A\oplus(1-\operatorname{Tr}A)|0\rangle\langle 0| \mid A\in\mathscr{A}\bigr\}$$

состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\oplus\mathscr{K})$. Для произвольного оператора $A\in\mathscr{A}$ имеем

$$H(\rho_A) = \operatorname{Tr}\eta(A) + \eta(1-\operatorname{Tr}A) = H(A) + \eta(\operatorname{Tr}A) + \eta(1-\operatorname{Tr}A) \leqslant H(A) + 1.$$

Поскольку энтропия фон Неймана ограничена на выпуклом множестве $\mathscr{A}^{\mathrm{e}}$, χ-емкость $\overline{C}(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})$ этого множества конечна (см. [15]). Теорема 1 из [15; часть I] гарантирует существование единственного состояния $\Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})$ из $\mathrm{cl}(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})$ (называемого оптимальным средним состоянием множества $\mathscr{A}^{\mathrm{e}}$) такого, что

$$H(\rho\|\Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})) \leqslant \overline{C}(\mathscr{A}^{\mathrm{e}}), \qquad \rho\in\mathscr{A}^{\mathrm{e}}.$$

Состояние $\Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})$ имеет вид $T\oplus\lambda|0\rangle\langle 0|$, где $T\in\mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$ и $\lambda\geqslant 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} A(-\log T) &\leqslant \operatorname{Tr}\rho_A(-\log\Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}}))\\ &= H(\rho_A\|\Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})) + H(\rho_A) \leqslant \overline{C}(\mathscr{A}^{\mathrm{e}}) + H(A) + 1, \qquad A\in\mathscr{A}.\end{aligned}$$

Для произвольного унитарного оператора U из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ такого, что $U\mathscr{A}U^* = \mathscr{A}$, в силу следствия 4 из [15; часть II] имеем $(U\oplus I_{\mathscr{K}})\Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}}) = \Omega(\mathscr{A}^{\mathrm{e}})(U\oplus I_{\mathscr{K}})$. Следовательно, $UT = TU$.

Замечание 2. Теорема 1 не утверждает, что из конечности квантовой энтропии на множестве $\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ следует ее непрерывность на этом множестве, поскольку из непрерывности функции $A \mapsto H_\Phi(A) \doteq H(\Phi(A))$ на некомпактном множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ не следует непрерывность функции $A \mapsto H(A)$ на множестве $\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$. Это подтверждает следующий пример.

Пусть $\mathscr{A}$ – выпуклое замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H}')$, на котором энтропия фон Неймана разрывна, но ограничена (см. примеры в [15]). Пусть $\{\sigma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний из $\mathscr{A}$, сходящаяся к состоянию σ_0, такая, что $\lim_{n\to+\infty} H(\sigma_n) \neq H(\sigma_0)$. Рассмотрим отображение $\Phi\colon A \mapsto \sum_{n\geqslant 0}\langle n|A|n\rangle\sigma_n$, где $\{|n\rangle\}_{n\geqslant 0}$ – некоторый ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. В силу теоремы 1 функция $A \mapsto H_\Phi(A)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, но функция $A \mapsto H(A)$ не является непрерывной на множестве $\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$, содержащем последовательность $\{\sigma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и состояние σ_0.

Непрерывность функции $A \mapsto H_\Phi(A)$ на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ означает непрерывность функции $A \mapsto H(A)$ на любом множестве вида $\Phi(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$.

Замечание 3. В главном утверждении теоремы 1 (импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii)) проявляются специфические качества энтропии фон Неймана. Его нельзя доказать, используя только такие общие свойства функций энтропийного типа как вогнутость, полунепрерывность снизу и т.п. Простейший пример, подтверждающий это утверждение, – это функция

$$A \mapsto R_0(\Phi(A)) \doteq \|\Phi(A)\|_1 \log \operatorname{rank}(\Phi(A))$$

– выходная энтропия Реньи нулевого порядка отображения Φ.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет лемма 3, которая основана на результатах, связанных с понятием χ-емкости подмножеств квантовых состояний (см. [15]).

Замечание 4. Свойство (iv) в теореме 1 можно рассматривать как критерий непрерывности выходной энтропии отображения Φ в терминах сопряженного отображения Φ^*. С его помощью будет доказано предложение 3.

На выбор базиса $\{|i\rangle\}$ в свойствах (iii) и (iv) теоремы 1 накладываются определенные ограничения, вытекающие из доказательств этой теоремы и леммы 3, а именно, $\{|i\rangle\}$ – это базис из собственных векторов некоторого оператора T из $\mathrm{cl}(\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H})))$, коммутирующего с любым унитарным оператором U, для которого $U\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))U^* \subseteq \Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$. В частности, если множество $\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ состоит из коммутирующих операторов, то $\{|i\rangle\}$ – это базис, в котором эти операторы имеют диагональный вид. Последнее замечание можно использовать для "переформулировки" теоремы 1 на случай положительного отображения Φ из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в ℓ_1, поскольку оно естественным образом отождествляется с отображением того вида, который описан в этом замечании.

Используя теорему 1, можно получить условие непрерывности выходной энтропии для следующего класса квантовых каналов.

Пример 1. Пусть G – компактная группа, $\{V_g\}_{g\in G}$ – унитарное представление группы G в пространстве $\mathscr{H}'$, M – положительная операторнозначная мера (POVM) на G со значениями в $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Для заданного произвольного состояния σ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}')$ рассмотрим квантовый канал

$$\Phi_\sigma(A) = \int_G V_g\sigma V_g^* \operatorname{Tr} AM\,(dg), \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}).$$

При соответствующем выборе параметров (G, V_g, M, σ) данный канал демонстрирует специфические свойства бесконечномерных квантовых каналов. В частности, он является каналом, разрушающим сцепленность, который не имеет представления Крауса с операторами ранга 1 (см. [17]).[5]

В силу теоремы 1 и вогнутости энтропии фон Неймана выходная энтропия канала Φ_σ непрерывна, если состояние $\omega(G, V_g, \sigma) = \int_G V_g\sigma V_g^* \mu_H\,(dg)$, где μ_H – мера Хаара на группе G, имеет конечную энтропию. Нетрудно показать, что это условие также является необходимым, если множество вероятностных мер $\{\operatorname{Tr}\rho M(\,\cdot\,)\}_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})}$ слабо плотно в множестве всех вероятностных мер на G.

Из теоремы 1 с учетом неравенства (9) получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $\{\Phi_i\}_{i\in I}$ – такой конечный или счетный набор отображений из $\mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$, что $\sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})} \sum_{i\in I} \operatorname{Tr}\Phi_i(\rho) < +\infty$. Выходная энтропия отображения $\sum_{i\in I}\Phi_i$ непрерывна, если*

$$\sum_{i\in I} H(\Phi_i(\rho)) < +\infty, \quad H(\{\operatorname{Tr}\Phi_i(\rho)\}_{i\in I}) < +\infty, \qquad \rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}).$$

Это условие является необходимым условием непрерывности выходной энтропии отображения $\sum_{i\in I}\Phi_i$ в случае, когда множество I конечно или когда для каждого $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$ найдется такое n, что $\operatorname{supp}\Phi_i(\rho) \perp \operatorname{supp}\Phi_j(\rho)$ для всех $i, j \geqslant n$, $i \neq j$.

Приведем теперь коммутативный вариант теоремы 1, который может быть полезен при исследовании выходной энтропии Шеннона марковских и субмарковских операторов.

Следствие 2. *Пусть $\|\phi_{ij}\|$ – матрица положительного линейного ограниченного преобразования в пространстве ℓ_1. Следующие свойства равносильны:*

(i) *функция $\{x_i\} \mapsto H(\{\sum_j \phi_{ij}x_j\}_{i=1}^{+\infty})$ конечна на множестве $\mathfrak{P}_{+\infty} \subset (\ell_1)_+$;*

(ii) *функция $\{x_i\} \mapsto H(\{\sum_j \phi_{ij}x_j\}_{i=1}^{+\infty})$ непрерывна на конусе $(\ell_1)_+$;*

(iii) *существует последовательность неотрицательных чисел $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$, для которой*

$$\sup_j \sum_{i=1}^{+\infty} h_i\phi_{ij} < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-h_i} < +\infty.$$

[5] Произвольный конечномерный канал, разрушающий сцепленность, имеет представление Крауса с операторами ранга один (см. [18]).

3.2. Случай вполне положительных отображений. Простейшее вполне положительное линейное отображение из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H}')$ имеет вид $A \mapsto VAV^*$, где V – линейный ограниченный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$. С помощью теоремы 1 легко установить необходимое и достаточное условие непрерывности выходной энтропии этого отображения (особая роль которого обусловлена представлениями (1) и (2)).

Предложение 3. *Пусть V – линейный ограниченный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$. Функция $A \mapsto H(VAV^*)$ непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ тогда и только тогда, когда оператор V компактен и имеет такую последовательность $\{\nu_i\}$ сингулярных чисел (собственных значений оператора $\sqrt{V^*V}$), что $\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda/\nu_i^2} < +\infty$ при некотором $\lambda > 0$ ($e^{-\lambda/0} \doteq 0$). Если это условие выполнено, то*

$$\sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})} H(V\rho V^*) = \lambda^*(V), \tag{19}$$

где $\lambda^*(V)$ – единственное решение уравнения $\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda/\nu_i^2} = 1$, если оно существует, и $\lambda^*(V) = \mathrm{g}(\{\nu_i^{-2}\}) = \inf\{\lambda > 0 \mid \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda/\nu_i^2} < +\infty\}$ в противном случае.[6]

Далее будем использовать параметр $\lambda^*(V)$ для произвольного оператора $V \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, считая, что $\lambda^*(V) = +\infty$, если оператор V некомпактен или имеет такую последовательность сингулярных чисел $\{\nu_i\}$, что $\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda/\nu_i^2} = +\infty$ для всех $\lambda > 0$. В силу теоремы 1 соотношение (19) имеет место и в этом случае.

Доказательство. Можно считать, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}'$, $V = \sqrt{V^*V}$, $\|V\| \leqslant 1$ и $\operatorname{Ker} V = \{0\}$.

Пусть $V = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu_i |i\rangle\langle i|$. Если $\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda/\nu_i^2} < +\infty$ для некоторого $\lambda > 0$, то свойство (iv) из теоремы 1 выполнено для базиса $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ и последовательности $\{h_i = \lambda\nu_i^{-2}\}_{i=1}^{+\infty}$ (поскольку в этом случае $\Phi^*(\,\cdot\,) = V(\,\cdot\,)V$ и, следовательно, $\Phi^*(|i\rangle\langle i|) = \nu_i^2 |i\rangle\langle i|$).

Утверждение о точной верхней грани функции $A \mapsto H(VAV)$ на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ легко доказывается с помощью леммы 6 с учетом соотношения (12).

Если функция $A \mapsto H(VAV)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, то энтропия ограничена на выпуклом множестве $\{V\rho V \mid \rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})\}$ и, следовательно, это множество относительно компактно в силу следствия 7 из [15; часть I] (используемого вместе с конструкцией из доказательства леммы 3). Поэтому оператор V компактен (поскольку в противном случае существует такая последовательность единичных векторов $\{|\varphi_n\rangle\}$, что последовательность $\{V|\varphi_n\rangle\}$ не является относительно компактной). Из леммы 3 следует существование такого оператора $T \in \mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$, что $\sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})} \operatorname{Tr} V\rho V(-\log T) < +\infty$ и $UT = TU$ для произвольного унитарного оператора U, коммутирующего с оператором V. Последнее свойство оператора T показывает, что этот оператор диагонализируем в базисе $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$, т.е. что $T = \sum_{i=1}^{+\infty} \tau_i |i\rangle\langle i|$, где $\{\tau_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – последовательность

[6] При $\mathrm{g}(\{\nu_i^{-2}\}) < +\infty$ уравнение $\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda/\nu_i^2} = 1$ не имеет решений, если выполнено $\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\mathrm{g}(\{\nu_i^{-2}\})/\nu_i^2} < 1$.

неотрицательных чисел, у которой $\sum_{i=1}^{+\infty}\tau_i \leqslant 1$. Поэтому

$$\sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})} \operatorname{Tr} V\rho V(-\log T) = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})} \sum_{i=1}^{+\infty} \langle i|\rho|i\rangle \nu_i^2(-\log\tau_i) = \lambda < +\infty$$

и, следовательно, $\nu_i^2(-\log\tau_i) \leqslant \lambda$ для всех i. Это показывает, что $\lambda^*(V) < +\infty$.

В замечании 2 показано, что непрерывность квантовой энтропии на множестве $\Phi(\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$ не является необходимым условием непрерывности выходной энтропии отображения Φ. В силу предложения 3 отображение $A \mapsto VAV^*$, где $V = \sum_{i>1}(\log(i))^{-1/2}|i\rangle\langle i|$, дает другой пример, подтверждающий это наблюдение, поскольку нетрудно проверить, что классическая энтропия разрывна на множестве $\{\{(\log(i))^{-1}x_i\}_{i>1} \mid \{x_i\}_{i>1} \in \mathfrak{P}_{+\infty}\}$.

Произвольная квантовая операция $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ имеет представление Крауса (1). Используя предложение 3 и следствие 1, получаем необходимое и достаточное условие непрерывности выходной энтропии квантовой операции, имеющей представление Крауса с конечным числом ненулевых слагаемых.

Следствие 3. *Выходная энтропия отображения* $\Phi(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\,\cdot\,)V_i^*$, *где* $\{V_i\}_{i=1}^{m}$ – *конечный набор линейных ограниченных операторов из* $\mathscr{H}$ *в* $\mathscr{H}'$, *непрерывна тогда и только тогда, когда* $\lambda^*(V_i) < +\infty$ *для всех* $i = \overline{1,m}$.

Это следствие показывает, в частности, что любой квантовый канал с непрерывной выходной энтропией не может иметь представления Крауса с конечным числом слагаемых, поскольку условие $\sum_{i=1}^{m} V_i^*V_i = I_{\mathscr{H}}$ не совместимо с условием компактности операторов V_i для всех $i = \overline{1,m}$.

Для квантовой операции, имеющей представление Крауса (1) со счетным числом ненулевых слагаемых, условие “$\lambda^*(V_i) < +\infty$ для всех i” является только необходимым условием непрерывности выходной энтропии. Используя теорему 1, предложение 3, следствие 1 и некоторые другие результаты, можно получить несколько достаточных условий непрерывности выходной энтропии такой квантовой операции в терминах ее операторов Крауса. Эти условия, а также примеры их использования, рассмотрены в [19; раздел 3.2].

С точки зрения приложений в квантовой теории информации, а также в связи с результатами следующих параграфов (см. замечание после следствия 6 и следствие 8), важным является определение условий непрерывности выходной энтропии квантовой операции, комплементарной к исходной. Теорема 1 позволяет получить следующие условия.

Предложение 4. *Пусть* $\Phi(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i(\,\cdot\,)V_i^*$ – *квантовая операция из* $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$. *Комплементарная операция* $\widetilde{\Phi}$ *имеет непрерывную выходную энтропию, если выполнено одно из следующих условий* (*таких, что* c $\Longrightarrow$ b $\Longleftrightarrow$ a):

a) $H(\{\operatorname{Tr} V_i\rho V_i^*\}_{i=1}^{+\infty}) < +\infty$ *для всех* $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$;

b) *существует такая последовательность* $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *неотрицательных чисел, что*

$$\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} h_i V_i^* V_i\right\| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-h_i} < +\infty;$$

c) *выполнено*

$$H(\{\|V_i\|^2\}_{i=1}^{+\infty}) < +\infty.$$

Если $\operatorname{Ran} V_i \perp \operatorname{Ran} V_j$ *для всех достаточно больших* $i \neq j$, *то* a $\Longleftrightarrow$ b – *необходимое условие непрерывности выходной энтропии квантовой операции* $\widetilde{\Phi}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 условие a) равносильно непрерывности выходной энтропии отображения

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H}) \ni A \mapsto \Psi(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \operatorname{Tr} V_i A V_i^* |i\rangle\langle i| \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}''),$$

где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис из представления (4) квантовой операции $\widetilde{\Phi}$. Поэтому непрерывность выходной энтропии квантовой операции $\widetilde{\Phi}$ следует из условия a) в силу предложения 2.

Равносильность условий a) и b) следует из равносильности свойств (ii) и (iv) в теореме 1 с учетом замечания 4, поскольку отображение, сопряженное к отображению Ψ, имеет вид

$$\Psi^*(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle i|B|i\rangle V_i^* V_i, \qquad B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}'').$$

Импликация c) $\Longrightarrow$ b) очевидна, поскольку если условие c) выполнено, то последовательность $\{h_i = -\log \|V_i\|^2\}$ обладает требуемыми свойствами.

Пусть $\operatorname{Ran} V_i \perp \operatorname{Ran} V_j$ для всех $i, j \geqslant n$, $i \neq j$. Тогда

$$P\widetilde{\Phi}(\,\cdot\,)P = \sum_{i=n}^{+\infty} \operatorname{Tr} V_i(\,\cdot\,)V_i^* |i\rangle\langle i|,$$

где $P = \sum_{i=n}^{+\infty} |i\rangle\langle i|$, а $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – базис из представления (4) квантовой операции $\widetilde{\Phi}$. В силу соотношения (10) из $H(\widetilde{\Phi}(\rho)) < +\infty$ следует, что $H(P\widetilde{\Phi}(\rho)P) = H(\{\operatorname{Tr} V_i \rho V_i^*\}_{i=n}^{+\infty}) < +\infty$ для любого $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$, что равносильно условию a).

Условие c) показывает, что непрерывность выходной энтропии комплементарной квантовой операции гарантируется достаточно быстрой скоростью убывания последовательности норм операторов Крауса исходной операции. Однако, это условие является достаточно грубым, поскольку не учитывает "геометрию" этой последовательности, т.е. взаимное расположение операторов Крауса. Это демонстрирует следующий пример.

Пример 2. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – последовательность операторов из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ такая, что $\sum_{i=1}^{+\infty} V_i^* V_i \leqslant I_{\mathscr{H}}$, $\operatorname{Ran} V_i^* \perp \operatorname{Ran} V_j^*$ для всех достаточно больших $i \neq j$ и $\|V_i\|^2 \leqslant C \log^{-\alpha}(i)$ для всех i, где $\alpha \geqslant 0$ и $C > 0$. Поскольку

$V_i^*V_i \leqslant C\log^{-\alpha}(i)P_i$, где P_i – проектор на подпространство $\operatorname{Ran}V_i^*$, условие b) предложения 4 выполнено для квантовой операции $\Phi_\alpha(\,\cdot\,)=\sum_{i=1}^{+\infty}V_i(\,\cdot\,)V_i^*$ при $\alpha\geqslant 1$ (можно взять последовательность $\{h_i=\log(i)\}$). Следовательно, выходная энтропия комплементарной операции $\widetilde{\Phi}_\alpha$ непрерывна при $\alpha\geqslant 1$.

Из последнего утверждения предложения 4 следует, что выходная энтропия квантовой операции $\widetilde{\Phi}_\alpha$ не является непрерывной при $\alpha<1$, если $V_i=\sqrt{C\log^{-\alpha}(i)}P_i$.

§ 4. О свойстве сохранения непрерывности энтропии

Непрерывность выходной энтропии положительного линейного отображения на всем конусе входных операторов – это сильное свойство, характеризующее особые качества данного отображения. В этом параграфе рассматривается значительно более слабое свойство положительных линейных отображений, состоящее в непрерывности выходной энтропии на любом подмножестве конуса входных операторов, на котором непрерывна квантовая энтропия. Для его исследования удобно использовать метод аппроксимации вогнутых полунепрерывных снизу функций, кратко рассмотренный в конце § 2.

Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ – положительное линейное отображение, а $H_\Phi\doteq H\circ\Phi$ – его выходная энтропия – вогнутая полунепрерывная снизу неотрицательная функция на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$. Для каждого натурального k рассмотрим вогнутую функцию

$$H_\Phi^k(A)\doteq\sup_{\{\pi_i,A_i\}\in\mathscr{P}^{\mathrm{a}}_{\{A\}}(\mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H}))}\sum_i\pi_iH_\Phi(A_i)\tag{20}$$

на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ (здесь супремум берется по всем разложениям оператора A в счетную выпуклую комбинацию операторов ранга меньше или равного k). Используя свойство (6), легко показать, что сужение функции H_Φ^k на множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ совпадает с функцией $(\widehat{H_\Phi})_k^\sigma$, определяемой формулой (16) при $f=H_\Phi$, и что

$$H_\Phi^k(\lambda A)=\lambda H_\Phi^k(A),\qquad A\in\mathfrak{T}_+(\mathscr{H}),\lambda\geqslant 0.$$

Поэтому из результатов, представленных в конце § 2, следует, что функция H_Φ^k полунепрерывна снизу на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ при каждом k и что возрастающая последовательность $\{H_\Phi^k\}$ поточечно сходится к функции H_Φ. Будем называть функцию H_Φ^k *аппроксиматором выходной энтропии отображения* Φ *порядка* k.

Используя спектральное разложение, можно показать равномерную сходимость последовательности $\{H_\Phi^k\}$ к функции H_Φ на компактных подмножествах конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, на которых квантовая энтропия непрерывна.

Лемма 4. *Если квантовая энтропия непрерывна на компактном подмножестве* $\mathscr{A}$ *конуса* $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, *то*

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{A\in\mathscr{A},\,\Phi\in\mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')}(H_\Phi(A)-H_\Phi^k(A))=0.\tag{21}$$

Доказательство. Можно считать, что $\mathscr{A} \subset \mathfrak{T}_1(\mathscr{H})$. Пусть $\lambda_i^k(A)$ – сумма собственных значений $\lambda_{(i-1)k+1}, \dots, \lambda_{ik}$ оператора A (расположенных в невозрастающем порядке) и P_i^k – спектральный проектор этого оператора, соответствующий указанному набору собственных значений. Поскольку ансамбль $\{\pi_i^k, (\pi_i^k)^{-1} P_i^k A\}$, где $\pi_i^k = \|A\|_1^{-1} \lambda_i^k(A)$, лежит в $\mathscr{P}^{\mathrm{a}}_{\{A\}}(\mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H}))$, используя неравенство (9) и свойство монотонности (7), получаем, что

$$
\begin{aligned}
H_\Phi(A) - H_\Phi^k(A) &\leqslant H(\Phi(A)) - \sum_i \pi_i^k H\bigl(\Phi((\pi_i^k)^{-1} P_i^k A)\bigr) \\
&= H(\Phi(A)) - \sum_i H(\Phi(P_i^k A)) \leqslant H(\{\operatorname{Tr}\Phi(P_i^k A)\}) \leqslant H(\{\lambda_i^k(A)\})
\end{aligned}
$$

для любого отображения Φ из $\mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$. Поэтому утверждение леммы следует из леммы 9 в [16], в силу которой $\lim_{k\to+\infty} \sup_{A\in\mathscr{A}} H(\{\lambda_i^k(A)\}) = 0$.

Заметим, что в силу вогнутости функции $\eta(x) = -x\log x$ имеет место неравенство

$$
H_\Phi(A) - H_\Phi^k(A) \leqslant \inf_{\{\pi_i, A_i\} \in \mathscr{P}^{\mathrm{a}}_{\{A\}}(\mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H}))} \sum_i \pi_i H(\Phi(A_i) \| \Phi(A)), \qquad A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}),
$$

которое показывает, что (21) выполняется для произвольного подмножества $\mathscr{A}$ конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, обладающего UA-свойством (не обязательно компактного), если множество $\mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ всех положительных отображений заменить на множество $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ всех квантовых операций (или на любое другое множество положительных линейных отображений, для которых справедлив закон невозрастания относительной энтропии (15)).

Замечание 5. Поскольку функция H_Φ^k полунепрерывна снизу на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ при каждом k, обобщенная лемма Дини (в которой условие непрерывности функций возрастающей последовательности заменено условием их полунепрерывности снизу) показывает, что из непрерывности функции H_Φ на компактном множестве $\mathscr{A} \subset \mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ следует равномерная сходимость последовательности $\{H_\Phi^k\}$ к функции H_Φ на этом множестве. Обратное утверждение, очевидно, выполнено, если функция H_Φ^k непрерывна на множестве $\mathscr{A}$ при каждом k.

Приведенные выше рассуждения позволяют дать следующий ответ на второй вопрос, сформулированный в § 1.

Теорема 2. *Пусть Φ – отображение из $\mathfrak{L}^+_{\leqslant 1}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$. Следующие свойства равносильны*:

(i) *функция $A \mapsto H_\Phi(A)$ непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+^1(\mathscr{H}) = \{A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}) \mid \operatorname{rank} A \leqslant 1\}$*;

(ii) *функция $A \mapsto H_\Phi^k(A)$ непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ при каждом k*;

(iii) *функция $A \mapsto H_\Phi(A)$ непрерывна на любом подмножестве $\mathscr{A}$ конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, на котором непрерывна квантовая энтропия.*

Свойство (i) *равносильно непрерывности и ограниченности функции* $A \mapsto H_\Phi(A)$ *на множестве* $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, *а значит, оно следует из* UA-*свойства множества* $\Phi(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}))$.

Доказательство. Докажем импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). Покажем сначала, что из (i) следует непрерывность функции $A \mapsto H_\Phi(A)$ на конусе $\mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H})$ при каждом k. Предположим, что существует последовательность $\{A_n\} \subset \mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H})$, сходящаяся к оператору A_0, такая, что

$$\lim_{n\to+\infty} H_\Phi(A_n) > H_\Phi(A_0). \tag{22}$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем $A_n = \sum_{i=1}^k A_i^n$, где $\{A_i^n\}_{i=1}^k$ – набор операторов из $\mathfrak{T}_+^1(\mathscr{H})$. Поскольку множество $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ компактно, критерий компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ показывает относительную компактность последовательности $\{A_i^n\}_n$ при каждом $i = \overline{1,k}$ (см. [16; лемма 10]). Следовательно, можно считать, что существует $\lim_{n\to+\infty} A_i^n = A_i^0 \in \mathfrak{T}_+^1(\mathscr{H})$ при каждом $i = \overline{1,k}$. Ясно, что $\sum_{i=1}^k A_i^0 = A_0$. Из (i) следует, что $\lim_{n\to+\infty} H_\Phi(A_i^n) = H_\Phi(A_i^0)$. Поэтому лемма 1 приводит к противоречию с (22).

Из непрерывности функции H_Φ на конусе $\mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H})$ следует ее ограниченность на множестве $\mathfrak{S}_k(\mathscr{H})$ (это легко проверить рассуждением от противного, учитывая, что $0 \in \mathfrak{T}_+^k(\mathscr{H})$). В силу следствия 1 из [16] функция H_Φ^k непрерывна и ограничена на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ (где она совпадает с функцией $(\widehat{H_\Phi})_k^\sigma$), а значит, эта функция непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$.

Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (iii) непосредственно следует из леммы 4, а импликация (iii) $\Longrightarrow$ (i) очевидна.

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 2, A) в [16] (поскольку квантовая энтропия ограничена на любом ограниченном множестве, обладающем UA-свойством).

Замечание 6. Как и в случае теоремы 1, главное утверждение теоремы 2 (импликация (i) $\Longrightarrow$ (iii)) основано на особых свойствах энтропии фон Неймана, его нельзя доказать, используя только общие свойства функций энтропийного типа. В этом случае простейшим примером также является функция $A \mapsto R_0(\Phi(A)) = \|\Phi(A)\|_1 \log \operatorname{rank}(\Phi(A))$ – выходная энтропия Реньи нулевого порядка отображения Φ. Действительно, если $\Phi(A) = \frac{1}{2}(A + UAU^*)$, где U – унитарный оператор, не имеющий собственных векторов, то $R_0(\Phi(A)) = \|A\|_1 \log 2$ для всех $A \in \mathfrak{T}_+^1(\mathscr{H})$, но функция $A \mapsto R_0(\Phi(A))$ не является непрерывной на множестве $\mathfrak{T}_+^2(\mathscr{H}) \setminus \mathfrak{T}_+^1(\mathscr{H})$, на котором $R_0(A) = \|A\|_1 \log 2$.

Существенную роль в доказательстве теоремы 2 играют второе неравенство в (9) (см. доказательство леммы 4) и импликация “$\Longleftarrow$” в лемме 1.

Следуя терминологии, принятой в [19], введем следующее определение.

Определение 2. Свойство (iii) в теореме 2 будем называть PCE-*свойством*. Положительное линейное отображение (соответственно, квантовую операцию или квантовый канал) Φ, для которого выполнено это свойство, будем называть PCE-*отображением* (соответственно, PCE-*операцией* или PCE-*каналом*).

Аббревиатура “PCE” связана с тем, что отображение Φ, обладающее свойством (iii) из теоремы 2, можно назвать отображением, “сохраняющим непрерывность энтропии” (Preserving Continuity of the Entropy).

Простейшие примеры PCE-отображений – это вполне положительные линейные отображения с представлением Крауса (1), состоящим из конечного числа ненулевых слагаемых, для которых свойство (i) из теоремы 2 проверяется непосредственно.

В силу последнего утверждения теоремы 2 для доказательства PCE-свойства отображения Φ достаточно показать, что

$$\Phi(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H})) \subseteq \Lambda(\mathscr{A}),$$

где Λ – конечная композиция преобразований, сохраняющих UA-свойство (см. предложение 4 в [16]), а $\mathscr{A}$ – компактное множество, на котором энтропия непрерывна. Это дает следующее достаточное условие PCE-свойства положительных отображений.

Следствие 4. *Отображение* Φ *из* $\mathfrak{L}^{+}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ *обладает* PCE-*свойством, если существуют сепарабельное гильбертово пространство* $\mathscr{K}$, *семейство* $\{A_\psi\}_{\psi\in\mathscr{H},\|\psi\|=1}$ *операторов, принадлежащих некоторому компактному подмножеству* $\mathscr{A}$ *конуса* $\mathfrak{T}_+(\mathscr{K})$, *на котором квантовая энтропия непрерывна, и семейство* $\{V_\psi\}_{\psi\in\mathscr{H},\|\psi\|=1}$ *линейных сжатий из* $\mathscr{K}$ *в* $\mathscr{H}'$ *такие, что* $\Phi(|\psi\rangle\langle\psi|) = V_\psi A_\psi V_\psi^*$ *для каждого единичного вектора* ψ *из* $\mathscr{H}$.

Если Φ – квантовая операция, которая имеет представление Крауса (1), содержащее k ненулевых слагаемых, то выполнение условия следствия 4 легко проверить, взяв k-мерное гильбертово пространство $\mathscr{K}$. Нетривиальное применение следствия 4 – доказательство PCE-свойства для следующего семейства квантовых каналов.

Пример 3. Пусть $\mathscr{H}_a$ – это гильбертово пространство $\mathscr{L}_2([-a,+a])$, где $a < +\infty$, и $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – группа унитарных операторов в $\mathscr{H}_a$, определяемых формулой

$$(U_t\varphi)(x) = e^{-\mathrm{i}tx}\varphi(x), \qquad \varphi\in\mathscr{H}_a.$$

Для заданной плотности вероятности $p(t)$ рассмотрим квантовый канал

$$\Phi^a_p\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_a) \ni A \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} U_t A U_t^* p(t)\,dt \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_a).$$

В приложении 5.2 в [20] показано, что для канала Φ^a_p выполнено условие следствия 4 с гильбертовым пространством $\mathscr{K} = \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ и определенным семейством унитарных операторов $\{V_\psi\}$ из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}_a$ при условии, что дифференциальная энтропия распределения $p(t)$ конечна, а функция $p(t)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и монотонна на $(-\infty,-b]$ и на $[+b,+\infty)$ при достаточно большом b.

Если PCE-свойство выполнено для двух положительных отображений, то оно выполнено и для их композиции, поэтому из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Следствие 5. *Если свойство* (i) *в теореме* 2 *выполнено для положительных линейных ограниченных отображений* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ *и* $\Psi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}') \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}'')$, *то оно выполнено и для отображения* $\Psi \circ \Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}'')$.

В квантовой теории информации используется понятие выпуклого замыкания выходной энтропии (Convex Closure of the Output Entropy = CCoOE) квантового канала (определяемого как наибольшая выпуклая замкнутая, т.е. полунепрерывная снизу, функция на множестве входных состояний этого канала, не превосходящая выходную энтропию) (см. [20], [21]). Обобщая доказательство предложения 2 из [20], можно показать, что свойство (i) в теореме 2 равносильно непрерывности и ограниченности CCoOE отображения Φ на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Поэтому следствие 5 показывает, что из непрерывности и ограниченности CCoOE положительных линейных ограниченных отображений $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ и $\Psi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}') \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}'')$ следует непрерывность и ограниченность CCoOE отображения $\Psi \circ \Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}'')$.

Если Φ – квантовая операция (вполне положительное не увеличивающее след отображение), имеющая представление (2), то комплементарная операция $\widetilde{\Phi}$ имеет представление (3). Поскольку в силу леммы 2 выходные энтропии квантовых операций Φ и $\widetilde{\Phi}$ совпадают на множестве операторов ранга один, из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 6. *Квантовая операция* Φ *обладает* PCE-*свойством тогда и только тогда, когда ее комплементарная операция* $\widetilde{\Phi}$ *обладает* PCE-*свойством.*

В силу этого следствия для доказательства PCE-свойства квантовой операции Φ достаточно показать непрерывность выходной энтропии комплементарной операции $\widetilde{\Phi}$, что можно сделать, используя достаточные условия из предложения 4.

§ 5. Выходная энтропия комплементарных вполне положительных отображений

Выходные энтропии двух комплементарных квантовых операций (вполне положительных не увеличивающих след отображений, связанных посредством представлений (2) и (3)) совпадают на множестве входных операторов ранга один (в силу леммы 2). Однако, в общем случае – это разные функции на конусе входных операторов, аналитические свойства которых могут быть существенно различными (подтвердить это замечание можно, рассмотрев тождественное отображение, комплементарным к которому является так называемое полностью деполяризирующее отображение (см. [3; пример 6.4.1]). Тем не менее, имеет место следующая связь свойств локальной непрерывности этих функций.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ *и* $\widetilde{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}'')$ *– квантовые операции, связанные отношением комплементарности, а* $\mathscr{A}$ *– подмножество конуса* $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, *на котором* $\min\{H_\Phi(A), H_{\widetilde{\Phi}}(A)\} < +\infty$. *Из непрерывности* *квантовой энтропии на множестве* $\mathscr{A}$ *следует непрерывность функции* $A \mapsto (H_\Phi(A) - H_{\widetilde{\Phi}}(A))$ *на множестве* $\mathscr{A}$.

Замечание 7. Из неравенства (10), в котором V – сжатие из представлений (2) и (3), и неравенства (13) следует, что

$$|H_\Phi(A) - H_{\widetilde{\Phi}}(A)| \leqslant H(A), \qquad A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}). \tag{23}$$

Теорема 3 показывает, что из непрерывности правой части этого неравенства на некотором подмножестве конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ следует непрерывность на этом подмножестве подмодульного выражения в левой части. Условие $\min\{H_\Phi(A), H_{\widetilde{\Phi}}(A)\} < +\infty$ в теореме 3 можно снять, доопределив должным образом функцию $A \mapsto (H_\Phi(A) - H_{\widetilde{\Phi}}(A))$ на операторах A, у которых $H_\Phi(A) = H_{\widetilde{\Phi}}(A) = +\infty$, но $H(A) < +\infty$.

Замечание 8. Если Φ – квантовый канал, то $H_\Phi(\rho) - H_{\widetilde{\Phi}}(\rho)$ – когерентная информация $I_c(\rho, \Phi)$ этого канала в состоянии ρ (см. [3], [14]).

Доказательство. Пусть $\{\rho_n\}$ – последовательность состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, сходящаяся к состоянию ρ_0, такая, что $H(\rho_n) < +\infty$ и $\min\{H_\Phi(\rho_n), H_{\widetilde{\Phi}}(\rho_n)\} < +\infty$ при всех $n \geqslant 0$, а $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\rho_0)$. Из неравенства (23) следует конечность величин $H_\Phi(\rho_n)$ и $H_{\widetilde{\Phi}}(\rho_n)$ при всех $n \geqslant 0$.

Пусть $a_n = H_\Phi(\rho_n) - H_{\widetilde{\Phi}}(\rho_n)$ при каждом $n \geqslant 0$. В силу симметрии для доказательства $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0$ достаточно показать, что

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \geqslant a_0. \tag{24}$$

Пусть $\mathscr{K}$ – сепарабельное гильбертово пространство и $\{|\varphi_n\rangle\}$ – такая последовательность единичных векторов из $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$, сходящаяся к вектору $|\varphi_0\rangle$, что $\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = \rho_n$ для всех $n \geqslant 0$ (см. лемму 3 в [16]). Из леммы 2 следует, что при каждом n

$$H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)) = H(\widetilde{\Phi}(\rho_n)). \tag{25}$$

Действительно, в силу представления (2) оператор $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)$ совпадает с частичным следом от оператора $V \otimes I_{\mathscr{K}} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| V^* \otimes I_{\mathscr{K}}$ из $\mathfrak{T}^1_+(\mathscr{H}' \otimes \mathscr{K} \otimes \mathscr{H}'')$ по пространству $\mathscr{H}''$, а в силу представления (3) оператор $\widetilde{\Phi}(\rho_n)$ совпадает с частичным следом от того же самого оператора по пространству $\mathscr{H}' \otimes \mathscr{K}$.

Используя конечность величин $H_\Phi(\rho_n)$ и $H_{\widetilde{\Phi}}(\rho_n)$, тождество (11) и равенство (25), получаем, что

$$\begin{aligned}
b_n &\doteq H\bigl(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|) \| \Phi(\rho_n) \otimes \rho_n\bigr) \\
&= \operatorname{Tr} \Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)\bigl(-\log(\Phi(\rho_n) \otimes \rho_n)\bigr) \\
&\qquad - \operatorname{Tr} \Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)\bigl(-\log(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|))\bigr) \\
&= H(\Phi(\rho_n)) + c_n - H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)) = a_n + c_n,
\end{aligned}$$

где $c_n = \operatorname{Tr} \Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)(I_{\mathscr{H}'} \otimes (-\log \rho_n))$.

Из полунепрерывности снизу относительной энтропии по совокупности аргументов следует, что $\liminf_{n\to+\infty} b_n \geqslant b_0$. Поэтому доказать (24) можно, показав, что

$$\limsup_{n\to+\infty} c_n \leqslant c_0. \tag{26}$$

Рассмотрим квантовый канал $\Psi = \Phi+\Delta$, где $\Delta(\,\cdot\,) = \sigma\,\mathrm{Tr}((I_{\mathscr{H}}-\Phi^*(I_{\mathscr{H}'}))(\,\cdot\,))$ – квантовая операция из $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$, определенная с помощью некоторого состояния σ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}')$. Поскольку $\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\rho_0) < +\infty$ и

$$H(\rho_n) = \mathrm{Tr}\ \Psi\otimes\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)(I_{\mathscr{H}'}\otimes(-\log\rho_n)) = c_n + d_n, \qquad n = 0,1,2,\dots,$$

где $d_n = \mathrm{Tr}\,\Delta\otimes\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)(I_{\mathscr{H}'}\otimes(-\log\rho_n))$, для доказательства (26) достаточно показать, что

$$\liminf_{n\to+\infty} d_n \geqslant d_0. \tag{27}$$

Имеем $d_n = \mathrm{Tr}\,B_n(-\log\rho_n)$, где $B_n = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}'}\,\Delta\otimes\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|)$ – оператор из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{K})$. Поскольку $B_n \leqslant B_n + \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}'}\,\Phi\otimes\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|) = \rho_n$, величина $H(B_n)$ конечна и поэтому $d_n = H(B_n)+H(B_n\|\rho_n)+\eta(\mathrm{Tr}\,B_n)+\mathrm{Tr}\,B_n-1$. Из полунепрерывности снизу квантовой энтропии и относительной энтропии следует (27).

Таким образом, утверждение теоремы доказано в случае $\mathscr{A}\subset\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Общее утверждение легко свести к этому случаю, используя свойство (6), поскольку для любой последовательности $\{A_n\}$, сходящейся к нулю, из неравенства (23) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} H(A_n) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}(H_\Phi(A_n) - H_{\widetilde{\Phi}}(A_n)) = 0.$$

Следствие 7. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ – квантовый канал и $\widetilde{\Phi}\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}'')$ – комплементарный канал. Если любые две функции из тройки $\{H, H_\Phi, H_{\widetilde{\Phi}}\}$ непрерывны на некотором множестве $\mathscr{A}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, то третья функция также непрерывна на этом множестве.*

Это утверждение справедливо для любой квантовой операции $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$, у которой

$$\lambda^*\bigl(\sqrt{I_{\mathscr{H}}-\Phi^*(I_{\mathscr{H}'})}\bigr) < +\infty^7. \tag{28}$$

Поскольку $\Phi^*(I_{\mathscr{H}'})\leqslant I_{\mathscr{H}}$ для любой квантовой операции Φ, причем равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда Φ – квантовый канал, то (28) можно трактовать как условие "близости" квантовой операции Φ к квантовому каналу, которая обеспечивает соответствующее поведение ее выходной энтропии. Это условие симметрично по отношению к паре $(\Phi,\widetilde{\Phi})$, поскольку $\Phi^*(I_{\mathscr{H}'}) = \widetilde{\Phi}^*(I_{\mathscr{H}''})$ в силу представлений (2), (3) и (5).

Доказательство. В силу представлений (2) и (3) первое утверждение следствия непосредственно выводится из теоремы 3 и предложения 5.

Второе утверждение следствия выводится из первого посредством приведенной ниже леммы 5, поскольку в силу представлений (2), (3) и (5) имеем

[7]Параметр $\lambda^*(\,\cdot\,)$ определен в предложении 3.

$\Phi=\Theta\circ\Lambda$, $\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Theta}\circ\Lambda$ и $\Phi^*(I_{\mathscr{H}'})=V^*V$, где $\Theta(\,\cdot\,)=\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}''}(\,\cdot\,)$ – квантовый канал из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}'\otimes\mathscr{H}'')$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$, а $\Lambda(\,\cdot\,)=V(\,\cdot\,)V^*$ – квантовая операция из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}'\otimes\mathscr{H}'')$.

Лемма 5. *Если V – линейное сжатие из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$ такое, что*

$$\lambda^*\bigl(\sqrt{I_{\mathscr{H}}-V^*V}\,\bigr)<+\infty,$$

то из непрерывности функции $A\mapsto H(VAV^*)$ на множестве $\mathscr{A}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ следует непрерывность квантовой энтропии на этом множестве.

Заметим, что обратное утверждение имеет место для произвольного линейного сжатия V в силу теоремы 2.

Доказательство. Рассмотрим квантовый канал

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H})\ni A\mapsto\Psi(A)=VAV^*\oplus\sqrt{I_{\mathscr{H}}-V^*V}\,A\sqrt{I_{\mathscr{H}}-V^*V}\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}'\oplus\mathscr{H}).$$

В силу предложения 3 функция $A\mapsto H\bigl(\sqrt{I_{\mathscr{H}}-V^*V}\,A\sqrt{I_{\mathscr{H}}-V^*V}\,\bigr)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$. Поэтому функция $A\mapsto H_\Psi(A)$ непрерывна на множестве $\mathscr{A}$. Поскольку комплементарный канал $\widetilde{\Psi}$ имеет двумерное выходное пространство (в силу представления (4)), утверждение леммы следует из первого утверждения следствия 7.

Следствие 8. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ – квантовый канал (или квантовая операция, удовлетворяющая условию (28)) такой, что комплементарный канал (операция) $\widetilde{\Phi}$ имеет непрерывную выходную энтропию. Функция $A\mapsto H_\Phi(A)$ непрерывна на множестве $\mathscr{A}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ тогда и только тогда, когда квантовая энтропия непрерывна на этом множестве.*

Условие следствия 8 выполнено для квантовых каналов с представлением Крауса (1), состоящим из конечного числа ненулевых слагаемых, комплементарные каналы которых имеют конечномерное выходное пространство (в силу представления (4)).

Достаточные условия непрерывности выходной энтропии квантовой операции $\widetilde{\Phi}$ (которая равносильна ее конечности в силу теоремы 1), выраженные в терминах операторов Крауса квантовой операции Φ, представлены в предложении 4.

Следующее утверждение можно считать обобщением предложения 2 (поскольку его применение к каналу $\Phi(A)=\sum_{i=1}^{+\infty}\langle i|A|i\rangle|i\rangle\langle i|$ дает утверждение этого предложения).

Следствие 9. *Пусть $\Phi(\,\cdot\,)=\sum_{i=1}^{+\infty}V_i(\,\cdot\,)V_i^*$ – квантовый канал (или квантовая операция, удовлетворяющая условию (28)) из $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ такой, что $\operatorname{Ran}V_i\perp\operatorname{Ran}V_j$ для всех достаточно больших $i\neq j$. Из непрерывности функции $A\mapsto H_\Phi(A)$ на множестве $\mathscr{A}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$ следует непрерывность квантовой энтропии на множестве $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Ran} V_i \perp \operatorname{Ran} V_j$ для всех $i, j \geqslant n$, $i \neq j$. Рассмотрим квантовые операции $\Phi_1(\cdot) = \sum_{i=1}^{n-1} V_i(\cdot)V_i^*$ и $\Phi_2(\cdot) = \sum_{i=n}^{+\infty} V_i(\cdot)V_i^*$. В силу леммы 1 из непрерывности функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\Phi(A)) = H(\Phi_1(A) + \Phi_2(A))$ следует непрерывность функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\Phi_2(A))$. По условию

$$H(\Phi_2(A)) = \sum_{i=n}^{+\infty} H(V_iAV_i^*) + H(\{\operatorname{Tr} V_iAV_i^*\}_{i=n}^{+\infty}) = \sum_{i=n}^{+\infty} H(V_iAV_i^*) + H(\widetilde{\Phi}_2(A)),$$

где $\widetilde{\Phi}_2(A) = \sum_{i=n}^{+\infty} \operatorname{Tr}[V_iAV_i^*]|i\rangle\langle i|$, а $\{|i\rangle\}$ – базис из представления (4) операции $\widetilde{\Phi}$. Поскольку оба слагаемых в правой части данного выражения являются полунепрерывными снизу функциями оператора A, из непрерывности функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\Phi_2(A))$ следует непрерывность функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\widetilde{\Phi}_2(A))$.

Рассмотрим квантовый канал $\Pi(\cdot) = P(\cdot)P + (I_{\mathscr{H}''} - P)(\cdot)(I_{\mathscr{H}''} - P)$ из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathscr{H}'', \mathscr{H}'')$, где $P = \sum_{i=1}^{n-1} |i\rangle\langle i|$. Поскольку

$$\Pi(\widetilde{\Phi}(A)) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \operatorname{Tr}[V_iAV_j^*]|i\rangle\langle j| + \widetilde{\Phi}_2(A),$$

из непрерывности функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\widetilde{\Phi}_2(A))$ в силу леммы 1 следует непрерывность функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\Pi(\widetilde{\Phi}(A)))$, которая в силу следствия 8 равносильна непрерывности функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(\widetilde{\Phi}(A))$. Поэтому следствие 7 показывает непрерывность функции $\mathscr{A} \ni A \mapsto H(A)$.

Замечание 9. Утверждения следствий 7, 8 и 9 не имеют места для квантовой операции Φ, не удовлетворяющей условию (28). Это показывает следующее утверждение.

Следствие 10. *Пусть Φ – квантовая операция из $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ и*

$$\mathfrak{T}_\Phi = \bigl\{A \in \mathfrak{T}_+(\mathscr{H}) \mid \min\{H_\Phi(A), H_{\widetilde{\Phi}}(A)\} < +\infty\bigr\}.$$

Если $\lambda^*(\sqrt{\Phi^*(I_{\mathscr{H}'})}) < +\infty$, то функция $A \mapsto (H_\Phi(A) - H_{\widetilde{\Phi}}(A))$ непрерывна на конусе $\mathfrak{T}_\Phi$ и ее абсолютное значение не превосходит $\lambda^*(\sqrt{\Phi^*(I_{\mathscr{H}'})})\|A\|_1$.

Если функции $A \mapsto H_\Phi(A)$ и $A \mapsto H_{\widetilde{\Phi}}(A)$ непрерывны на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, то оператор $\Phi^*(I_{\mathscr{H}'})$ удовлетворяет указанному выше условию.

Доказательство. Из представления (5) следует, что $\Phi^*(I_{\mathscr{H}'}) = V^*V$, где V – сжатие из представления (2) квантовой операции Φ. Поэтому, используя представления (2) и (3), первое утверждение следствия нетрудно вывести из предложения 3 и теоремы 3, а второе – из предложения 3 и предложения 5.

§ 6. Выходная энтропия как функция пары (отображение, входной оператор)

При анализе физически мотивированного вопроса о непрерывности информационных характеристик квантового канала как функций канала (т.е. непрерывности по отношению к “возмущениям” канала) необходимо рассматривать выходную энтропию как функцию пары (канал, входное состояние) и исследовать непрерывность этой функции в топологии декартова произведения на множестве таких пар при наделении множества квантовых каналов соответствующей (достаточно слабой) топологией (см. [5], [6]). Та же проблема возникает при изучении квантовых каналов посредством их аппроксимации квантовыми операциями с "хорошими" аналитическими свойствами (см. [5]).

Будем считать, что множество $\mathfrak{L}^{+}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ наделено топологией сильной сходимости, порожденной сильной операторной топологией множества всех линейных ограниченных отображений между банаховыми пространствами $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ (о свойствах этой топологии на множестве $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ квантовых операций см. [5]). Сходимость последовательности $\{\Phi_n\}\subset\mathfrak{L}^{+}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ к отображению $\Phi_0\in\mathfrak{L}^{+}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ в топологии сильной сходимости означает, что

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi_n(A)=\Phi_0(A),\qquad A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}).$$

Некоторые рассмотренные ранее результаты о свойствах функции $A\mapsto H_\Phi(A)$ допускают обобщения, которые дают условия непрерывности функции $(\Phi,A)\mapsto H_\Phi(A)$.

Обобщением основного результата теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\{\Phi_n\}\subset\mathfrak{L}^{+}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ *– последовательность отображений, сходящаяся к отображению* Φ_0. *Следующие свойства равносильны*:

(i) $\lim_{n\to+\infty}H_{\Phi_n}(A_n)=H_{\Phi_0}(A_0)<+\infty$ *для любой последовательности* $\{A_n\}\subset\mathfrak{T}^1_+(\mathscr{H})$, *сходящейся к оператору* A_0;[8]

(ii) $\lim_{n\to+\infty}H_{\Phi_n}(A_n)=H_{\Phi_0}(A_0)<+\infty$ *для любой последовательности* $\{A_n\}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, *сходящейся к оператору* A_0, *такой, что*

$$\lim_{n\to+\infty}H(A_n)=H(A_0)<+\infty.$$

Из этой теоремы следует, в частности, непрерывность функции $(\Phi,A)\mapsto H_\Phi(A)$ на множестве $\mathfrak{F}^n_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')\times\mathscr{A}$ при любом $n\in\mathbb{N}$, где $\mathfrak{F}^n_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ – множество всех квантовых операций, имеющих представление Крауса (1) с числом ненулевых слагаемых меньше или равным n, а $\mathscr{A}$ – подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, на котором непрерывна квантовая энтропия.

Обобщением теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $\{\Phi_n\}$ *и* $\{\widetilde{\Phi}_n\}$ *– последовательности квантовых операций из* $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}')$ *и из* $\mathfrak{F}_{\leqslant 1}(\mathscr{H},\mathscr{H}'')$ *соответственно, сходящиеся к операциям* Φ_0 *и* $\widetilde{\Phi}_0$, *такие, что* $(\Phi_n,\widetilde{\Phi}_n)$ *– комплементарная пара при каждом* $n=0,1,2,\dots$, *а* $\{A_n\}$ *– последовательность операторов из* $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, *сходящаяся к оператору* A_0, *такая, что*

$$\lim_{n\to+\infty}H(A_n)=H(A_0)<+\infty,\qquad \min\{H_{\Phi_n}(A_n),H_{\widetilde{\Phi}_n}(A_n)\}<+\infty,\qquad n\geqslant 0.$$

[8] $\mathfrak{T}^1_+(\mathscr{H})$ – конус положительных ядерных операторов в $\mathscr{H}$ ранга меньше или равного единице.

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\bigl(H_{\Phi_n}(A_n)-H_{\widetilde{\Phi}_n}(A_n)\bigr)=H_{\Phi_0}(A_0)-H_{\widetilde{\Phi}_0}(A_0)<+\infty.$$

Условие данного утверждения выполнено в случае, когда

$$\Phi_n(\,\cdot\,)=\sum_{i=1}^{+\infty}V_i^n(\,\cdot\,)(V_i^n)^*,\quad \widetilde{\Phi}_n(\,\cdot\,)=\sum_{i,j=1}^{+\infty}\operatorname{Tr}V_i^n(\,\cdot\,)(V_j^n)^*|i\rangle\langle j|,\qquad n\geqslant 0,$$

где $\{V_i^n\}_n$ – последовательность операторов из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$, сильно сходящаяся к оператору V_i^0 при каждом i, такая, что

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}(V_i^n)^*V_i^n=\sum_{i=1}^{+\infty}(V_i^0)^*V_i^0$$

в слабой операторной топологии[9], а $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}''$. Используя указанное выше обобщение теоремы 3 и предложение 2, нетрудно получить следующее условие непрерывности.

Следствие 11. *Пусть $\{A_n\}$ – последовательность операторов из $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H})$, сходящаяся к оператору A_0, такая, что $\lim_{n\to+\infty}H(A_n)=H(A_0)<+\infty$. Для доказательства соотношения $\lim_{n\to+\infty}H_{\Phi_n}(A_n)=H_{\Phi_0}(A_0)$ достаточно показать, что*

$$\lim_{n\to+\infty}H\bigl(\{\operatorname{Tr}V_i^nA_n(V_i^n)^*\}_{i=1}^{+\infty}\bigr)=H\bigl(\{\operatorname{Tr}V_i^0A_0(V_i^0)^*\}_{i=1}^{+\infty}\bigr)<+\infty.$$

Это условие имеет ясную физическую интерпретацию в терминах теории квантовых измерений (см. [19; пример 7]).

Доказательства приведенных в этом параграфе результатов представлены в [19; § 6].

§ 7. Приложение

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{C}$ – подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$. Из непрерывности квантовой энтропии на множествах*

$$\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}\mathscr{C}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{H}),\qquad \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\mathscr{C}\subset\mathfrak{T}_+(\mathscr{K})$$

следует непрерывность квантовой энтропии на множестве $\mathscr{C}$.

Доказательство. Пусть $\{C_n\}\subseteq\mathscr{C}$ – последовательность, сходящаяся к оператору $C_0\in\mathscr{C}$. Если $C_0\neq 0$, то в силу условия имеем

$$\lim_{n\to+\infty}H\biggl(\frac{C_n^{\mathscr{H}}}{\operatorname{Tr}C_n}\biggr)=H\biggl(\frac{C_0^{\mathscr{H}}}{\operatorname{Tr}C_0}\biggr),\qquad \lim_{n\to+\infty}H\biggl(\frac{C_n^{\mathscr{K}}}{\operatorname{Tr}C_n}\biggr)=H\biggl(\frac{C_0^{\mathscr{K}}}{\operatorname{Tr}C_0}\biggr),$$

[9]Это условие обеспечивает сходимость последовательностей $\{\Phi_n\}$ и $\{\widetilde{\Phi}_n\}$ к квантовым операциям Φ_0 и $\widetilde{\Phi}_0$. Оно всегда выполнено, если эти последовательности состоят из квантовых каналов.

где $C_n^{\mathscr{H}}=\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}} C_n$ и $C_n^{\mathscr{K}}=\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}} C_n$ для всех n. Предложение 8 из [15; часть II] показывает, что

$$\lim_{n\to+\infty} H\biggl(\frac{C_n}{\operatorname{Tr} C_n}\biggr)=H\biggl(\frac{C_0}{\operatorname{Tr} C_0}\biggr)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} H(C_n)=H(C_0).$$

Если $C_0=0$, то сходимость к нулю последовательности $\{H(C_n)\}$ следует из сходимости к нулю последовательностей $\{H(C_n^{\mathscr{H}})\}$ и $\{H(C_n^{\mathscr{K}})\}$ в силу субаддитивности квантовой энтропии, т.е. неравенства $H(C_n)\leqslant H(C_n^{\mathscr{H}})+H(C_n^{\mathscr{K}})$, $n\in\mathbb{N}$.

В доказательстве предложения 3 была использована следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть* $\{\pi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – *последовательность положительных чисел. Тогда*

$$\sup_{\{x_i\}\in\mathfrak{P}_{+\infty}} H(\{\pi_i x_i\}_{i=1}^{+\infty})=\lambda^*,$$

где λ^* – *единственное конечное решение уравнения* $\sum_{i=1}^{+\infty}e^{-\lambda/\pi_i}=1$, *если оно существует, и* $\lambda^*=\mathrm{g}(\{\pi_i^{-1}\})=\inf\{\lambda>0\mid\sum_{i=1}^{+\infty}e^{-\lambda/\pi_i}<+\infty\}$ *в противном случае.*[10]

Доказательство. Используя метод Лагранжа, легко показать, что функция

$$\mathfrak{P}_n\ni\{x_i\}_{i=1}^n\mapsto H(\{\pi_i x_i\}_{i=1}^n)$$

достигает максимума на векторе

$$\{x_i^*=c\pi_i^{-1}e^{-\lambda_n^*/\pi_i}\},$$

где λ_n^* – решение уравнения $\sum_{i=1}^n e^{-\lambda/\pi_i}=1$ и $c=[\sum_{i=1}^n\pi_i^{-1}e^{-\lambda_n^*/\pi_i}]^{-1}$. Следовательно,

$$\max_{\{x_i\}\in\mathfrak{P}_n} H(\{\pi_i x_i\}_{i=1}^n)=\lambda_n^*. \tag{29}$$

В силу полунепрерывности снизу классической энтропии утверждение леммы следует из (29) и замечания, что последовательность $\{\lambda_n^*\}$ сходится к λ^* при $n\to+\infty$.

Примеры использования полученных в данной статье условий непрерывности выходной энтропии положительных отображений в квантовой теории информации рассмотрены в [19; разделы 7, 8].

Автор благодарен М. Б. Рускаи и другим организаторам программы “Математика в квантовой теории информации” в институте Филдса (Канада, июль–август 2009), где была начата работа над настоящей статьей. Автор также

[10] Считаем, что $\inf\emptyset=+\infty$. Уравнение $\sum_{i=1}^{+\infty}e^{-\lambda/\pi_i}=1$ не имеет решений, когда либо $\mathrm{g}(\{\pi_i^{-1}\})=+\infty$, либо $\sum_{i=1}^{+\infty}e^{-\mathrm{g}(\{\pi_i^{-1}\})/\pi_i}<1$.

благодарен участникам семинара А. С. Холево “Квантовая вероятность, статистика, информация” (МИАН) за интерес к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

[2] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, М.–Ижевск, 2003; англ. пер.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lect. Notes Phys. Monogr., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[3] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010.

[4] A. Wehrl, “General properties of entropy”, *Rev. Modern Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.

[5] А. С. Холево, М. Е. Широков, “Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов”, *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 3–22; англ. пер.: M. E. Shirokov, A. S. Holevo, “On approximation of infinite-dimensional quantum channels”, *Probl. Inf. Transm.*, **44**:2 (2008), 73–90.

[6] D. Leung, G. Smith, “Continuity of quantum channel capacities”, *Comm. Math. Phys.*, **292**:1 (2009), 201–215.

[7] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1979.

[8] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.

[9] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, 1-е изд., Физматлит, М., 2004; 2-е изд., испр и доп.; Физматлит, М., 2007.

[10] C. King, K. Matsumoto, M. Nathanson, M. B. Ruskai, “Properties of conjugate channels with applications to additivity and multiplicativity”, *Markov Process. Related Fields*, **13**:2 (2007), 391–423.

[11] А. С. Холево, “Комплементарные каналы и проблема аддитивности”, *ТВП*, **51**:1 (2006), 133–143; англ. пер.: A. S. Holevo, “Complementary channels and the additivity problem”, *Theory Probab. Appl.*, **51**:1 (2007), 92–100.

[12] G. Lindblad, “Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems”, *Comm. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.

[13] M. Ohya, D. Petz, *Quantum entropy and its use*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[14] М. А. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, М., 2006; пер. с англ.: M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[15] М. Е. Широков, “Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 193–222; “II”, **71**:1 (2007), 187–224; англ. пер.: M. E. Shirokov, “Entropy characteristics of subsets of states. I”, *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1265–1292; “II”, **71**:1 (2007), 181–218.

[16] M. E. Shirokov, “Continuity of the von Neumann entropy”, *Comm. Math. Phys.*, **296**:3 (2010), 625–654.

[17] А. С. Холево, “Каналы, разрушающие сцепленность, в бесконечных размерностях”, *Пробл. передачи информ.*, **44**:3 (2008), 3–18; англ. пер.: A. S. Holevo,

"Entanglement-breaking channels in infinite dimensions", *Probl. Inf. Transm.*, **44**:3 (2008), 171–184.

[18] M. Horodecki, P. W. Shor, M. B. Ruskai, "Entanglement breaking channels", *Rev. Math. Phys.*, **15**:6 (2003), 629–641.

[19] M. E. Shirokov, *The output entropy of quantum channels and operations*, arXiv: abs/1002.0230.

[20] M. E. Shirokov, *The convex closure of the output entropy of infinite dimensional channels and the additivity problem*, arXiv: quant-ph/0608090.

[21] K. M. R. Audenaert, S. L. Braunstein, "On strong superadditivity of the entanglement of formation", *Comm. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 443–452.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
05.04.2010